Eberhard Zeidler *Hrsg.*

Springer-Handbuch der Mathematik IV

Begründet von I. N. Bronstein
und K. A. Semendjaew

Weitergeführt von G. Grosche,
V. Ziegler und D. Ziegler

Herausgegeben von E. Zeidler

Springer Spektrum

Springer-Handbuch der Mathematik IV

Herausgeber und Autor:
Prof. Dr. Eberhard Zeidler, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, Deutschland

Springer-Handbuch der Mathematik IV

Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew
Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler
Herausgegeben von E. Zeidler

Springer Spektrum

Herausgeber
Prof. Dr. Eberhard Zeidler
Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften
Leipzig
Deutschland

ISBN 978-3-658-00288-6 ISBN 978-3-658-00289-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-00289-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.
Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Theoria cum praxi

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Die Mathematik spielt eine wichtige Rolle in vielen Bereichen unserer modernen Gesellschaft. Sie ist eine Querschnittswissenschaft und zugleich eine Schlüsseltechnologie mit vielfältigen engen Verbindungen zu anderen Wissenschaften. Das betrifft die Naturwissenschaften, die Ingenieurwissenschaften, die Informatik und Informationstechnologie, die Wirtschafts- und Finanzwissenschaft, die Sozialwissenschaften sowie die Medizin. Mathematik ist abstrakt und zugleich sehr praktisch. Das vorliegende

SPRINGER-HANDBUCH DER MATHEMATIK,

das sich um einen breit angelegten Brückenschlag zwischen der Mathematik und ihren Anwendungen bemüht, stellt eine wesentliche Erweiterung des SPRINGER-TASCHENBUCHES DER MATHEMATIK dar, das 2012 im Verlag Springer Spektrum erschienen ist. Das Springer-Handbuch umfasst die folgenden vier Teile:

- TEIL I: Analysis.
- TEIL II: Algebra, Geometrie, Grundlagen der Mathematik.
- TEIL III: Variationsrechnung und Physik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Numerik und Wissenschaftliches Rechnen, Wirtschafts- und Finanzmathematik, Algorithmik und Informatik.
- TEIL IV: Funktionalanalysis, Dynamische Systeme, Mannigfaltigkeiten, Topologie, Mathematische Physik.

Als mehrbändiges Nachschlagewerk ist das Springer-Handbuch in erster Linie für wissenschaftliche Bibliotheken gedacht, die ihren Leserinnen und Lesern parallel zum Springer-Taschenbuch der Mathematik das umfangreichere Material des Springer-Handbuches (in elektronischer Form und Papierform) zur Verfügung stellen wollen. Für individuell interessierte Leserinnen und Leser sei auf folgendes hingewiesen. Die Teile I bis III des Springer-Handbuches der Mathematik enthalten die entsprechenden Kapitel des Springer-Taschenbuches der Mathematik, die durch wichtiges zusätzliches Material ergänzt werden. Dagegen sind die neun Kapitel von Teil IV nicht im Springer-Taschenbuch der Mathematik enthalten.

Teil I enthält neben dem einführenden Kapitel und dem Kapitel 1 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zur höheren komplexen Funktionentheorie und zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Teil II enthält neben den Kapiteln 2–4 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zu folgenden Gebieten: multilineare Algebra, höhere Zahlentheorie, projektive Geometrie, algebraische Geometrie und Geometrien der modernen Physik.

Teil III enthält neben den Kapiteln 5–9 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zu stochastischen Prozessen.

Teil IV enthält die folgenden Zusatzkapitel zum Springer-Taschenbuch der Mathematik:

– Kapitel 10: Höhere Analysis (Tensoranalysis und spezielle Relativitätstheorie, Integralgleichungen, Distributionen und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, moderne Maß- und Integrationstheorie).
– Kapitel 11: Lineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen.
– Kapitel 12: Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen.
– Kapitel 13: Dynamische Systeme – Mathematik der Zeit.
– Kapitel 14: Nichtlineare partielle Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften.
– Kapitel 15: Mannigfaltigkeiten.
– Kapitel 16: Riemannsche Geometrie und allgemeine Relativitätstheorie.
– Kapitel 17: Liegruppen, Liealgebren und Elementarteilchen - Mathematik der Symmetrie.
– Kapitel 18: Topologie - Mathematik des qualitativen Verhaltens.
– Kapitel 19: Krümmung, Topologie und Analysis (Eichheorie in Mathematik und Physik).

Hier werden im Rahmen der mathematischen Physik die Bedürfnisse der modernen Physik berücksichtigt. Am Ende von Teil IV findet man eine Tafel zur Geschichte der Mathematik. Die sorgfältig zusammengestellten Literaturangaben am Ende jedes Kapitels sollen dem Leser helfen, bei auftretenden Fragen geeignete moderne Bücher zu konsultieren, wobei zwischen einführender Literatur und anspruchsvollen Standardwerken gewählt werden kann.

Das vorliegende Springer-Handbuch der Mathematik wendet sich an:

– Fortgeschrittene Studierende der Mathematik und angrenzender naturwissenschaftlicher, technischer, wirtschaftswissenschaftlicher Fachrichtungen, Graduierte, Doktoranden
– Mathematiker, Physiker, Ingenieure, Informatiker, Wirtschaftsmathematiker in Forschung, Lehre und Praxis
– wissenschaftliche Bibliotheken, akademische Institutionen und Firmen.

Die Bedürfnisse eines derart breiten Leserkreises werden berücksichtigt, indem der Bogen von elementaren Kenntnissen bis hin zu anspruchsvollen mathematischen Resultaten sehr weit gespannt wird und das Werk ein breites Spektrum mathematischer Gebiete überdeckt. Großer Wert wird dabei auf folgende Aspekte gelegt:

– ausführliche Motivation und Erläuterung der Grundideen,
– leichte Fasslichkeit, Anschaulichkeit, und Übersichtlichkeit,
– die Verbindung zwischen reiner und angewandter Mathematik,
– vielseitige Anwendungen der Mathematik und Praxisnähe, sowie
– die Diskussion des historischen Hintergrunds.

Es wird gezeigt, dass die Mathematik mehr ist als eine trockene Ansammlung von Formeln, Definitionen, Theoremen und Rechenrezepten. Sie ist ein unverzichtbarer Partner der modernen Technik, und sie hilft wesentlich bei der optimalen Gestaltung von Industrie- und Wirtschaftsprozessen. Gleichzeitig ist die Mathematik ein wichtiger Bestandteil unserer menschlichen Kultur und ein wundervolles Erkenntnisorgan des Menschen, das ihn etwa in der Hochtechnologie, der Elementarteilchenphysik und der Kosmologie in Bereiche vorstoßen lässt, die ohne Mathematik nicht zu verstehen sind, weil sie von unserer täglichen Erfahrungswelt extrem weit entfernt sind.

Während das Springer-Taschenbuch der Mathematik den Anforderungen des Bachelor-Studiums angepasst ist, bezieht sich das Springer-Handbuch der Mathematik sowohl auf das Bachelor-Studium als auch auf das weiterführende Master-Studium.

Bei den Anwendungen der Mathematik spielen Phänomene eine große Rolle, die in Natur und Technik auftreten. Das mathematische Verständnis dieser Phänomene erleichtert dem Anwender in den Naturwissenschaften und in den Ingenieurwissenschaften den Überblick über die Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen mathematischen Disziplinen. Deshalb wird in diesem Springer-Handbuch der Mathematik die Sicht auf wichtige Phänomene besonders betont. Das betrifft:

– Mathematik der Grenzübergänge (Analysis und Funktionalanalysis),
– Mathematik des Optimalen (Variationsrechnung, optimale Steuerung, lineare und nichtlineare Optimierung),
– Mathematik des Zufalls (Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und stochastische Prozesse),
– Mathematik der Zeit und des Chaos (dynamische Systeme),
– Mathematik der Stabilität von Gleichgewichtszuständen in Natur und Technik, von zeitabhängigen Prozessen und von Algorithmen auf Computern,
– Mathematik der Komplexität von Algorithmen auf Computern,
– Mathematik der Symmetrie (Gruppentheorie),
– Mathematik der Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden (Funktionalanalysis),
– Mathematik des qualitativen Verhaltens von Gleichgewichtszuständen und zeitabhängigen Prozessen in Natur und Technik (Topologie),
– Mathematik der Wechselwirkungskräfte in der Natur (nichtlineare partielle Differentialgleichungen und nichtlineare Funktionalanalysis, Differentialgeometrie der Faserbündel und Eichtheorie),
– Mathematik der Strukturen (Kategorientheorie).

Interessant ist die Tatsache, dass klassische Ergebnisse der Mathematik heutzutage im Rahmen neuer Technologien völlig neue Anwendungen erlauben. Das betrifft etwa die Zahlentheorie, die lange Zeit als ein reines Vergnügen des menschlichen Geistes galt. Beispielsweise wird die berühmte Riemannsche Zetafunktion der analytischen Zahlentheorie, die in Kapitel 2 betrachtet wird, in der modernen Quantenfeldtheorie zur Berechnung von Streuprozessen von Elementarteilchen im Rahmen der Renormierungstheorie eingesetzt. Der klassische Satz von Fermat–Euler über Teilbarkeitseigenschaften von Zahlen wird heute wesentlich benutzt, um die Übermittlung von Nachrichten in raffinierter Weise zu verschlüsseln. Das findet man ebenfalls in Kapitel 2.

Das „Springer-Handbuch der Mathematik“ knüpft an eine lange Tradition an. Das „Taschenbuch der Mathematik“ von I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew wurde von Dr. Viktor Ziegler aus dem Russischen ins Deutsche übersetzt. Es erschien 1958 im Verlag B. G. Teubner in Leipzig, und bis zum Jahre 1978 lagen bereits 18 Auflagen vor. Unter der Herausgabe von Dr. Günter Grosche und Dr. Viktor Ziegler und unter wesentlicher redaktioneller Mitarbeit von Frau Dorothea Ziegler erschien 1979 die völlig überarbeitete 19. Auflage, an der Wissenschaftler der Leipziger Universität und anderer Hochschulen des mitteldeutschen Raumes mitwirkten.[1] Diese Neubearbeitung wurde ins Russische übersetzt und erschien 1981 im Verlag für Technisch-Theoretische Literatur in Moskau. Ferner wurden eine englische und eine japanische Übersetzung publiziert.

Motiviert durch die stürmische Entwicklung der Mathematik und ihrer Anwendungen erschien in den Jahren 1995 und 1996 ein völlig neuverfasstes, zweibändiges „Teubner-Taschenbuch der Mathematik“ im Verlag B. G. Teubner, Stuttgart und Leipzig.[2] Das daraus entstandene, vorliegende „Springer-Handbuch der Mathematik“ enthält zwei völlig neu geschriebene Kapitel über Wirtschafts-und Finanzmathematik sowie über Algorithmik und Informatik.

[1] Bis 1995 erschienen sieben weitere Auflagen.
[2] Die englische Übersetzung des ersten Bandes erschien 2003 im Verlag Oxford University Press, New York, als „Oxford Users’ Guide to Mathematics“.

Die moderne Konzeption und Koordination des Kapitels 8 über Wirtschafts-und Finanzmathematik lag in den erfahrenen Händen von Herrn Prof. Dr. Bernd Luderer (TU Chemnitz). In das von Herrn Prof. Dr. Juraj Hromkovič (ETH Zürich) verfasste Kapitel 9 über Algorithmik und Informatik flossen seine reichen Lehrerfahrungen ein. Im Mittelpunkt steht das zentrale Problem der Komplexität von Algorithmen. Erinnert sei daran, dass eines der berühmten sieben Milleniumsprobleme der Mathematik aus dem Jahre 2000 eine tiefe Frage der Komplexitätstheorie betrifft. Das Kapitel 7 über Numerik und Wissenschaftliches Rechnen wurde von Herrn Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch (Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig) wesentlich überarbeitet, und die übrigen Kapitel wurden aktualisiert. Der Herausgeber möchte den Kollegen Hackbusch, Hromkovič und Luderer sowie allen seinen Koautoren für ihre engagierte Arbeit sehr herzlich danken. Das betrifft:

– Prof. Dr. Hans-Rudolf Schwarz (7.1–7.6) und
  Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch (7.7),
– Prof. Dr. Bernd Luderer (8.1, 8.13),
  Prof. Dr. Jochen Blath (8.2, 8.3),
  Prof. Dr. Alexander Schied (8.4, 8.5),
  Prof. Dr. Stephan Dempe (8.6–8.10) und
  Prof. Dr. Gert Wanka (8.11, 8.12),
– Prof. Dr. Juraj Hromkovič (9.1– 9.9) und
  Prof. Dr. Siegfried Gottwald (9.10).

Ein herzliches Dankeschön geht auch an Frau Micaela Krieger-Hauwede für das sorgfältige Anfertigen vieler Abbildungen in den Teilen I bis III, das Lesen der Korrekturen und die einfühlsame, ästhetisch gelungene Textgestaltung. Frau Kerstin Fölting danke ich sehr herzlich für das sorgfältige Anfertigen der Abbildungen und der LaTeX-Version von Teil IV sowie für zahlreiche Hinweise zur Verbesserung der Darstellung. Den Mitarbeitern des Leipziger Max-Planck-Institutes für Mathematik in den Naturwissenschaften, Regine Lübke (Sekretariat), Katarzyna Baier und Ingo Brüggemann (Bibliothek), Oliver Heller und Rainer Kleinrensing (EDV-Abteilung) sei sehr herzlich für die technische Unterstützung bei der Fertigstellung des Springer-Handbuches der Mathematik gedankt. Ferner danke ich sehr herzlich Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch vom Verlag Springer Spektrum für die Koordination des gesamten Projekts und für die kompetente Aktualisierung des Literaturverzeichnisses. Schließlich sei allen Leserinnen und Lesern gedankt, die in der Vergangenheit durch ihre Hinweise zur Verbesserung der Darstellung beigetragen haben.

Alle Beteiligten hoffen, dass dieses Nachschlagewerk in allen Phasen des Studiums und danach im Berufsleben ein nützlicher Begleiter sein wird, der die Einheit der Mathematik betont.

Leipzig, im Sommer 2012 Der Herausgeber

Inhaltsverzeichnis

Vorwort v

10 Höhere Analysis 1

10.1 Die Grundideen der modernen Analysis . . . 1
10.1.1 Die Grundstruktur der mathematischen Formulierung physikalischer Theorien . . . 3
10.1.2 Drei tiefe Sätze der Analysis . . . 5
10.1.3 Glattheit . . . 11

10.2 Tensoranalysis, Differentialformen und mehrfache Integrale . . . 12
10.2.1 Tensordefinition . . . 13
10.2.2 Beispiele für Tensoren . . . 14
10.2.3 Beispiele für Pseudotensoren . . . 17
10.2.4 Tensoralgebra . . . 18
10.2.5 Tensoranalysis . . . 21
10.2.6 Tensorgleichungen und das Indexprinzip der mathematischen Physik . . . 25
10.2.7 Der Cartansche Kalkül der alternierenden Differentialformen . . . 26
10.2.8 Anwendungen in der speziellen Relativitätstheorie . . . 39
10.2.9 Anwendungen in der Elektrodynamik . . . 44
10.2.10 Die geometrische Interpretation des elektromagnetischen Feldes als Krümmung eines Hauptfaserbündels (Eichfeldtheorie) . . . 51

10.3 Integralgleichungen . . . 53
10.3.1 Allgemeine Begriffe . . . 53
10.3.2 Einfache Integralgleichungen, die durch Differentiation auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt werden können . . . 54
10.3.3 Integralgleichungen, die durch Differentiation gelöst werden können . . . 56
10.3.4 Die Abelsche Integralgleichung . . . 57
10.3.5 Volterrasche Integralgleichungen zweiter Art . . . 59
10.3.6 Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art und die Fredholmsche Alternative . . . 61
10.3.7 Integralgleichungen zweiter Art mit Produktkernen und ihre Zurückführung auf lineare Gleichungssysteme . . . 66
10.3.8 Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischen Kernen (Hilbert–Schmidt-Theorie) . . . 70
10.3.9 Anwendung auf Randwertaufgaben, Fourierreihen und die schwingende Saite; die Methode der Greenschen Funktion . . . 74
10.3.10 Integralgleichungen und klassische Potentialtheorie . . . 77
10.3.11 Singuläre Integralgleichungen und das Riemann–Hilbert-Problem . . . 78
10.3.12 Wiener–Hopf-Integralgleichungen . . . 80
10.3.13 Näherungsverfahren . . . 80

10.4 Distributionen und lineare partielle Differentialgleichungen der math. Physik . . . 83
10.4.1 Definition von Distributionen . . . 84
10.4.2 Das Rechnen mit Distributionen . . . 86
10.4.3 Die Grundlösung linearer partieller Differentialgleichungen . . . 89
10.4.4 Anwendung auf Randwertprobleme . . . 91
10.4.5 Anwendung auf Anfangswertprobleme . . . 92
10.4.6 Die Fouriertransformation . . . 93
10.4.7 Pseudodifferentialoperatoren . . . 96
10.4.8 Fourierintegraloperatoren . . . 98

10.5 Moderne Maß- und Integrationstheorie . . . 101
10.5.1 Maß . . . 102
10.5.2 Integral . . . 104
10.5.3 Eigenschaften des Integrals . . . 106
10.5.4 Grenzwertsätze . . . 107
10.5.5 Eigenschaften des Lebesgueintegrals auf dem $\mathbb{R}^n$ . . . 108
10.5.6 Das eindimensionale Lebesgue–Stieltjes-Integral . . . 109
10.5.7 Maße auf topologischen Räumen . . . 110

Literatur zu Kapitel 10 . . . 111

11 Lineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen 115

11.1 Grundideen . . . 115
11.1.1 Integralgleichungen als Operatorgleichungen und Fredholmoperatoren . . . 119
11.1.2 Differentialgleichungen als Operatorgleichungen und verallgemeinerte Ableitungen . . . 120
11.1.3 Das Konvergenzproblem für Fourierreihen . . . 123
11.1.4 Das Dirichletproblem und das Vervollständigungsprinzip . . . 124
11.1.5 Das Dirichletproblem und die Methode der finiten Elemente (numerische Funktionalanalysis) 128
11.1.6 Ein Blick in die Geschichte der Funktionalanalysis . . . 129

11.2 Räume . . . 131
11.2.1 Topologische Räume . . . 131
11.2.2 Metrische Räume . . . 136
11.2.3 Lineare Räume . . . 138
11.2.4 Banachräume . . . 147
11.2.5 Hilberträume . . . 155
11.2.6 Sobolevräume . . . 160
11.2.7 Lokalkonvexe Räume . . . 165

11.3 Existenzsätze und ihre Anwendungen . . . 167
11.3.1 Vollständige Orthonormalsysteme und spezielle Funktionen der mathematischen Physik . 167
11.3.2 Quadratische Minimumprobleme und das Dirichletproblem . . . 170
11.3.3 Die Gleichung $\lambda u = Ku = f$ für kompakte symmetrische Operatoren K und Integralgleichungen (Hilbert–Schmidt-Theorie) . . . 173
11.3.4 Die Gleichung $Au = f$ für Fredholmoperatoren . . . 176
11.3.5 Die Fortsetzung von Friedrichs und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik . . . 182
11.3.6 Halbgruppen . . . 186

11.4 Näherungsverfahren und numerische Funktionalanalysis . . . 186
11.4.1 Iterationsverfahren . . . 186
11.4.2 Das Ritzsche Verfahren und die Methode der finiten Elemente . . . 188
11.4.3 Das duale Ritzsche Verfahren (Trefftzsches Verfahren) . . . 190
11.4.4 Das universelle Galerkinverfahren (Projektionsverfahren) . . . 192
11.4.5 Projektions-Iterationsverfahren . . . 197
11.4.6 Der Hauptsatz der numerischen Funktionalanalysis . . . 198

11.5 Die Prinzipien der linearen Funktionalanalysis . . . 199
11.5.1 Das Hahn–Banach-Theorem und Optimierungsaufgaben . . . 199
11.5.2 Das Bairesche Kategorieprinzip . . . 204
11.5.3 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit . . . 205
11.5.4 Das Theorem über offene Abbildungen und korrekt gestellte Probleme . . . 205
11.5.5 Das Theorem über den abgeschlossenen Graphen . . . 206
11.5.6 Das Theorem über den abgeschlossenen Wertebereich (Fredholmsche Alternative) . . . 208
11.5.7 Kompaktheit und ein Extremalprinzip . . . 209

11.6 Das Spektrum . . . 214
11.6.1 Grundbegriffe . . . 214
11.6.2 Die Spektralschar selbstadjungierter Operatoren . . . 216

11.6.3 Funktionen von Operatoren . . . 219
11.6.4 Störungstheorie . . . 222
11.6.5 Streutheorie . . . 224
11.6.6 Operatorfunktionen und die Interpolation von Räumen und Operatoren . . . 224

11.7 Operatoralgebren (Algebra und Analysis) . . . 226
11.7.1 Grundbegriffe . . . 226
11.7.2 Kompakte Operatoren und Operatorenideale . . . 228
11.7.3 Darstellungstheorie für Operatoralgebren . . . 229
11.7.4 Anwendungen auf die Spektraltheorie normaler Operatoren . . . 231

11.8 Differentialoperatoren und Reihenentwicklungen der mathematischen Physik . . . 232

Literatur zu Kapitel 11 . . . 235

12 Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen 237

12.1 Fixpunktsätze und ihre Anwendungen auf Differential- und Integralgleichungen . . . 237
12.1.1 Der Fixpunktsatz von Banach und Iterationsverfahren . . . 237
12.1.2 Der Fixpunktsatz von Schauder und Kompaktheit . . . 240
12.1.3 Der Fixpunktsatz von Bourbaki–Kneser und Halbordnung . . . 240

12.2 Methode der Unter- und Oberlösungen, Iterationsverfahren in halbgeordneten Banachräumen 241

12.3 Differentiation von Operatoren . . . 241

12.4 Das Newtonverfahren . . . 243

12.5 Der Satz über implizite Funktionen . . . 245

12.6 Bifurkationstheorie . . . 246
12.6.1 Notwendige Bifurkationsbedingung . . . 246
12.6.2 Eine wichtige hinreichende Bedingung für Bifurkation . . . 247
12.6.3 Hinreichende und notwendige Bifurkationsbedingung für Probleme mit Variationsstruktur 247
12.6.4 Stabilitätsverlust und Bifurkation . . . 248
12.6.5 Die allgemeine Methode der Bifurkationsgleichung (Methode von Ljapunov–Schmidt) . . 249

12.7 Extremalprobleme . . . 250
12.7.1 Minimumprobleme . . . 250
12.7.2 Sattelpunktprobleme . . . 253
12.7.3 Das Gebirgspasstheorem . . . 253
12.7.4 Die Ljusternik–Schnirelman-Theorie für Eigenwertprobleme . . . 253

12.8 Monotone Operatoren . . . 254

12.9 Der Abbildungsgrad und topologische Existenzsätze . . . 255

12.10 Nichtlineare Fredholmoperatoren . . . 258

Literatur zu Kapitel 12 . . . 259

13 Dynamische Systeme – Mathematik der Zeit 261

13.1 Grundideen . . . 261
13.1.1 Einführende Beispiele . . . 262
13.1.2 Klassifikation dynamischer Systeme . . . 264
13.1.3 Konstruktion dynamischer Systeme durch autonome Differentialgleichungssysteme . . . 265

13.2 Dynamische Systeme in der Ebene . . . 265
13.2.1 Qualitatives Verhalten linearer Systeme in der Umgebung stationärer Punkte . . . 265
13.2.2 Nichtlineare Störungen . . . 267
13.2.3 Grenzzyklen . . . 267

13.3 Stabilität . . . 268
13.3.1 Stabilität von stationären Punkten . . . 268
13.3.2 Strukturelle Stabilität . . . 269

13.4 Bifurkation . . . 269
13.4.1 Grundidee . . . 269
13.4.2 Entstehung neuer Gleichgewichtszustände (erste Elementarkatastrophe) . . . 269
13.4.3 Hopfbifurkation . . . 270

13.5 Ljapunovfunktion . . . 270

13.6 Die Methode der Zentrumsmannigfaltigkeit . . . 272

13.7 Attraktoren . . . 276

13.8 Diskrete dynamische Systeme und Iterationsverfahren . . . 277

13.9 Fraktale . . . 278

13.10 Übergang zum Chaos . . . 279
13.10.1 Kontinuierliche dynamische Systeme . . . 279
13.10.2 Diskrete dynamische Systeme und Periodenverdopplung . . . 280

13.11 Ergodizität . . . 282

13.12 Störung quasiperiodischer Bewegungen . . . 283
13.12.1 Grundideen . . . 283
13.12.2 Typische Resonanzerscheinungen . . . 284
13.12.3 Relaxation (quasistatische Näherung) . . . 285

13.13 Singularitätentheorie (Katastrophentheorie) . . . 286
13.13.1 Reguläres und singuläres Verhalten . . . 286
13.13.2 Strukturelle Stabilität . . . 288
13.13.3 Wesentliche Terme in der Taylorentwicklung und Normalformen . . . 289
13.13.4 Parameterfamilien und Elementarkatastrophen . . . 290

13.14 Information und Chaos . . . 292

13.15 Entropie, Strukturbildung und Mathematik der Selbstorganisation . . . 293

13.16 Unendlichdimensionale dynamische Systeme . . . 294
13.16.1 Grundideen . . . 294
13.16.2 Die Poissongleichung . . . 295
13.16.3 Das Eigenwertproblem für die Laplacegleichung . . . 297
13.16.4 Die Wärmeleitungsgleichung . . . 297
13.16.5 Die Wellengleichung . . . 298
13.16.6 Die Schrödingergleichung . . . 299

13.17 Flüsse und Semiflüsse auf Banachräumen und Operatordifferentialgleichungen . . . 301
13.17.1 Konstruktion von Flüssen und Semiflüssen . . . 302
13.17.2 Anwendung auf homogene Differentialgleichungen . . . 303
13.17.3 Anwendung auf inhomogene Differentialgleichungen . . . 303
13.17.4 Die Formel von Dyson für zeitabhängige Differentialgleichungen . . . 304

13.18 Die allgemeine Dynamik von Quantensystemen . . . 304
13.18.1 Bewegung eines Quantenteilchens auf der x-Achse . . . 306
13.18.2 Das Wasserstoffatom . . . 307
13.18.3 Streuprozesse . . . 308

Literatur zu Kapitel 13 . . . 309

14 Nichtlineare partielle Differentialgleichungen 311

14.1 Grundideen . . . 312

14.2 Reaktions-Diffusionsgleichungen . . . 316
14.2.1 Fortschreitende Wellen . . . 316
14.2.2 Globale Attraktoren . . . 317
14.2.3 Ein allgemeiner Existenzsatz für quasilineare parabolische Systeme . . . 318

14.3 Nichtlineare Wellengleichungen . . . 319
14.3.1 Die Lebensdauer von glatten Lösungen . . . 319
14.3.2 Ein allgemeiner Existenzsatz für nichtlineare symmetrische hyperbolische Systeme . . . 320
14.3.3 Der quasilineare Spezialfall . . . 321
14.3.4 Anwendungen . . . 321

14.4 Die Gleichungen der Hydrodynamik . . . 322
14.4.1 Die Eulerschen Gleichungen für ideale Flüssigkeiten . . . 322
14.4.2 Die Navier–Stokesschen Differentialgleichungen für viskose Flüssigkeiten und Turbulenz 323

14.5 Variationsprobleme . . . 326
14.5.1 Grundidee . . . 326
14.5.2 Die allgemeinen Euler–Lagrange-Gleichungen . . . 329
14.5.3 Symmetrie und Erhaltungsgrößen in der Natur (das Noethertheorem) . . . 330
14.5.4 Ein Existenzsatz für stationäre Erhaltungsgleichungen . . . 332
14.5.5 Ein allgemeiner Existenzsatz für Variationsprobleme . . . 333

14.6 Die Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie . . . 334
14.6.1 Das Variationsproblem der Elastostatik . . . 334
14.6.2 Anwendung auf nichtlineares Henckymaterial und lineares Material . . . 336
14.6.3 Die Grundgleichungen der Elastodynamik . . . 337
14.6.4 Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz der nichtlinearen Elastodynamik . . . 339
14.6.5 Balkenbiegung und Bifurkation . . . 339

14.7 Die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie . . . 341

14.8 Die Gleichungen der Eichfeldtheorie und Elementarteilchen . . . 341
14.8.1 Grundideen . . . 341
14.8.2 Konventionen . . . 343
14.8.3 Die Diracgleichung für die Bewegung eines relativistischen Elektrons . . . 344
14.8.4 Das Postulat der lokalen Eichinvarianz und die Maxwell–Dirac-Gleichungen der Quantenelektrodynamik . . . 346
14.8.5 Die Grundideen der Quantenfeldtheorie . . . 347
14.8.6 $SU(N)$-Eichfeldtheorie . . . 349

14.9 Die Geometrisierung der modernen Physik . . . 352

Literatur zu Kapitel 14 . . . 354

15 Mannigfaltigkeiten 357

15.1 Grundbegriffe . . . 357
15.1.1 Definition einer Mannigfaltigkeit . . . 358
15.1.2 Konstruktion von Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$ . . . 360
15.1.3 Orientierbarkeit . . . 361
15.1.4 Klassischer Tensorkalkül auf Mannigfaltigkeiten . . . 362
15.1.5 Differentiation von klassischen Tensorfeldern . . . 363
15.1.6 Tangentenvektoren und Tangentialraum . . . 364
15.1.7 Kotangentenvektoren und Kotangentialraum . . . 366
15.1.8 Untermannigfaltigkeiten . . . 367
15.1.9 Mannigfaltigkeiten mit Rand . . . 368
15.1.10 Mannigfaltigkeiten als topologische Räume . . . 368

15.2 Glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten . . . 369

15.3 Konstruktion von Mannigfaltigkeiten . . . 371

15.4 Invariante Analysis auf Mannigfaltigkeiten . . . 373
15.4.1 Tensoralgebra . . . 373
15.4.2 Tensorfelder . . . 375
15.4.3 Differentialformen . . . 375
15.4.4 Transformation von Tensorfeldern mittels Diffeomorphismen . . . 379
15.4.5 Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten . . . 381
15.4.6 Lieableitung von Tensorfeldern . . . 382
15.4.7 Der Satz von Frobenius . . . 385

15.5 Anwendungen in der Thermodynamik . . . 389

15.6 Klassische Mechanik und symplektische Geometrie . . . 391
15.6.1 Grundidee . . . 391
15.6.2 Klassische Mechanik auf Mannigfaltigkeiten . . . 392
15.6.3 Symplektische Geometrie . . . 393

15.7 Anwendungen in der statistischen Physik . . . 394
15.7.1 Das Grundmodell der statistischen Physik . . . 394
15.7.2 Anwendungen auf die Quantenstatistik . . . 396
15.7.3 Klassische Gibbssche Statistik im Phasenraum . . . 397

15.8 Operatoralgebren in der Physik und nichtkommutative Geometrie . . . 398

Literatur zu Kapitel 15 . . . 399

16 Riemannsche Geometrie und allg. Relativitätstheorie 401

16.1 Der klassische Kalkül . . . 401
16.1.1 Messung von Längen, Winkeln und Volumina . . . 402
16.1.2 Krümmung . . . 403
16.1.3 Paralleltransport . . . 404
16.1.4 Geodätische Kurven (verallgemeinerte Geraden) . . . 404
16.1.5 Anwendung auf die nichteuklidische Geometrie . . . 405
16.1.6 Der δ-0perator und der Laplaceoperator . . . 407
16.1.7 Die Volumenform . . . 408
16.1.8 Der $*$-Operator von Hodge . . . 408

16.2 Der invariante Kalkül . . . 409
16.2.1 Messung von Längen, Winkeln und Volumina . . . 409
16.2.2 Metrik auf eigentlichen Riemannschen Mannigfaltigkeiten . . . 410
16.2.3 Kovariante Differentiation und Paralleltransport auf Mannigfaltigkeiten mit linearem Zusammenhang . . . 410
16.2.4 Torsion und Krümmung auf Mannigfaltigkeiten mit linearem Zusammenhang . . . 412
16.2.5 Kovariante Differentiation und Krümmung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten . . . 413
16.2.6 Geodätische . . . 413

16.3 Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten . . . 415
16.3.1 Längentreue Abbildungen . . . 415
16.3.2 Winkeltreue (konforme) Abbildungen . . . 417

16.4 Kählermannigfaltigkeiten . . . 418

16.5 Anwendungen auf die allgemeine Relativitätstheorie . . . 419
16.5.1 Physikalische Grundidee . . . 419
16.5.2 Die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie . . . 420
16.5.3 Die Schwarzschildmetrik eines Zentralkörpers . . . 421
16.5.4 Schwarze Löcher . . . 422
16.5.5 Die Expansion des Weltalls (Urknall) . . . 422

Literatur zu Kapitel 16 . . . 425

17 Liegruppen, Liealgebren und Elementarteilchen 427

17.1 Grundideen . . . 428

17.2 Gruppen . . . 437
17.2.1 Grundbegriffe . . . 437
17.2.2 Morphismen von Gruppen . . . 438
17.2.3 Darstellungen von Gruppen . . . 440
17.2.4 Kategorien und Funktoren zur Beschreibung allgemeiner Strukturprinzipien der modernen Mathematik . . . 442

17.3 Darstellungen endlicher Gruppen . . . 444

17.4 Liealgebren . . . 446
17.4.1 Grundbegriffe . . . 446
17.4.2 Beispiele von Liealgebren . . . 447
17.4.3 Darstellungen von Liealgebren . . . 449

17.5 Liegruppen . . . 450
17.5.1 Grundbegriffe . . . 450
17.5.2 Der enge Zusammenhang zwischen Liegruppen und ihren Liealgebren (das Liesche Linearisierungsprinzip) . . . 451
17.5.3 Struktur von Liegruppen . . . 453
17.5.4 Beispiele . . . 453
17.5.5 Physikalische Interpretation der Liealgebra einer Liegruppe . . . 454
17.5.6 Darstellungen . . . 455

17.6 Darstellungen der Permutationsgruppe und Darstellungen klassischer Gruppen . . . 456

17.7 Anwendungen auf den Elektronenspin . . . 461

17.8 Anwendungen auf das Quarkmodell der Elementarteilchen . . . 464

17.9 Darstellungen kompakter Liegruppen und spezielle Funktionen der mathematischen Physik 472

17.10 Transformationsgruppen und Symmetrie von Mannigfaltigkeiten . . . 474

17.11 Differentialgleichungen und Symmetrie . . . 478
17.11.1 Invariante Funktionen . . . 479
17.11.2 Invariante Differentialgleichungen . . . 480
17.11.3 Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen . . . 481
17.11.4 Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen . . . 482

17.12 Die innere Symmetrie Liescher Gruppen und ihrer Liealgebren . . . 483

17.13 Differentialformen mit Werten in einer Liealgebra . . . 485

Literatur zu Kapitel 17 . . . 486

18 Topologie – Mathematik des qualitativen Verhaltens 487

18.1 Das Ziel der Topologie . . . 487

18.2 Die Bedeutung der Eulerschen Charakteristik . . . 491
18.2.1 Der Hauptsatz der topologischen Flächentheorie . . . 491
18.2.2 Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten . . . 492
18.2.3 Morsetheorie für Extremalprobleme auf Mannigfaltigkeiten . . . 493
18.2.4 Der Satz von Gauß-Bonnet-Chern . . . 493

18.3 Homotopie (Deformation) . . . 495
18.3.1 Erweiterung stetiger Abbildungen . . . 496
18.3.2 Der Abbildungsgrad . . . 496

18.3.3 Die Fundamentalgruppe 497
18.3.4 Überlagerungsmannigfaltigkeiten 499

18.4 Der anschauliche Hintergrund der Dualität zwischen Homologie und Kohomologie 500

18.5 De Rhamsche Kohomologie 503

18.6 Homologie 506
18.6.1 Die Homologie eines Dreiecks 506
18.6.2 Singuläre Homologie topologischer Räume 508
18.6.3 Singuläre Kohomologie topologischer Räume 510
18.6.4 Der Satz von de Rham über Differentialgleichungen für Formen auf Mannigfaltigkeiten . 510

18.7 Exakte Sequenzen 511
18.7.1 Die Mayer–Vietoris-Sequenz 512
18.7.2 Homologie- und Kohomologiegruppen mit beliebigen Koeffizienten 513
18.7.3 Höhere Homotopiegruppen 515
18.7.4 Die exakte Homotopiesequenz eines Faserbündels 516
18.7.5 Fundamentalgruppe und Symmetrie 518

Literatur zu Kapitel 18 519

19 Krümmung, Topologie und Analysis **521**

19.1 Grundideen 521

19.2 Bündel 523

19.3 Produktbündel und Eichfeldtheorie 525

19.4 Paralleltransport in Hauptfaserbündeln und Krümmung 528
19.4.1 Die Zusammenhangsform $\mathbb{A}$ auf $\mathbb{H}$ 529
19.4.2 Die Krümmungsform $\mathbb{F}$ auf $\mathbb{H}$ 529
19.4.3 Geometrische Interpretation 529

19.5 Paralleltransport in Vektorraumbündeln und kovariante Richtungsableitung 531

19.6 Anwendung auf die Methode des repère mobile von É. Cartan 534
19.6.1 Die globalen Strukturgleichungen von Cartan 536
19.6.2 Die lokalen Strukturgleichungen von Cartan 537

19.7 Die Wegabhängigkeit des Paralleltransports 537

19.8 Die Struktur Riemannscher Flächen 539
19.8.1 Algebraische Funktionen als komplexe Kurven 541
19.8.2 Kompakte Riemannsche Flächen 545
19.8.3 Der Uniformisierungssatz 547
19.8.4 Analytische Fortsetzung und Riemannsche Flächen 549

19.9 Garbenkohomologie und die Konstruktion meromorpher Funktionen 549
19.9.1 Garben 550
19.9.2 Die Lösung des Cousinschen Problems 551
19.9.3 Die Lösung des Problems von Mittag–Leffler 552
19.9.4 Garbenkohomologie 552

19.10 Charakteristische Klassen für Vektorraumbündel 554
19.10.1 Grundideen 554
19.10.2 Die Kohomologiealgebra $H^*(M)$ einerMannigfaltigkeit M 556
19.10.3 Der Weil-Morphismus und charakteristische Klassen 558
19.10.4 Chernklassen 559

19.11 Das Atiyah-Singer-Indextheorem 561
19.11.1 Die analytische Form des Indextheorems für elliptische Differentialoperatoren 562

19.11.2 Die topologische Form des Indextheorems für elliptische Differentialoperatoren 564
19.11.3 Das Indextheorem für elliptische Komplexe 565
19.11.4 Anwendungen auf den de Rham Komplex 567
19.11.5 Anwendung auf den Dolbeaut-Komplex 568
19.11.6 Das Theorem von Riemann–Roch–Hirzebruch 568

19.12 Minimalflächen 569

19.13 Stringtheorie 572

19.14 Supermathematik und Superstringtheorie 576

Literatur zu Kapitel 19 577

Zeittafel zur Geschichte der Mathematik 581

Literatur zur Geschichte der Mathematik 600

Mathematische Symbole 605

Index **612**

KAPITEL 10

HÖHERE ANALYSIS

Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.
Galileo Galilei (1564-1642)

Jeder wirkliche Fortschritt der Mathematik geht stets Hand in Hand mit der Auffindung schärferer Hilfsmittel und einfacherer Methoden, die zugleich das Verständnis früherer Theorien erleichtern und umständliche ältere Entwicklungen beseitigen ... Der einheitliche Charakter der Mathematik liegt im inneren Wesen dieser Wissenschaft begründet; denn die Mathematik ist die Grundlage alles exakten naturwissenschaftlichen Denkens.[1]
David Hilbert (1900)

10.1 Die Grundideen der modernen Analysis und ihr Verhältnis zu den Naturwissenschaften

Die Analysis ist diejenige mathematische Disziplin, die sich mit dem Begriff des *Grenzwerts* beschäftigt. Bis auf Ansätze in der Antike bei Archimedes (287-212 v. Chr.) trat der Grenzwertbegriff erst voll im Zusammenhang mit der Schaffung der Differential- und Integralrechnung durch Newton und Leibniz Ende des 17. Jahrhunderts in Erscheinung. Seit diesem Zeitpunkt ist die Entwicklung der Analysis untrennbar mit der Entwicklung der Physik verbunden, wobei sich beide Wissenschaften gegenseitig befruchtet haben. Tabelle 10.1 zeigt wichtige physikalische Disziplinen und eine Auswahl von damit verbundenen mathematischen Theorien.

Ihre volle Kraft entfaltet die Analysis dabei im Zusammenspiel mit anderen mathematischen Disziplinen wie Geometrie, Topologie, Algebra, Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

[1] David Hilbert (1862-1943) war einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten. In Göttingen setzte er die große Tradition von Carl Friedrich Gauß (1777-1855) und Bernhard Riemann (1826-1866) fort. Hilbert erzielte in allen Gebieten der Mathematik (Algebra und Zahlentheorie, Geometrie, Analysis und Logik) fundamentale Ergebnisse. Beispielsweise wird die moderne Quantentheorie in der Sprache der Hilberträume formuliert.

Auf dem zweiten mathematischen Weltkongress in Paris im Jahre 1900 formulierte Hilbert seine berühmten 23 Probleme, die die Entwicklung der Mathematik des 20. Jahrhunderts wesentlich beeinflusst haben [vgl. Aleksandrov 1983].

E. Zeidler (Hrsg.), *Springer-Handbuch der Mathematik IV*,
DOI 10.1007/978-3-658-00289-3_1,

Tabelle 10.1

physikalische Disziplin	mathematische Theorie
klassische Mechanik	dynamische Systeme (gewöhnliche Differentialgleichungen), Variationsrechnung, Stabilitätstheorie, partielle Differentialgleichungen (Hamilton–Jacobi-Theorie), Liegruppen (Symmetrie), symplektische Geometrie, Riemannsche Geometrie, Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten (Zustandsräume)
geometrische Optik	Variationsrechnung, projektive Geometrie, symplektische Geometrie (Lagrangemannigfaltigkeiten), Topologie (Morsetheorie, Maslovindex und Kaustik), Fourierintegraloperatoren und Pseudodifferentialoperatoren (Distributionen)
klassische statistische Mechanik	Wahrscheinlichkeitsrechnung und Maßtheorie, Informationstheorie (Entropie), Ergodentheorie, symplektische Geometrie
phänomenologische Thermodynamik/ physikalische Chemie/ mathematische Biologie/ Halbleiter	Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten, Systeme von partiellen Differentialgleichungen (Reaktions-Diffusionsprozesse), stochastische Prozesse und das unendlichdimensionale Wienerintegral auf Räumen von Trajektorien (Diffusion), unendlichdimensionale dynamische Systeme (Halbgruppen/Semiflüsse) und nichtlineare Funktionalanalysis
Hydrodynamik	partielle Differentialgleichungen, unendlichdimensionale dynamische Systeme (Halbgruppen / Semiflüsse), stochastische Prozesse (Turbulenz), nichtlineare Funktionalanalysis
Elastizitätstheorie	partielle Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Integralgleichungen, unendlichdimensionale dynamische Systeme, algebraische Invariantentheorie (effektive Formulierung von Materialgesetzen), Liegruppen (Symmetrie), Bifurkationstheorie (Ausbeulung von Stäben und Platten), nichtlineare Funktionalanalysis
Elektrodynamik	Vektoranalysis, Tensoranalysis, Differentialformen, Krümmung von Hauptfaserbündeln, Riemannsche Geometrie, partielle Differentialgleichungen, Potentialtheorie und Integralgleichungen, Theorie der Distributionen (verallgemeinerte Funktionen), Differentialtopologie (de Rhamsche Kohomologie und Homologie)
spezielle Relativitätstheorie	Tensoranalysis, Riemannsche Geometrie
allgemeine Relativitätstheorie (Kosmologie)	Tensoranalysis, Riemannsche Geometrie, nichtlineare partielle Differentialgleichungen, unendlichdimensionale dynamische Systeme (Hamiltonsche Systeme), nichtlineare Funktionalanalysis
Quantenmechanik/ Quantenchemie/ Quantenfeldtheorie/ Quantenstatistik/ Festkörpertheorie/ Superstringtheorie	(i) Hilberträume, Spektraltheorie von Operatoren und Streutheorie, harmonische Analysis, C^*-Algebren und von-Neumann-Algebren, nichtkommutative Geometrie, Quantengruppen; (ii) unendlichdimensionale dynamische Systeme (unitäre Flüsse / Gruppen); partielle Differentialgleichungen; Integralgleichungen; (iii) Wahrscheinlichkeitsrechnung (stochastische Prozesse), Feynmanintegral (unendlichdimensionales Integral); (iv) Darstellungstheorie von Liealgebren und Liegruppen, Super-Liealgebren und Super-Liegruppen (graduierte Algebren); (v) Superanalysis zur einheitlichen Beschreibung von Fermionen und Bosonen; (vi) komplexe Mannigfaltigkeiten, algebraische Geometrie, Zahlentheorie; (vii) Topologie (z. B. Knotentheorie, K-Theorie, charakteristische Klassen, Indextheorie von Atiyah–Singer);
Eichfeldtheorie für eine einheitliche Theorie der fundamentalen Wechselwirkungen in der Natur (Standardmodell der Elementarteilchen)	Liegruppen und Liealgebren, Krümmung von Hauptfaserbündeln, Vektorbündel, Topologie (charakteristische Klassen $\rightarrow$ topologische Ladungen)

Tabelle 10.2

Phänomen in der Natur	mathematisches Modell
Gewinnung der Grundgleichungen der Physik	Variationsrechnung (Prinzip der stationären Wirkung)
Wechselwirkungen	mathematische Nichtlinearitäten
zeitabhängige Prozesse (i) reversibel (ii) irreversibel (iii) chaotisches Verhalten (Turbulenz)	dynamische Systeme (i) Flüsse (einparametrige Gruppen) (ii) Semiflüsse (Halbgruppen) (iii) z. B. seltsame Attraktoren mit einer gebrochenen Dimension
Symmetrie (Erhaltungsgesetze)	Liegruppen (Liealgebren)
Strukturbildung in Physik, Chemie und Biologie	dynamische Systeme, Differentialtopologie und algebraische Geometrie, Singularitätentheorie (Katastrophentheorie) (a) strukturelle Stabilität (b) strukturelle Instabilität (Bifurkation) (c) Generizität (d) Transversalität
globale Effekte	Topologie (topologische Räume [z. B. Mannigfaltigkeiten] und topologische Abbildungen [z. B. Diffeomorphismen zwischen Mannigfaltigkeiten]) (i) Homologie = Struktur von *geometrischen* Objekten (topologische Räume, Mannigfaltigkeiten) (ii) Kohomologie = Struktur von *analytischen* Objekten (z. B. Funktionen, Differentialformen) auf geometrischen Objekten (iii) Homotopie = Deformation
Quantenzahlen	(a) irreduzible Darstellungen von Liealgebren (z. B. $su(N)$) (b) topologische Invarianten = topologische Ladungen (z. B. Eulerzahl, charakteristische Klassen, Abbildungsgrad) (c) Solitonen (Instantonen, magnetische Monopole)
Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise sowie Konvergenz von Näherungsverfahren	Funktionalanalysis

10.1.1 Die Grundstruktur der mathematischen Formulierung physikalischer Theorien

In Tabelle 10.2 stellen wir einige allgemeine Prinzipien dar, die wir kurz erläutern wollen.

Bis auf wenige Ausnahmen ergeben sich alle Grundgleichungen der Physik aus *Variationsprinzipien*[2] (Prinzip der stationären Wirkung). Dadurch entstehen Systeme von gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen, je nachdem ob das System endlich viele Freiheitsgrade (klassische Mechanik) oder unendlich viele Freiheitsgrade (Feldtheorie) besitzt.

Erhaltungssätze folgen aus *Symmetrieeigenschaften* des Variationsintegrals (Noethertheorem; vgl. 14.5). Zum Beispiel ergibt sich die Erhaltung der Energie, falls sich das System homogen bezüglich der Zeit verhält, d. h., neben einem ablaufenden Prozess $\mathbb{P}$ ist auch jeder Prozess möglich, der sich aus $\mathbb{P}$ durch eine Zeittranslation ergibt.

[2] Die Variationsrechnung wurde von Leonhard Euler (1707-1783) geschaffen und von Joseph Louis Lagrange (1736-1813) weiter ausgebaut. Euler war der produktivste Mathematiker aller Zeiten. Bisher sind 72 Bände seiner gesammelten mathematischen und physikalischen Werke erschienen; zahlreiches Material harrt noch der Herausgabe (davon 15 Bände mit Briefen).

Alle Gleichungen der Physik, die *Wechselwirkungen* in der Natur beschreiben, sind *nichtlinear*. Eine scheinbare Ausnahme bilden die linearen Maxwellgleichungen. Diese enthalten jedoch nur einen Teil der elektromagnetischen Phänomene. Die vollständige Theorie (Quantenelektrodynamik), die die Wechselwirkungen zwischen elektromagnetischen Feldern (Photonen) und Elementarteilchen (Elektronen und Positronen) berücksichtigt, ist tatsächlich nichtlinear.

Ferner ist die lineare Schrödingergleichung der Quantenmechanik und Quantenchemie eine Näherung der relativistischen Diracgleichung, die ihre volle Kraft erst durch Ankopplung an das elektromagnetische Feld entfaltet (nichtlineare Gleichung der Quantenelektrodynamik; vgl. 14.8.4).

Nur in wenigen Spezialfällen kann man die Gleichungen der Physik explizit lösen (z. B. Solitonen). Um konsistente *Näherungsverfahren* auf Computern zu erhalten, benötigt man einerseits abstrakte *Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise* für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Variationsprobleme, Variationsungleichungen, Integralgleichungen usw. und andererseits *Konvergenzbeweise mit Fehlerabschätzungen*, die theoretisch zeigen, dass die Näherungsverfahren gegen die Lösungen konvergieren. Das geschieht heutzutage alles im Rahmen der *Funktionalanalysis* (vgl. die Kapitel 7, 11 und 14). Die Probleme werden dabei als

(i) Operatorgleichungen (stationäre Prozesse),

(ii) Operatordifferentialgleichungen (instationäre Prozesse) oder als

(iii) Extremalprobleme für Funktionale

in *unendlichdimensionalen* Räumen (Hilberträume, Banachräume, Hilbert- oder Banachmannigfaltigkeiten usw.) formuliert. Eine besondere Rolle spielen in diesem Zusammenhang *Lebesgueräume* und *Sobolevräume* von Funktionen mit *verallgemeinerten* Ableitungen, zu deren Definition die moderne Maß- und Integrationstheorie (das Lebesgueintegral) benötigt wird (vgl. 10.5 und 11.2.6).

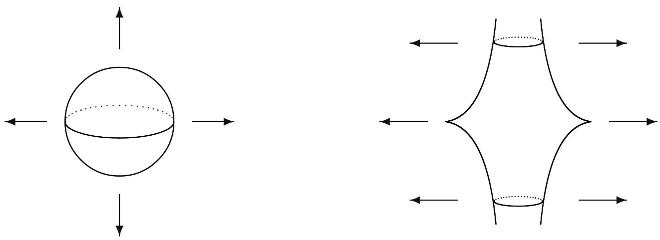
Die abstrakten Existenzbeweise der Funktionalanalysise erlauben jedoch auch tiefere physikalische Einsichten. Henri Poincaré (1854-1912) schuf Ende des vorigen Jahrhunderts im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen zur Himmelsmechanik (z. B. Dreikörperproblem) die Topologie und die qualitative Theorie dynamischer Systeme. Die Zeitentwicklung der meisten physikalischen Systeme führt wegen der unendlichen Anzahl der Freiheitsgrade auf *unendlichdimensionale* dynamische Systeme (vgl. 13.16). Um diese parallel zum klassischen endlichdimensionalen Fall qualitativ untersuchen zu können (Stabilität, Attraktoren, Chaos usw.), benötigt man das unendlichdimensionale dynamische System zunächst als ein mathematisches Objekt in einem Zustandsraum. Dieses Objekt ergibt sich durch abstrakte Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise für Operatordifferentialgleichungen im Rahmen der Funktionalanalysis.[3] Die *Zustandsräume* sind in der Regel Sobolevräume oder Mannigfaltigkeiten, die lokal wie Sobolevräume aussehen (vgl. 11.2.6). Mit Hilfe solcher Existenzbeweise konnte beispielsweise 1983 nachgewiesen werden, dass das dynamische System, welches die Bewegung zäher (viskoser) Flüssigkeiten im Rahmen der Navier–Stokesschen Differentialgleichungen beschreibt, einen Attraktor von gebrochener Dimension d besitzt, wobei d der Anzahl der Freiheitsgrade entspricht, die die Physiker bei Turbulenz beobachten (vgl. 14.4.2).

Man unterscheidet zwischen lokaler und globaler Analysis. Im Mittelpunkt der *globalen Analysis* steht der Begriff der *Mannigfaltigkeit*, der ein zentraler Begriff der modernen Mathematik und Physik ist (vgl. Abschnitt 14.9 über die Geometrisierung der Physik). Ein einfaches Beispiel für eine Mannigfaltigkeit bietet die Erdoberfläche. Lokal kann man diese auf einer ebenen Landkarte darstellen. Die Erdoberfläche besitzt aber darüber hinaus globale Eigenschaften, die man den Landkarten nicht entnehmen kann.

[3]Existenzbeweise für unendlichdimensionale dynamische Systeme erfordern einen sehr aufwendigen analytischen Apparat – im Unterschied zum endlichdimensionalen Fall mit seinen durchsichtigen Existenzbeweisen für gewöhnliche Differentialgleichungen auf der Basis des Fixpunktsatzes von Banach (vgl. 12.1).

Es gibt physikalische Effekte, die von der globalen Struktur des Kosmos herrühren. Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie (Standardmodell des Urknalls) gibt es für den heutigen expandierenden Kosmos zwei Möglichkeiten:

(i) Das "gekrümmte Weltall" besitzt ein *endliches Volumen* (analog zu einer Sphäre (Abb. 10.1(a))). Dann zieht sich das Weltall nach vielen Millarden Jahren wieder auf einen heißen Feuerball zusammen (elliptische nichteuklidische Geometrie).



(a) expandierendes Weltall mit endlichem Volumen (Sphäre)

(b) expandierendes Weltall mit unendlichem Volumen (Pseudosphäre)

Abb. 10.1

(ii) Das "gekrümmte Weltall" besitzt ein *unendliches Volumen* (analog zu einer Pseudosphäre (Abb. 10.1(b)). Dann expandiert das Weltall bis in alle Ewigkeit. Am Ende steht ein absolut finsterer Kosmos, in dem möglicherweise auch die Protonen zerfallen sind (hyperbolische nichteuklidische Geometrie).

Favorisiert wird (ii) mit einer beschleunigten Expansion (vgl. 16.5).

Viele Physiker glauben, dass es Zusammenhänge zwischen der globalen Struktur des Kosmos und den Eigenschaften von Elementarteilchen geben muss, die in einer zukünftigen allgemeinen Theorie des Mikrokosmos und des Makrokosmos mathematisch zu formulieren sind.

Globale Eigenschaften werden in der Topologie studiert, die die allgemeinste Form der Geometrie darstellt und gleichzeitig die Formulierung des Grenzwertbegriffs gestattet (vgl. 11.2.1 und Kapitel 18).

10.1.2 Drei tiefe Sätze der Analysis

Drei der tiefsten Sätze der Analysis sind das *theorema egregium*[4] von Gauß, der allgemeine *Integralsatz von Stokes* für Differentialformen und der *Satz von Gauß–Bonnet–Chern*. Das soll jetzt diskutiert werden.

Das Theorema egregium von Gauß: Dieser Satz besagt, dass die Gaußsche Krümmung einer Fläche allein durch Messungen auf der Fläche bestimmt werden kann ohne Benutzung des sie umgebenden dreidimensionalen Raumes (vgl. 16.1.2).

Das bedeutet, dass "Krümmung" eine fundamentale *innere Eigenschaft* der Fläche (Mannigfaltigkeit) darstellt. Die dadurch angeregte Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffs auf beliebige Mannigfaltigkeiten, deren Definition frei ist von einem umgebenden Raum, bildet den Ausgangspunkt dafür, dass in der modernen Physik die fundamentalen Kräfte durch Krümmungen von Mannigfaltigkeiten beschrieben werden (vgl. 14.9 über die Geometrisierung der Physik).

[4] Die Bezeichnung stammt von Gauß selbst (das "vorzügliche Theorem"). Dieses Theorem veröffentlichte er 1827 in seiner Flächentheorie (Disquisitiones generales circa superficies curvas) im Anschluss an seine umfangreichen, physisch sehr anstrengenden Landvermessungsarbeiten von 1821 bis 1825 im Königreich Hannover.

Der allgemeine Integralsatz von Stokes: Es gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{10.1}$$

Diese prägnante Formel beinhaltet einen fundamentalen Zusammenhang zwischen Analysis und Topologie. Genauer stellt sie die Verbindung her zwischen den beiden topologischen Grundbegriffen „Homologie" (geometrische Struktur einer Mannigfaltigkeit) und „Kohomologie" (analytische Gebilde = Differentialformen auf der Mannigfaltigkeit).

Die Formel (10.1) verwandelt ein Integral über M in ein Randintegral (vgl. 10.2.7.5). Wir wollen zeigen, dass sich hinter (10.1) sehr viele wichtige Phänomene verbergen.

Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung: Der Prototyp für (10.1) ist die klassische Formel

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a), \tag{10.2}$$

die man den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung nennt. Vom geometrischen Standpunkt aus stellt (10.2) den Zusammenhang zwischen Tangente (Ableitung) und Flächeninhalt (Integral) her.

Klassischer Satz von Gauß und Erhaltungsgesetze der Physik: Im dreidimensionalen Raum entspricht (10.2) dem Integralsatz von Gauß

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{j}\,dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{j}n\,dF \tag{10.3}$$

mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$ am Rand $\partial\Omega$ des Gebiets Ω (Abb. 10.2) und $x = (x_1, x_2, x_3)$ sowie $dx = dx_1 dx_2 dx_3$.

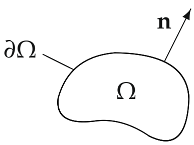


Abb. 10.2

Interpretiert man $\mathbf{j}$ als elektrischen Stromdichtevektor, dann beschreibt (10.3) die Bilanz zwischen der im Gebiet Ω vorhandenen Ladung und der über den Rand $\partial\Omega$ einströmenden Ladung. Tatsächlich ist (10.3) der Ausgangspunkt dafür, dass alle Gleichungen der Form

$$\varrho_t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \tag{10.4}$$

Erhaltungsgesetze der Physik beinhalten. Zum Beispiel entspricht (10.4) der Erhaltung der elektrischen Ladung, falls ϱ gleich der elektrischen Ladungsdichte und $\mathbf{j}$ gleich dem elektrischen Stromdichtevektor ist.

Die Formulierung von (10.2) für N-dimensionale Gebiete Ω lautet

$$\int_\Omega \partial_j f\,dx = \int_{\partial\Omega} f n_j\,dF, \qquad j = 1, \ldots, N, \tag{10.5}$$

wobei $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_N)$ den äußeren Einheitsnormalenvektor am Rand $\partial\Omega$ darstellt. Ferner ist $x = (x_1, \ldots, x_N)$ und $\partial_j f = \partial f / \partial x_j$.

Die Formel der partiellen Integration als Schlüssel zur modernen Theorie der partiellen Differentialgleichungen: Setzt man speziell $f = \varphi\psi$, dann erhält man aus (10.5) die Formel der partiellen Integration

$$\int_\Omega \varphi \partial_j \psi \, dx = -\int_\Omega \psi \partial_j \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi\psi n_j \, dF. \tag{10.6}$$

Diese Formel ist der Schlüssel zur Weiterentwicklung der klassischen Differentialrechnung und die Basis der modernen Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Erstens gestattet es diese Formel, verallgemeinerte Ableitungen für Funktionen zu definieren und damit Sobolevräume einzuführen (vgl. 11.2.6). Zweitens erlaubt es (10.6), mathematische Objekte einzuführen (verallgemeinerte Funktionen oder Distributionen), die stets beliebig oft differenzierbar sind (vgl. 10.4). Im Unterschied zum klassischen Differentialkalkül wird damit die *Differentiation* zu einer *universellen Operation*, die stets ausführbar ist.

Um zum Beispiel eine verallgemeinerte Lösung U der Differentialgleichung

$$-\Delta U = \varrho \tag{10.7}$$

auf dem dreidimensionalen Gebiet Ω zu definieren, multiplizieren wir diese Gleichung mit einer Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, d. h., φ ist glatt und verschwindet in einem Randstreifen von Ω. Zweimalige partielle Integration ergibt dann[5]

$$-\int_\Omega U\Delta\varphi \, dx = \int_\Omega \varrho\varphi \, dx \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{10.8}$$

Eine Funktion U heißt *verallgemeinerte* Lösung der klassischen Gleichung (10.7) genau dann, wenn die Integralidentität (10.8) erfüllt ist. Man beachte, dass in (10.8) überhaupt keine klassischen Ableitungen von U benötigt werden. Gleichung (10.7) beschreibt zum Beispiel das elektrostatische Potential U einer Ladungsdichte ϱ. Im Unterschied zur klassischen Theorie (10.7) sind in (10.8) auch unstetige Ladungsverteilungen ϱ erlaubt.

Man kann in diesem Rahmen noch einen weiteren entscheidenden Schritt tun, indem man mit dem gleichen Kalkül kontinuierliche und diskrete Ladungen einheitlich behandelt. Befindet sich beispielsweise im Punkt $x = 0$ eine elektrische Ladung der Stärke Q, dann benutzen die Physiker seit den dreißiger Jahren die sogenannte Diracsche Deltafunktion $\delta(x)$, d. h., sie verwenden formal die Ladungsdichte

$$„\varrho(x) = Q\delta(x)“. \tag{D}$$

Tatsächlich ist δ keine klassische Funktion, sondern eine Distribution (verallgemeinerte Funktion). In der von Laurent Schwartz um 1950 geschaffenen Theorie der Distributionen lautet das (D) entsprechende verallgemeinerte Problem zur Ausgangsgleichung (10.7) folgendermaßen:

$$-\int_\Omega U\Delta\varphi \, dx = Q\varphi(0) \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{10.9}$$

Hinter dieser Formel verbirgt sich folgende physikalische Intuition. Aus der Regel „Integration der Dichte = Ladung“ erhalten wir

$$„\int_\Omega \delta(x) \, dx = 1“.$$

[5] Summieren wir über j von 1 bis 3, dann gilt explizit

$$\int_\Omega \varrho\varphi \, dx = \int_\Omega (-\Delta U)\varphi \, dx = \int_\Omega (-\partial_j^2 U)\varphi \, dx = \int_\Omega \partial_j U \partial_j \varphi \, dx = \int_\Omega U(-\partial_j^2 \varphi) \, dx.$$

Bei der partiellen Integration verschwinden alle Randintegrale, weil die Testfunktionen φ in einem Randstreifen gleich null sind.

Da sich in den Punkten $x \neq 0$ keine Ladungen befinden, muss die Dichte dort verschwinden, d. h., es ist $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$. Daraus folgt formal

$$\int_\Omega \varrho\varphi \, \mathrm{d}x \equiv \int_\Omega Q\delta(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x = Q\varphi(0) \int_\Omega \delta(x) \, \mathrm{d}x = Q\varphi(0).$$

In diesem Sinne ergibt sich (10.9) aus (10.8) mit $\varrho = Q\delta$.

Diese Methode der Formulierung verallgemeinerter Lösungen lässt sich auf alle linearen Differentialgleichungen und große Klassen nichtlinearer Differentialgleichungen der Naturwissenschaften anwenden.

Klassische Greensche Formeln: Auch die in der Elektrodynamik häufig benutzten beiden Greenschen Formeln

$$\int_\Omega \psi\Delta\varphi \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \mathbf{grad}\,\varphi\, \mathbf{grad}\,\psi \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, \mathrm{d}F, \tag{10.10}$$

$$\int_\Omega \psi\Delta\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi\Delta\psi \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) \mathrm{d}F \tag{10.11}$$

ergeben sich sofort aus (10.6) durch einmalige bzw. zweimalige partielle Integration und lassen sich auf beliebige lineare partielle Differentialoperatoren verallgemeinern.

Der klassische Satz von Stokes: Für Flächen M im dreidimensionalen Raum erhält man aus (10.1) den klassischen Satz von Stokes

$$\int_M \mathbf{rot}\,\mathbf{v} \, \mathrm{d}F = \int_{\partial M} \mathbf{v} \, \mathrm{d}x, \tag{10.12}$$

der zum Beispiel die Wirbelbildung in einer Flüssigkeit mit dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ beschreibt.

Die Maxwellschen Gleichungen: Die Vektoroperationen „div" und „**rot**" erlauben eine elegante Formulierung der *Maxwellschen Gleichungen* für das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und das magnetische Feld $\mathbf{H}$ im Vakuum bei Anwesenheit von elektrischen Ladungen und Strömen:[6]

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{E} &= \varrho, \qquad & \mathbf{rot}\,\mathbf{E} &= -\mathbf{H}_t, \\ \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0, \qquad & \mathbf{rot}\,\mathbf{H} &= \mathbf{j} + \mathbf{E}_t \end{aligned} \tag{10.13}$$

(ϱ = elektrische Ladungsdichte, $\mathbf{j}$ = elektrischer Stromdichtevektor). Anschaulich beinhalten diese Gleichungen Aussagen über die Quellen und Wirbel des elektrischen und magnetischen Feldes. Beispielsweise ist der in „$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\mathbf{H}_t$" auftretende Term $-\mathbf{H}_t$ verantwortlich für die Existenz elektromagnetischer Wellen (Licht, Radiowellen). Tatsächlich wurde dieser Term von Maxwell (1831-1879) bei der Formulierung seiner Grundgleichungen im Jahre 1864 hinzugefügt, um die Existenz elektromagnetischer Wellen vorhersagen zu können, die erst 1888 von Heinrich Hertz (1857-1894) experimentell nachgewiesen wurden.

Eine noch elegantere Formulierung der Maxwellschen Gleichungen in der Sprache der Differentialformen: Die wenigen, wundervollen Gleichungen (10.13) beherrschen alle klassischen elektrodynamischen Effekte. Trotzdem ist die Sprache der Vektoranalysis noch nicht vollkommen, weil die Gleichungen (10.13) eine grundlegende Symmetrieeigenschaft besitzen, die man ihnen in der vorliegenden Form in keiner Weise ansieht. Während Einstein beim Aufbau seiner speziellen Relativitätstheorie im Jahre 1905 die klassische Mechanik grundlegend revidieren musste, war das für die Elektrodynamik nicht nötig, weil die Maxwellschen Gleichungen gegenüber

[6] Die Gleichungen (10.13) beziehen sich auf ein Maßsystem, in dem die Lichtgeschwindigkeit c und die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ε_0 gleich eins sind.

Lorenztransformationen invariant sind (Wechsel von Raum- und Zeitkoordinaten beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen Inertialsystem). Eine Formulierung, die diese relativistische Invarianz ausdrückt und gleichzeitig die Form der Maxwellschen Gleichungen in beliebigen Bezugssystemen angibt, lautet in der Sprache der Differentialformen

$$\mathrm{d}F = 0, \qquad -\delta F = J. \tag{10.14}$$

Hierbei entspricht die 2-Form F dem elektromagnetischen Feld $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, und die 1-Form J korrespondiert zu den Ladungen und Strömen $\varrho, \mathbf{j}$. Die Differentiationsoperatoren d und δ besitzen die Eigenschaft

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 &= 0 \qquad \text{(de Rham Kohomologie)}, \\ \delta^2 &= 0 \qquad \text{(Weyl–Hodge Homologie)}. \end{aligned} \tag{10.15}$$

Wenden wir δ auf (10.14) an, dann erhalten wir $-\delta^2 F = \delta J$, also

$$\delta J = 0 \qquad \text{(Erhaltung der elektrischen Ladung)}.$$

Ferner besitzt die Gleichung $F = \mathrm{d}A$ wegen $\mathrm{d}F = 0$ und der trivialen Kohomologie des $\mathbb{R}^4$ (Lemma von Poincaré) eine Lösung A. Dabei entspricht A dem sogenannten Viererpotential. Die Einzelheiten findet man in 10.2.9. Wir erwähnen an dieser Stelle nur, dass das Viererpotential den Schlüssel zur modernen Eichfeldtheorie der Elementarteilchenphysik darstellt. Dabei ergeben sich verallgemeinerte Maxwellsche Gleichungen, bei denen die Komponenten des Viererpotentials Matrizen sind (d. h., sie gehören einer Liealgebra an). In der Sprache der modernen Differentialgeometrie gilt grob gesprochen

$$\begin{aligned} \text{Viererpotential } A &= \text{Zusammenhang eines Hauptfaserbündels } \mathbb{H}, \\ \text{Feld } F &= \text{Krümmung von } \mathbb{H}. \end{aligned}$$

In der Sprache der Differentialtopologie enthalten die Maxwellschen Gleichungen die mathematischen Phänomene „Homologie” und „Kohomologie” und spiegeln deren Dualität wider.

Der Satz von Gauß–Bonnet–Chern:[7] Für eine $2n$-dimensionale orientierte kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit gilt

$$\int_M \gamma = \chi(M). \tag{10.16}$$

Die einfachste Variante dieses Satzes in der klassischen Flächentheorie besagt, dass die Relation

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K \, \mathrm{d}F = \chi(M) \tag{10.17}$$

gültig ist, wobei K die Gaußsche Krümmung (vgl. 4.3.3.3.) und $\chi(M)$ die sogenannte *Eulerzahl* der geschlossenen Fläche M im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Für eine Sphäre vom Radius r ist beispielsweise $K = 1/r^2$ und $\chi(M) = 2$. Für den Torus hat man $\chi(M) = 0$. Die Bedeutung der Formel (10.17) besteht darin, dass eine analytische Größe (die Gaußsche Krümmung K aus dem theorema egregium) mit einer rein topologischen Invarianten (der Eulerzahl $\chi(M)$) verbunden wird. Die Eulerzahl $\chi(M)$ hat ihren anschaulichen Ursprung in der Eulerschen Polyederformel. Trianguliert man die Fläche M in (10.17), dann gilt

$$\chi(M) = \text{Anzahl der Eckpunkte} - \text{Anzahl der Kanten} + \text{Anzahl der Dreiecke}.$$

[7] Der klassische Satz von Gauß–Bonnet–Dyck für Flächen wurde **1944** von Chern in einer tiefsinnigen Arbeit auf höhere Dimensionen verallgemeinert. Das war ein Markstein in der Entwicklung der modernen Mathematik. Tatsächlich erfordert der Beweis dieses Satzes, d. h. die Konstruktion der Differentialform γ im Integranden, sehr abstrakte Überlegungen, die typisch für die moderne Geometrie sind (Theorie der charakteristischen Klassen).

Die Zahl $\chi(M)$ ist dabei von der gewählten Triangulierung unabhängig und stellt eine topologische Invariante dar, d. h., bei topologischen Transformationen von M ändert sich $\chi(M)$ nicht. Topologische Transformationen entstehen anschaulich dadurch, dass man sich die Fläche aus Gummi bestehend vorstellt und den Gummi beliebig verbiegt, ohne ihn zu zerreissen.[8]

Die Differentialform γ repräsentiert eine sogenannte *charakteristische Klasse* (die *Eulerklasse* im Rahmen der de Rhamschen Kohomologie). Die Theorie der charakteristischen Klassen stellt eine der tiefsten mathematischen Erkenntnisse zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Analysis und Topologie dar. Zum echten Verständnis der Theorie der charakteristischen Klassen benötigt man Vektorbündel über der Basismannigfaltigkeit M. Diese Vektorbündel entstehen anschaulich dadurch, dass man in jedem Punkt E von M (z. B. eine Kurve oder Fläche) einen linearen Raum $\mathbb{L}_E$ anheftet, so dass die Räume $\mathbb{L}_E$ (die man Fasern nennt) in „glatter Weise” von den Punkten E abhängen. Abb. 10.3(a) zeigt einen Zylindermantel, den man als Vektorbündel auffassen kann. An jeden Punkt E der Basismannigfaltigkeit M (Kreislinie) wird eine Gerade $\mathbb{L}_E$ angeheftet (die „Mantellinie” des Zylinders) (vgl. Kapitel 19).

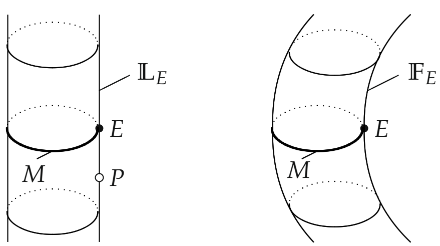
Mannigfaltigkeiten und Faserbündel in der Physik: Vom physikalischen Standpunkt aus sind *Mannigfaltigkeiten* und *Vektorbündel* (oder allgemeinere Faserbündel) sehr natürliche Objekte, was die folgende allgemeine Überlegung zeigen soll.[9]

(a) Um physikalische Prozesse in Raum und Zeit zu beschreiben, benötigt man Bezugssysteme. In jedem Bezugssystem messen die Beobachter Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 und eine Zeitkoordinate $x_4 = t$.

(b) Verschiedene Beobachter (z. B. auf der Erde und in einer fernen Galaxie) müssen ihre unterschiedlichen Koordinaten $x_1, \ldots, x_4$ ineinander umrechnen, um Informationen über Beobachtungen im Weltall austauschen zu können.

(c) Die physikalischen Prozesse besitzen einen „absoluten Charakter”, d. h., sie finden auch ohne Fixierung eines Bezugssystems statt. Eine „absolute Größe” ist dabei ein „Ereignis” E, dem in verschiedenen Bezugssystemen unterschiedliche Raum- und Zeitkoordinaten entsprechen.

Das natürliche globale mathematische Objekt zur Beschreibung dieser Situation ist eine *Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit* M, die aus der Menge aller Ereignisse E besteht. Bei Wahl einer geeigneten Karte (Bezugssystem) werden dem „Punkt” E lokale Koordinaten zugeordnet, die bei Kartenwechsel ineinander umgerechnet werden können (wie bei Landkarten auf der Erde).



(a) Vektorbündel (b) Faserbündel Abb. 10.3

(d) Physikalische Felder $\Phi = \Phi(E)$ sind Objekte (z. B. Tensoren oder Spinoren), die von Raum und Zeit, genauer von dem Ereignis E abhängen. Alle möglichen Feldwerte zu einem Ereignis E

[8] Genauer sind topologische Transformationen bijektive (eineindeutige) Abbildungen, die zusammen mit ihrer inversen Abbildung stetig sind.

[9] In Abb. 10.3(a) stellt die Kreislinie M die „Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit” dar. Die „Ereignisse” E sind die Punkte der Kreislinie M. Den lokalen „Raum-Zeit-Koordinaten” entsprechen in diesem Bilde unterschiedliche lokale Koordinaten der Kreislinie M (z. B. unterschiedliche Parametrisierungen durch einen Winkel φ). Ein Punkt P der Mantellinie $\mathbb{L}_E$ korrespondiert zur „Stärke eines physikalischen Feldes” in dem Raum-Zeitpunkt E.

bilden einen linearen Raum $\mathbb{L}_E$, den man sich im Punkt E an die Mannigfaltigkeit M angeheftet denken kann. Das ergibt ein *Vektorbündel*.

Heftet man nichtlineare Objekte $\mathbb{F}_E$ (Fasern) an jeden Punkt einer Basismannigfaltigkeit M, dann entstehen sogenannte *Faserbündel* (Abb. 10.3(b)). In dem wichtigen Spezialfall

$$\text{Faser } \mathbb{F}_E \ = \ \text{Liegruppe (Symmetrie)}$$

ergeben sich sogenannte *Hauptfaserbündel*, die für ein tieferes mathematisches Verständnis der Eichfeldtheorien der modernen Elementarteilchentheorie erforderlich sind und die vorhandenen physikalischen Symmetrien mathematisch reflektieren (vgl. 14.8).

Topologische Ladungen: Die Formel (10.16) beschreibt eine sogenannte „topologische Ladung" oder „topologische Quantenzahl". Charakteristisch für die Elementarteilchenphysik sind Quantenzahlen (Hyperladung, Isospin, Seltsamkeit, Charm[10] usw.). Es ist erstaunlich, dass bei der Vielgestaltigkeit der Formen in der Welt Quantenprozesse durch *ganze Zahlen* wesentlich bestimmt werden.

In der Topologie ordnen die Mathematiker den Objekten ebenfalls ganze Zahlen (topologische Invarianten) zu, die bei „vernünftigen" Gestaltänderungen (topologischen „Gummitransformationen") fest bleiben (z. B. die Bettischen Zahlen, die Eulerzahl oder der Abbildungsgrad). Es gibt zahlreiche Hinweise darauf, dass hier ein tiefer Zusammenhang zwischen Topologie und Quantentheorie besteht, der jedoch bisher nur in Ansätzen erkannt worden ist. Zum Beispiel möchte man verstehen, warum elektrische Ladungen nur als Vielfache einer Elementarladung auftreten. Die Eichfeldtheorie sagt die Existenz magnetischer Monopole voraus, deren magnetische Ladung tatsächlich eine topologische Invariante ist.

In den folgenden Kapiteln wird der wesentliche Inhalt der Tabellen 10.1 und 10.2 so behandelt, dass ein breiter Leserkreis die mathematische Grundsubstanz verstehen kann. Eine ausführliche Darstellung mit gründlichen physikalischen Motivationen und vielen Anwendungen findet man in [Zeidler 1984ff, Vols. 1–4].

10.1.3 Glattheit

In der modernen Analysis spielen glatte Funktionen eine besondere Rolle. Die Basisstrategie besteht darin, allgemeine (nichtglatte) Situationen durch glatte Situationen zu approximieren. Wir vereinbaren die folgende Terminologie. Es bezeichne Ω eine nichtleere offene Menge des $\mathbb{R}^n$, und $\overline{\Omega}$ bezeichne den Abschluss von Ω, d. h., $\overline{\Omega}$ entsteht aus Ω durch Hinzufügen des Randes $\partial\Omega$.

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gehört definitionsgemäß zur Klasse $C^k(\Omega)$ genau dann, wenn f stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung k besitzt. Speziell für $k = 0$ schreiben wir $C(\Omega)$, d. h., die Funktionen aus $C(\Omega)$ sind stetig auf Ω.

Die stetige Funktion $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ gehört zur Klasse $C^k(\overline{\Omega})$ genau dann, wenn f zur Klasse $C^k(\Omega)$ gehört und sich alle partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung k stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen lassen.

Die Funktion f gehört zur Klasse $C^\infty(\Omega)$ genau dann, wenn sie auf Ω stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung hat.

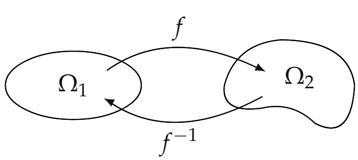


Abb. 10.4

[10] Diese Quantenzahlen ergeben sich aus der Darstellungstheorie der Liealgebra $su(N)$ (vgl. Kapitel 17).

Ferner gehört f zur Klasse der sogenannten Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)$ genau dann, wenn f zu $C^\infty(\Omega)$ gehört und außerhalb einer kompakten Teilmenge von Ω gleich null ist.

Sind Ω_1 und Ω_2 Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, dann heißt eine Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ ein *Homöomorphismus* genau dann, wenn f bijektiv (eineindeutig) ist und sowohl f als auch die inverse Abbildung $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ stetig sind (Abb. 10.4).

Ein Homöomorphismus heißt ein C^k-*Diffeomorphismus* genau dann, wenn f und f^{-1} der Klasse C^k angehören.[11]

Es sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Tupel von nichtnegativen ganzen Zahlen. Wir setzen[12] $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ und definieren durch

$$\partial^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial^{\alpha_1}\xi_1 \partial^{\alpha_2}\xi_2 \cdots \partial^{\alpha_n}\xi_n}$$

eine beliebige partielle Ableitung $\partial^\alpha u$ von u der Ordnung $|\alpha|$. Dabei ist $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

10.2 Tensoranalysis, Differentialformen und mehrfache Integrale

Viele physikalische und geometrische Größen haben einerseits eine vom gewählten Koordinatensystem unabhängige Bedeutung, andererseits kann man ihnen in jedem Koordinatensystem gewisse Maßzahlen zuordnen, die sich beim Wechsel der Koordinatensysteme ändern (z. B. die Komponenten des elektromagnetischen Feldes). In der Physik entspricht der Wechsel von Koordinatensystemen dem Wechsel von Beobachtungssystemen. Die Tensoranalysis untersucht das Transformationsverhalten einer Klasse wichtiger Größen. Dadurch ist es möglich, physikalische Gleichungen in einer solchen Form aufzuschreiben, dass sie in jedem Koordinatensystem gültig sind.

Die folgenden Betrachtungen lassen sich sofort auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Das geschieht in Kapitel 15. Dort werden wir auch zeigen, wie sich ein invarianter Tensorkalkül auf Mannigfaltigkeiten aufbauen lässt, der keinerlei Koordinaten benutzt. Es ist nützlich, dass man sowohl die im vorliegenden Abschnitt benutzte Sprache der Koordinaten als auch die in Kapitel 15 verwendete invariante Sprache beherrscht. Physiker ziehen die Koordinatensprache vor, während Mathematiker gern invariant arbeiten. Der invariante Kalkül hat den Vorteil, dass er sich auch auf unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten verallgemeinern lässt, die physikalische Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden beschreiben.

Physikalische Anwendungen des Tensorkalküls beziehen sich z. B. auf die spezielle Relativitätstheorie und die Maxwellsche Theorie des Elektromagnetismus (vgl. 10.2.8 ff), die Thermodynamik (vgl. 15.5), die symplektische Geometrie und klassische Mechanik (vgl. 15.6) sowie die Riemannsche Geometrie und allgemeine Relativitätstheorie (vgl. 16.5).

Einen Spezialfall der Tensoranalysis stellt der Cartansche Kalkül der Differentialformen dar, der wegen seiner Geschmeidigkeit und Eleganz ein fundamentales Instrument der modernen Analysis, Differentialgeometrie und Physik darstellt.

Einsteinsche Summenkonvention: Um das häufig auftretende Summationssymbol einzusparen, vereinbaren wir, über gleiche obere und untere Indizes von 1 bis n zu summieren:

$$a_j b^j = \sum_{j=1}^n a_j b^j, \qquad a_j^j = \sum_{j=1}^n a_j^j, \qquad a_{km}^j b_r^{km} = \sum_{k,m=1}^n a_{km}^j b_r^{km}.$$

In $\dfrac{\partial x^k}{\partial x^m}$ zählt k als oberer und m als unterer Index.

[11] Genauer müssen wir voraussetzen, dass $f \in C^k(\Omega_1)$ und $f^{-1} \in C^k(\Omega_2)$ gilt, wobei Ω_1 und Ω_2 offen sind.

[12] Das Symbol „:=" beschreibt die Definition einer Größe. Im vorliegenden Fall wird $|\alpha|$ als Abkürzung für $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ eingeführt.