Eberhard Zeidler *Hrsg.*

Springer-Handbuch der Mathematik I

Begründet von I. N. Bronstein
und K. A. Semendjaew

Weitergeführt von G. Grosche,
V. Ziegler und D. Ziegler

Herausgegeben von E. Zeidler

Springer Spektrum

Springer-Handbuch der Mathematik I

Herausgeber und Autor:
Prof. Dr. Eberhard Zeidler, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, Deutschland

Springer-Handbuch der Mathematik I

Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew
Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler
Herausgegeben von E. Zeidler

Springer Spektrum

Herausgeber
Prof. Dr. Eberhard Zeidler
Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften
Leipzig
Deutschland

ISBN 978-3-658-00284-8 ISBN 978-3-658-00285-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-00285-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Der Verlag und die Autoren haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck.

Springer Spektrum
© Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.
Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Theoria cum praxi

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Die Mathematik spielt eine wichtige Rolle in vielen Bereichen unserer modernen Gesellschaft. Sie ist eine Querschnittswissenschaft und zugleich eine Schlüsseltechnologie mit vielfältigen engen Verbindungen zu anderen Wissenschaften. Das betrifft die Naturwissenschaften, die Ingenieurwissenschaften, die Informatik und Informationstechnologie, die Wirtschafts- und Finanzwissenschaft, die Sozialwissenschaften sowie die Medizin. Mathematik ist abstrakt und zugleich sehr praktisch. Das vorliegende

SPRINGER-HANDBUCH DER MATHEMATIK,

das sich um einen breit angelegten Brückenschlag zwischen der Mathematik und ihren Anwendungen bemüht, stellt eine wesentliche Erweiterung des SPRINGER-TASCHENBUCHES DER MATHEMATIK dar, das 2012 im Verlag Springer Spektrum erschienen ist. Das Springer-Handbuch umfasst die folgenden vier Teile:

- TEIL I: Analysis.
- TEIL II: Algebra, Geometrie, Grundlagen der Mathematik.
- TEIL III: Variationsrechnung und Physik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Numerik und Wissenschaftliches Rechnen, Wirtschafts- und Finanzmathematik, Algorithmik und Informatik.
- TEIL IV: Funktionalanalysis, Dynamische Systeme, Mannigfaltigkeiten, Topologie, Mathematische Physik.

Als mehrbändiges Nachschlagewerk ist das Springer-Handbuch in erster Linie für wissenschaftliche Bibliotheken gedacht, die ihren Leserinnen und Lesern parallel zum Springer-Taschenbuch der Mathematik das umfangreichere Material des Springer-Handbuches (in elektronischer Form und Papierform) zur Verfügung stellen wollen. Für individuell interessierte Leserinnen und Leser sei auf folgendes hingewiesen. Die Teile I bis III des Springer-Handbuches der Mathematik enthalten die entsprechenden Kapitel des Springer-Taschenbuches der Mathematik, die durch wichtiges zusätzliches Material ergänzt werden. Dagegen sind die neun Kapitel von Teil IV nicht im Springer-Taschenbuch der Mathematik enthalten.

Teil I enthält neben dem einführenden Kapitel und dem Kapitel 1 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zur höheren komplexen Funktionentheorie und zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Teil II enthält neben den Kapiteln 2–4 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zu folgenden Gebieten: multilineare Algebra, höhere Zahlentheorie, projektive Geometrie, algebraische Geometrie und Geometrien der modernen Physik.

Teil III enthält neben den Kapiteln 5–9 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zu stochastischen Prozessen.

Teil IV enthält die folgenden Zusatzkapitel zum Springer-Taschenbuch der Mathematik:

– Kapitel 10: Höhere Analysis (Tensoranalysis und spezielle Relativitätstheorie, Integralgleichungen, Distributionen und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, moderne Maß- und Integrationstheorie).
– Kapitel 11: Lineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen.
– Kapitel 12: Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen.
– Kapitel 13: Dynamische Systeme – Mathematik der Zeit.
– Kapitel 14: Nichtlineare partielle Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften.
– Kapitel 15: Mannigfaltigkeiten.
– Kapitel 16: Riemannsche Geometrie und allgemeine Relativitätstheorie.
– Kapitel 17: Liegruppen, Liealgebren und Elementarteilchen - Mathematik der Symmetrie.
– Kapitel 18: Topologie - Mathematik des qualitativen Verhaltens.
– Kapitel 19: Krümmung, Topologie und Analysis (Eichheorie in Mathematik und Physik).

Hier werden im Rahmen der mathematischen Physik die Bedürfnisse der modernen Physik berücksichtigt. Am Ende von Teil IV findet man eine Tafel zur Geschichte der Mathematik. Die sorgfältig zusammengestellten Literaturangaben am Ende jedes Kapitels sollen dem Leser helfen, bei auftretenden Fragen geeignete moderne Bücher zu konsultieren, wobei zwischen einführender Literatur und anspruchsvollen Standardwerken gewählt werden kann.

Das vorliegende Springer-Handbuch der Mathematik wendet sich an:

– Fortgeschrittene Studierende der Mathematik und angrenzender naturwissenschaftlicher, technischer, wirtschaftswissenschaftlicher Fachrichtungen, Graduierte, Doktoranden
– Mathematiker, Physiker, Ingenieure, Informatiker, Wirtschaftsmathematiker in Forschung, Lehre und Praxis
– wissenschaftliche Bibliotheken, akademische Institutionen und Firmen.

Die Bedürfnisse eines derart breiten Leserkreises werden berücksichtigt, indem der Bogen von elementaren Kenntnissen bis hin zu anspruchsvollen mathematischen Resultaten sehr weit gespannt wird und das Werk ein breites Spektrum mathematischer Gebiete überdeckt. Großer Wert wird dabei auf folgende Aspekte gelegt:

– ausführliche Motivation und Erläuterung der Grundideen,
– leichte Fasslichkeit, Anschaulichkeit, und Übersichtlichkeit,
– die Verbindung zwischen reiner und angewandter Mathematik,
– vielseitige Anwendungen der Mathematik und Praxisnähe, sowie
– die Diskussion des historischen Hintergrunds.

Es wird gezeigt, dass die Mathematik mehr ist als eine trockene Ansammlung von Formeln, Definitionen, Theoremen und Rechenrezepten. Sie ist ein unverzichtbarer Partner der modernen Technik, und sie hilft wesentlich bei der optimalen Gestaltung von Industrie- und Wirtschaftsprozessen. Gleichzeitig ist die Mathematik ein wichtiger Bestandteil unserer menschlichen Kultur und ein wundervolles Erkenntnisorgan des Menschen, das ihn etwa in der Hochtechnologie, der Elementarteilchenphysik und der Kosmologie in Bereiche vorstoßen lässt, die ohne Mathematik nicht zu verstehen sind, weil sie von unserer täglichen Erfahrungswelt extrem weit entfernt sind.

Während das Springer-Taschenbuch der Mathematik den Anforderungen des Bachelor-Studiums angepasst ist, bezieht sich das Springer-Handbuch der Mathematik sowohl auf das Bachelor-Studium als auch auf das weiterführende Master-Studium.

Bei den Anwendungen der Mathematik spielen Phänomene eine große Rolle, die in Natur und Technik auftreten. Das mathematische Verständnis dieser Phänomene erleichtert dem Anwender in den Naturwissenschaften und in den Ingenieurwissenschaften den Überblick über die Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen mathematischen Disziplinen. Deshalb wird in diesem Springer-Handbuch der Mathematik die Sicht auf wichtige Phänomene besonders betont. Das betrifft:

- Mathematik der Grenzübergänge (Analysis und Funktionalanalysis),
- Mathematik des Optimalen (Variationsrechnung, optimale Steuerung, lineare und nichtlineare Optimierung),
- Mathematik des Zufalls (Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und stochastische Prozesse),
- Mathematik der Zeit und des Chaos (dynamische Systeme),
- Mathematik der Stabilität von Gleichgewichtszuständen in Natur und Technik, von zeitabhängigen Prozessen und von Algorithmen auf Computern,
- Mathematik der Komplexität von Algorithmen auf Computern,
- Mathematik der Symmetrie (Gruppentheorie),
- Mathematik der Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden (Funktionalanalysis),
- Mathematik des qualitativen Verhaltens von Gleichgewichtszuständen und zeitabhängigen Prozessen in Natur und Technik (Topologie),
- Mathematik der Wechselwirkungskräfte in der Natur (nichtlineare partielle Differentialgleichungen und nichtlineare Funktionalanalysis, Differentialgeometrie der Faserbündel und Eichtheorie),
- Mathematik der Strukturen (Kategorientheorie).

Interessant ist die Tatsache, dass klassische Ergebnisse der Mathematik heutzutage im Rahmen neuer Technologien völlig neue Anwendungen erlauben. Das betrifft etwa die Zahlentheorie, die lange Zeit als ein reines Vergnügen des menschlichen Geistes galt. Beispielsweise wird die berühmte Riemannsche Zetafunktion der analytischen Zahlentheorie, die in Kapitel 2 betrachtet wird, in der modernen Quantenfeldtheorie zur Berechnung von Streuprozessen von Elementarteilchen im Rahmen der Renormierungstheorie eingesetzt. Der klassische Satz von Fermat–Euler über Teilbarkeitseigenschaften von Zahlen wird heute wesentlich benutzt, um die Übermittlung von Nachrichten in raffinierter Weise zu verschlüsseln. Das findet man ebenfalls in Kapitel 2.

Das „Springer-Handbuch der Mathematik" knüpft an eine lange Tradition an. Das „Taschenbuch der Mathematik" von I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew wurde von Dr. Viktor Ziegler aus dem Russischen ins Deutsche übersetzt. Es erschien 1958 im Verlag B. G. Teubner in Leipzig, und bis zum Jahre 1978 lagen bereits 18 Auflagen vor. Unter der Herausgabe von Dr. Günter Grosche und Dr. Viktor Ziegler und unter wesentlicher redaktioneller Mitarbeit von Frau Dorothea Ziegler erschien 1979 die völlig überarbeitete 19. Auflage, an der Wissenschaftler der Leipziger Universität und anderer Hochschulen des mitteldeutschen Raumes mitwirkten.[1] Diese Neubearbeitung wurde ins Russische übersetzt und erschien 1981 im Verlag für Technisch-Theoretische Literatur in Moskau. Ferner wurden eine englische und eine japanische Übersetzung publiziert.

Motiviert durch die stürmische Entwicklung der Mathematik und ihrer Anwendungen erschien in den Jahren 1995 und 1996 ein völlig neuverfasstes, zweibändiges „Teubner-Taschenbuch der Mathematik" im Verlag B. G. Teubner, Stuttgart und Leipzig.[2] Das daraus entstandene, vorliegende „Springer-Handbuch der Mathematik" enthält zwei völlig neu geschriebene Kapitel über Wirtschafts-und Finanzmathematik sowie über Algorithmik und Informatik.

[1] Bis 1995 erschienen sieben weitere Auflagen.

[2] Die englische Übersetzung des ersten Bandes erschien 2003 im Verlag Oxford University Press, New York, als „Oxford Users' Guide to Mathematics".

Die moderne Konzeption und Koordination des Kapitels 8 über Wirtschafts-und Finanzmathematik lag in den erfahrenen Händen von Herrn Prof. Dr. Bernd Luderer (TU Chemnitz). In das von Herrn Prof. Dr. Juraj Hromkovič (ETH Zürich) verfasste Kapitel 9 über Algorithmik und Informatik flossen seine reichen Lehrerfahrungen ein. Im Mittelpunkt steht das zentrale Problem der Komplexität von Algorithmen. Erinnert sei daran, dass eines der berühmten sieben Milleniumsprobleme der Mathematik aus dem Jahre 2000 eine tiefe Frage der Komplexitätstheorie betrifft. Das Kapitel 7 über Numerik und Wissenschaftliches Rechnen wurde von Herrn Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch (Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig) wesentlich überarbeitet, und die übrigen Kapitel wurden aktualisiert. Der Herausgeber möchte den Kollegen Hackbusch, Hromkovič und Luderer sowie allen seinen Koautoren für ihre engagierte Arbeit sehr herzlich danken. Das betrifft:

- Prof. Dr. Hans-Rudolf Schwarz (7.1–7.6) und
  Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch (7.7),
- Prof. Dr. Bernd Luderer (8.1, 8.13),
  Prof. Dr. Jochen Blath (8.2, 8.3),
  Prof. Dr. Alexander Schied (8.4, 8.5),
  Prof. Dr. Stephan Dempe (8.6–8.10) und
  Prof. Dr. Gert Wanka (8.11, 8.12),
- Prof. Dr. Juraj Hromkovič (9.1– 9.9) und
  Prof. Dr. Siegfried Gottwald (9.10).

Ein herzliches Dankeschön geht auch an Frau Micaela Krieger-Hauwede für das sorgfältige Anfertigen vieler Abbildungen in den Teilen I bis III, das Lesen der Korrekturen und die einfühlsame, ästhetisch gelungene Textgestaltung. Frau Kerstin Fölting danke ich sehr herzlich für das sorgfältige Anfertigen der Abbildungen und der LaTeX-Version von Teil IV sowie für zahlreiche Hinweise zur Verbesserung der Darstellung. Den Mitarbeitern des Leipziger Max-Planck-Institutes für Mathematik in den Naturwissenschaften, Regine Lübke (Sekretariat), Katarzyna Baier und Ingo Brüggemann (Bibliothek), Oliver Heller und Rainer Kleinrensing (EDV-Abteilung) sei sehr herzlich für die technische Unterstützung bei der Fertigstellung des Springer-Handbuches der Mathematik gedankt. Ferner danke ich sehr herzlich Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch vom Verlag Springer Spektrum für die Koordination des gesamten Projekts und für die kompetente Aktualisierung des Literaturverzeichnisses. Schließlich sei allen Leserinnen und Lesern gedankt, die in der Vergangenheit durch ihre Hinweise zur Verbesserung der Darstellung beigetragen haben.

Alle Beteiligten hoffen, dass dieses Nachschlagewerk in allen Phasen des Studiums und danach im Berufsleben ein nützlicher Begleiter sein wird, der die Einheit der Mathematik betont.

Leipzig, im Sommer 2012 Der Herausgeber

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die größten Mathematiker, wie Archimedes, Newton und Gauß, haben stets Theorie und Anwendung in gleicher Weise miteinander vereint.

Felix Klein (1849–1925)

Die Mathematik besitzt eine über 6000 Jahre alte Geschichte.[1] Sie stellt das mächtigste Instrument des menschlichen Geistes dar, um die Naturgesetze präzis zu formulieren. Auf diesem Weg eröffnet sich die Möglichkeit, in die Geheimnisse der Welt der Elementarteilchen und in die unvorstellbaren Weiten des Universiums vorzudringen. Zentrale Gebiete der Mathematik sind

– Algebra,
– Geometrie und
– Analysis.

Die Algebra beschäftigte sich in ihrer ursprünglichen Form mit dem Lösen von Gleichungen. Keilschrifttexte aus der Zeit des Königs Hammurapi (18. Jh. v. Chr.) belegen, dass das mathematische Denken der Babylonier zur Lösung praktischer Aufgaben stark algebraische Züge trug. Dagegen war das mathematische Denken im antiken Griechenland, das im Erscheinen der axiomatisch verfassten „Elemente“ des Euklid (300 v. Chr.) gipfelte, von der Geometrie geprägt. Das analytische Denken, das auf dem Begriff des Grenzwerts basiert, wurde erst im siebzehnten Jahrhundert mit der Schaffung der Differential- und Integralrechnung durch Newton und Leibniz systematisch entwickelt.

Danach setzte eine explosionsartige Entwicklung der Mathematik ein, um den neuen Kalkül auf die Himmelsmechanik, die Hydrodynamik, die Elastizitätstheorie, die Thermodynamik/statistische Physik, die Gasdynamik und den Elektromagnetismus anzuwenden. Dieser Prozess bestimmte das achtzehnte und neunzehnte Jahrhundert. Im zwanzigsten Jahrhundert wurde die Physik revolutioniert: Das betraf Plancks Quantenphysik (Plancksches Strahlungsgesetz), Einsteins spezielle Relativitätstheorie (Einheit von Raum und Zeit) und Einsteins allgemeine Relativitätstheorie (Gravitationstheorie und Kosmologie), Heisenbergs und Schrödingers nichtrelativistische Quantenmechanik, Diracs relativistische Quantenmechanik und die Quantenfeldtheorie. Das gipfelte in der Schaffung des Standardmodells der Elementarteilchen und des Standardmodells für das expandierende Universum. Diese Entwicklung der Physik ging Hand in Hand mit der Schaffung immer mächtigerer mathematischer Theorien. Im zwanzigsten Jahrhundert vollzog der Computer seinen Siegeszug. Das führte zur Schaffung des Wissenschaftlichen Rechnens, der Informatik und der Informationstechnologie sowie der Wirtschafts- und Finanzmathematik. Wichtige Gebiete der angewandten Mathematik sind:

– gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen,

[1] H. Wußing, 6000 Jahre Mathematik: eine kulturgeschichtliche Zeitreise. Bd. 1: Von den Anfängen bis Leibniz (1646–1716) und Newton (1643–1727), Bd. 2: Von Euler (1707–1783) bis zur Gegenwart. Springer, Heidelberg (2009).
E. Zeidler, Gedanken zur Zukunft der Mathematik. In: H. Wußing, Bd. 2, pp. 552–586.

– Variationsrechnung, optimale Steuerung und Optimierung,
– Integralgleichungen,
– Wahrscheinlichkeitsrechnung, stochastische Prozesse und mathematische Statistik,
– Numerische Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen,
– Wirtschafts- und Finanzmathematik,
– Algorithmik und Komplexitätstheorie.

Alle diese Gebiete werden in diesem Taschenbuch behandelt. Dabei stellen Algorithmik und Komplexitiätstheorie eine enge Verbindung zwischen Mathematik und Informatik her.

Im neunzehnten und zwanzigsten Jahrhundert vollzog sich gleichzeitig eine stürmische Entwicklung der reinen Mathematik. Das umfasste die Algebra, die Zahlentheorie, die algebraische Geometrie, die Differentialgeometrie, die Theorie der Mannigfaltigkeiten und die Topologie. Ende des zwanzigsten Jahrhunderts löste sich, grob gesprochen, die von Physikern geschaffene Stringtheorie von der Idee des nulldimensionalen Elementarteilchens und ersetzte diese durch winzige, eindimensionale schwingende Saiten, die im Englischen „strings" heißen. Die Forschungen zur Stringtheorie führten zu einem außerordentlich fruchtbaren Fluss neuer Ideen von der Physik in die Mathematik und zurück.

In der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts und im zwanzigsten Jahrhundert begannen die Mathematiker, sich intensiv mit den Grundlagen der Mathematik zu beschäftigen. Diese Grundlagen umfassen

– mathematische Logik und
– Mengentheorie.

Die mathematische Logik untersucht die Möglichkeiten, aber auch die Grenzen mathematischer Beweise. Wegen ihrer stark formalisierten Ausprägung eignet sie sich sehr gut zur Beschreibung der in Computern ablaufenden Prozesse, die frei von jeder Subjektivität sind. Deshalb bildet die mathematische Logik das Fundament der theoretischen Informatik. Die Mengentheorie stellt in erster Linie eine leistungsfähige Sprache zur Formulierung der modernen Mathematik dar. Wir stellen in diesem Taschenbuch nicht die formalen Aspekte der Mengentheorie in den Vordergrund, sondern bemühen uns um ein lebensvolles und inhaltsreiches Bild der Mathematik. In dieser Form hat die Mathematik über die Jahrhunderte hinweg immer wieder Menschen fasziniert und begeistert.

In der heutigen Mathematik beobachtet man einerseits eine starke Spezialisierung. Andererseits stellen die Hochtechnologie, die Elementarteilchenphysik und die Kosmologie Fragen von großer Komplexität an die Mathematik. Diese Fragen können nur durch die Zusammenführung unterschiedlicher Gebiete in Angriff genommen werden. Das führt zu einer Vereinheitlichung der Mathematik und zu einer Beseitigung der künstlichen Trennung zwischen reiner und angewandter Mathematik. Hierbei ist die Rückbesinnung auf das Lebenswerk von Gauß (1777–1855) sehr aufschlussreich. Gauß hat nie zwischen reiner und angewandter Mathematik unterschieden. Er hat sowohl Meisterleistungen auf dem Gebiet der reinen Mathematik als auch auf dem Gebiet der angewandten Mathematik vollbracht, die bis zum heutigen Tag die Mathematik beeinflussen.

Die Geschichte der Mathematik ist voll des Auftretens neuer Ideen und Methoden. Es besteht berechtigter Grund zu der Annahme, dass sich diese Entwicklungstendenz auch in Zukunft fortsetzen wird.

KAPITEL 0

WICHTIGE FORMELN, GRAPHISCHE DARSTELLUNGEN UND TABELLEN

Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden, aber nicht einfacher.
Albert Einstein (1879–1955)

0.1 Grundformeln der Elementarmathematik

0.1.1 Mathematische Konstanten

Tabelle 0.1

Symbol	Näherungswert	Bezeichnung
π	3,14159265	Ludolfsche Zahl pi
e	2,71828183	Eulersche[1] Zahl e
C	0,57721567	Eulersche Konstante
ln 10	2,30258509	natürlicher Logarithmus der Zahl 10

Fakultät: Häufig benutzt man das Symbol

$$\boxed{n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n\,,}$$

das man als n-Fakultät bezeichnet. Ferner definieren wir $0! := 1$.

▶ BEISPIEL 1: $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ und $6! = 720$.

In der statistischen Physik benötigt man $n!$ für Zahlen n, die in der Größenordnung von 10^{23} liegen. Für derartig große Zahlen n kann man die *Stirlingsche Formel*

$$\boxed{n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \tag{0.1}$$

als gute Näherung verwenden (vgl. 0.5.3.2).

[1]Leonhard Euler (1707–1783) war der produktivste Mathematiker aller Zeiten. Seine gesammelten Werke umfassen 72 Bände und zusätzlich fast 5000 Briefe. Mit seinem monumentalen Lebenswerk auf allen Gebieten der Mathematik hat er die Mathematik der Neuzeit wesentlich geprägt.

Am Ende dieses Handbuches findet man eine Tafel zur Geschichte der Mathematik, die es dem Leser erleichtern soll, die Lebensdaten bedeutender Mathematiker in den historischen Zusammenhang einzuordnen.

E. Zeidler (Hrsg.), *Springer-Handbuch der Mathematik I*,
DOI 10.1007/978-3-658-00285-5_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

Unendliche Reihen für π und e: Der exakte Wert von π ergibt sich aus der Leibnizschen Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \tag{0.2}$$

Wegen des ständigen Vorzeichenwechsels dieser Reihe ist der Fehler stets durch das erste vernachlässigte Glied gegeben. Somit approximiert die rechte Seite in (0.2) die Zahl π bis auf einen Fehler, der kleiner als $1/9$ ist. Diese Reihe wird jedoch wegen ihrer langsamen Konvergenz nicht zur Berechnung von π auf Computern benutzt. Zur Zeit sind über 2 Milliarden Dezimalstellen von π mit wesentlich leistungsfähigeren Methoden bestimmt worden (vgl. die ausführliche Diskussion der Zahl π in 2.7.7). Den Wert der Zahl e erhält man aus der unendlichen Reihe

$$\mathrm{e} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Für große Zahlen n gilt näherungsweise

$$\mathrm{e} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \tag{0.3}$$

Genauer strebt die rechte Seite von (0.3) für immer größer werdende natürliche Zahlen n gegen die Zahl e. Dafür schreibt man auch

$$\boxed{\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .}$$

In Worten: Die Zahl e ist der Grenzwert (Limes) der Folge der Zahlen $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, falls n gegen unendlich strebt. Mit Hilfe der Zahl e erhält man die wichtigste Funktion der Mathematik:

$$\boxed{y = \mathrm{e}^x .} \tag{0.4}$$

Das ist die Eulersche e-Funktion (vgl. 0.2.5). Die Umkehrung von (0.4) ergibt den natürlichen Logarithmus

$$\boxed{x = \ln y}$$

(vgl. 0.2.6). Speziell für Zehnerpotenzen erhält man

$$\boxed{\ln 10^x = x \cdot \ln 10 = x \cdot 2{,}302585 .}$$

Dabei kann x eine beliebige reelle Zahl sein.

Kettenbruchentwicklung von π und e: Zur Untersuchung der Feinstruktur von Zahlen benutzt man nicht Dezimalbruchentwicklungen, sondern Kettenbruchentwicklungen (vgl. 2.7.5). Die Kettenbruchentwicklungen von π und e sind in Tabelle 2.7 dargestellt.

Die Eulersche Konstante C: Der präzise Wert von C ergibt sich aus der Formel

$$\boxed{C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right) = -\int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt\,.}$$

Für große natürliche Zahlen n gilt deshalb die Näherungsformel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + C\,.$$

Die Eulersche Konstante C tritt bei erstaunlich vielen Formeln der Mathematik auf (vgl. 0.5).

0.1.2 Winkelmessung

Gradmaß: In Abbildung 0.1 sind einige häufig gebrauchte Winkel in Grad dargestellt. Einen Winkel von $90°$ bezeichnet man auch als *rechten Winkel*. Im alten Sumer zwischen Euphrat und Tigris benutzte man vor 4000 Jahren ein Zahlensystem zur Basis 60 (Sexagesimalsystem). Darauf ist es zurückzuführen, dass zum Beispiel die Zahlen 12, 24, 60 und 360 bei unserer Zeit- und Winkelmessung in herausgehobener Weise auftreten. Neben dem Grad benutzt man zum Beispiel in der Astronomie zusätzlich die folgenden kleineren Einheiten:

$$\boxed{\begin{aligned} 1' \quad &(\text{Bogenminute}) = \frac{1°}{60}\,, \\ 1'' \quad &(\text{Bogensekunde}) = \frac{1°}{3600}\,. \end{aligned}}$$

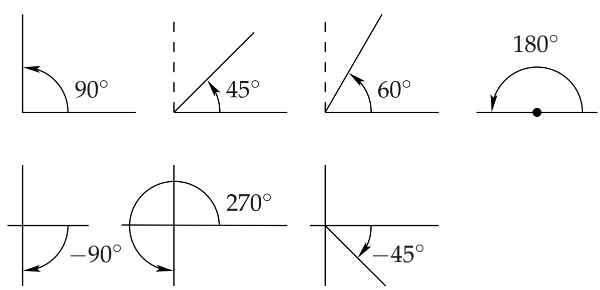


Abb. 0.1

▶ Beispiel 1 (Astronomie): Die Sonnenscheibe besitzt am Himmel einen Durchmesser von etwa $30'$ (ein halbes Grad).

Infolge der Bewegung der Erde um die Sonne verändern die Fixsterne ihre Position am Himmel. Die halbe maximale Veränderung innerhalb eines Jahres heißt *Parallaxe*. Diese ist gleich dem Winkel α, unter dem der maximale Abstand zwischen Erde und Sonne von dem Fixstern aus gesehen erscheint (vgl. Abb. 0.2 und Tabelle 0.2).

Einer Parallaxe von einer Bogensekunde entsprechen dabei 3,26 Lichtjahre ($3{,}1 \cdot 10^{13}$ km). Diese Entfernung bezeichnet man auch als ein *Parsec*.

Tabelle 0.2

Fixstern	Parallaxe	Entfernung
Proxima Centauri (nächster Fixstern)	0,765″	4,2 Lichtjahre
Sirius (hellster Fixstern)	0,371″	8,8 Lichtjahre

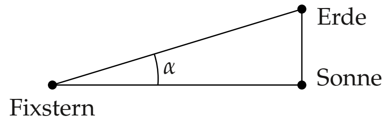


Abb. 0.2

Bogenmaß: Zu einem Winkel α° gehört das Bogenmaß

$$\boxed{\alpha = 2\pi\left(\frac{\alpha^\circ}{360^\circ}\right).}$$

Dabei ist α gleich der Länge des Bogens auf dem Einheitskreis, der dem Winkel α° entspricht (Abb. 0.3). In Tabelle 0.3 findet man einige häufig verwendete Werte.

Konvention: Falls wir nicht ausdrücklich darauf hinweisen, werden in diesem Taschenbuch alle Winkel in Bogenmaß gemessen.

Tabelle 0.3

Gradmaß	1°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	270°	360°
Bogenmaß	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$1' = \frac{\pi}{10\,800} = 0{,}000291, \quad 1'' = \frac{\pi}{648\,000} = 0{,}000005$									

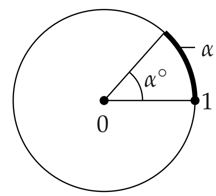


Abb. 0.3

Winkelsumme im Dreieck: In einem Dreieck beträgt die Winkelsumme stets π, also,

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = \pi}$$

(vgl. Abb. 0.4).

Winkelsumme im Viereck: Da man ein Viereck in zwei Dreiecke zerlegen kann, ist die Winkelsumme im Viereck gleich 2π, d. h.,

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi}$$

(vgl. Abb 0.5).

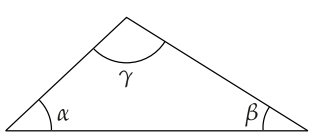


Abb. 0.4

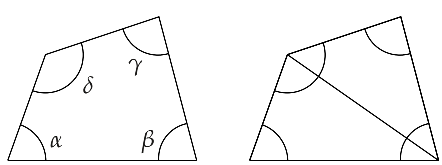
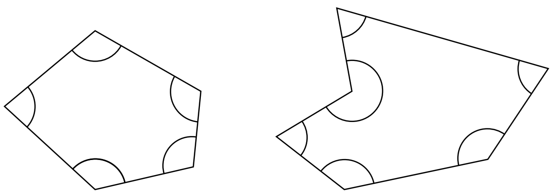


Abb. 0.5

Winkelsumme im n-Eck: Allgemein gilt

$$\boxed{\text{Summe der Innenwinkel im } n\text{-Eck} = (n-2)\pi\,.}$$

▶ BEISPIEL 2: Für ein Fünfeck (bzw. ein Sechseck) ist die Winkelsumme gleich 3π (bzw. 4π) (Abb. 0.6).



(a) Fünfeck **(b)** Sechseck Abb. 0.6

0.1.3 Flächeninhalt und Umfang ebener Figuren

In Tabelle 0.4 werden die wichtigsten ebenen Figuren zusammengefasst. Die Berechnung der auftretenden trigonometrischen Funktionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ wird ausführlich in 0.2.8 erläutert.

Tabelle 0.4

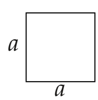
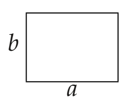
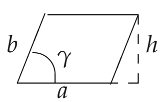
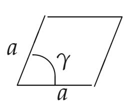
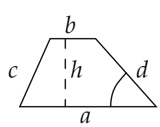
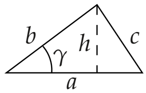
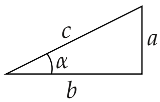
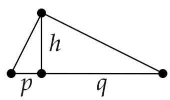
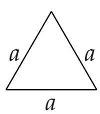
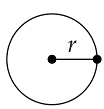
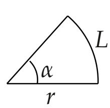
Figur		Flächeninhalt F	Umfang U
Quadrat		$F = a^2$ (a Seitenlänge)	$U = 4a$
Rechteck		$F = ab$ (a, b Seitenlängen)	$U = 2a + 2b$
Parallelogramm		$\boxed{F = ah = ab\sin\gamma}$ (a Länge der Grundlinie, b Länge der Seitenlinie, h Höhe)	$U = 2a + 2b$
Rhombus (gleichseitiges Parallelogramm)		$F = a^2\sin\gamma$	$U = 4a$
Trapez (Viereck mit zwei parallelen Seiten)		$F = \frac{1}{2}(a+b)h$ (a, b Länge der parallelen Seiten, h Höhe)	$U = a + b + c + d$

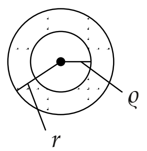
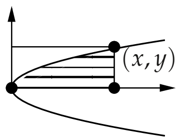
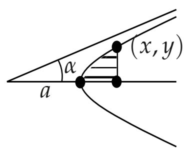
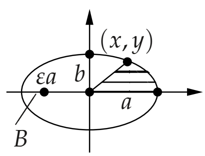
Tabelle 0.4 (Fortsetzung)

Dreieck		$\boxed{F = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma}$ (a Länge der Grundlinie, b, c Längen der übrigen Seiten, h Höhe, $s := U/2$) *Heronische Flächenformel:* $\boxed{F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$	$U = a + b + c$
rechtwinkliges Dreieck	 	$\boxed{F = \frac{1}{2}ab}$ *Zusammenhang zwischen Seiten und Winkeln:* $\boxed{\begin{array}{c} a = c\sin\alpha, \quad b = c\cos\alpha, \\ a = b\tan\alpha \end{array}}$ (c Hypotenuse[2], a Gegenkathete, b Ankathete) *Satz des Pythagoras*[3]*:* $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ *Höhensatz des Euklid:* $\boxed{h^2 = pq}$ (h Höhe über der Hypotenuse, p, q Höhenabschnitte)	$U = a + b + c$
gleichseitiges Dreieck		$F = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$U = 3a$
Kreis		$\boxed{F = \pi r^2}$ (r Radius)	$\boxed{U = 2\pi r}$
Kreissektor		$F = \frac{1}{2}\alpha r^2$	$U = L + 2r$, $L = \alpha r$

[2] In einem rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man diejenige Seite als Hypotenuse, die dem rechten Winkel gegenüberliegt. Die beiden anderen Seiten heißen *Katheten*.

[3] Pythagoras von Samos (um 500 v. Chr.) gilt als Gründer der berühmten Schule der Pythagoreer im antiken Griechenland. Der Satz des Pythagoras war jedoch bereits tausend Jahre zuvor den Babyloniern zur Zeit des Königs Hammurapi bekannt (1728–1686 v. Chr.).

Tabelle 0.4 (Fortsetzung)

Kreisring		$F = \pi(r^2 - \varrho^2)$ (r äußerer Radius, ϱ innerer Radius)	$U = 2\pi(r + \varrho)$
Parabelsektor[4]		$F = \frac{1}{3}xy$	
Hyperbelsektor		$F = \frac{1}{2}\left(xy - ab \cdot \operatorname{arcosh}\frac{x}{a}\right)$ ($b = a\tan\alpha$)	
Ellipsensektor		$F = \frac{1}{2}ab \cdot \operatorname{arcosh}\frac{x}{a}$	
Ellipse	(B Brennpunkt)	$\boxed{F = \pi ab}$ (a, b Längen der Halbachsen, $b < a$, ε numerische Exzentrizität)	$\boxed{U = 4aE(\varepsilon)}$ (vgl. (0.5))

Die Bedeutung elliptischer Integrale für die Berechnung des Umfangs einer Ellipse: Die numerische Exzentrizität ε einer Ellipse wird durch

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}$$

definiert. Die geometrische Bedeutung von ε besteht darin, dass der Brennpunkt der Ellipse vom Zentrum den Abstand εa besitzt. Für einen Kreis gilt $\varepsilon = 0$. Je größer die numerische Exzentrizität ε ist, um so flacher wird die Ellipse.

Bereits im 18. Jahrhundert bemerkte man, dass sich der *Umfang einer Ellipse nicht* elementar berechnen lässt. Dieser Umfang ist durch $U = 4aE(\varepsilon)$ gegeben, wobei wir mit

$$\boxed{E(\varepsilon) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi} \tag{0.5}$$

[4]Parabel, Hyperbel und Ellipse werden in 0.1.7 betrachtet. Die Funktion arcosh wird in 0.2.12 eingeführt.

das *vollständige elliptische Integral zweiter Gattung* von Legendre bezeichnen. Für eine Ellipse ist stets $0 \le \varepsilon < 1$. Zu allen diesen Werten gehört die konvergente Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}E(\varepsilon) &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \ldots \\ &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{3\varepsilon^4}{64} - \frac{5\varepsilon^6}{256} - \ldots\end{aligned}$$

Die allgemeine Theorie der elliptischen Integrale wurde im 19. Jahrhundert geschaffen (vgl. 1.14.19).

Regelmäßige Vielecke: Ein Vieleck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten und Winkel gleich sind (Abb. 0.7).

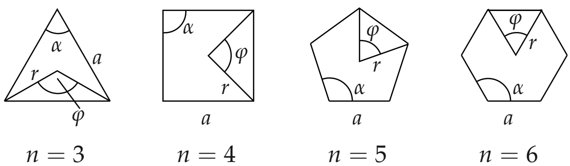


Abb. 0.7

Den Abstand des Zentrums von einem Eckpunkt bezeichnen wir mit r. Dann wird die Geometrie eines regelmäßigen n-Ecks durch folgende Aussagen beschrieben:

Zentriwinkel	$\varphi = \frac{2\pi}{n}$,
Innenwinkel	$\alpha = \pi - \varphi$,
Seitenlänge	$a = 2r \sin\frac{\varphi}{2}$,
Umfang	$U = na$,
Fläche	$F = \frac{1}{2} nr^2 \sin\varphi$.

Satz von Gauß: Ein n-Eck mit $n \le 20$ kann man genau dann mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruieren, wenn

$$\boxed{n = 3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\,,\ 8\,,\ 10\,,\ 12\,,\ 15\,,\ 16\,,\ 17\,,\ 20\,.}$$

Eine derartige Konstruktion ist somit für $n = 7\,,\ 9\,,\ 11\,,\ 13\,,\ 14\,,\ 18\,,\ 19$ unmöglich. Dieses Ergebnis ist eine Konsequenz der Galoistheorie und wird in 2.6.6 genauer betrachtet.

0.1.4 Volumen und Oberflächen von Körpern

In Tabelle 0.5 werden die wichtigsten dreidimensionalen Figuren zusammengestellt.

Tabelle 0.5

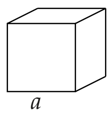
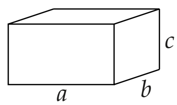
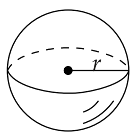
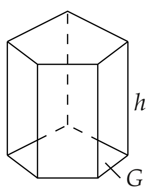
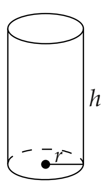
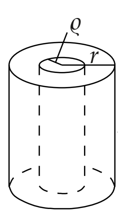
Figur		Volumen V	Oberfläche O Mantelfläche M
Würfel		$V = a^3$ (a Seitenlänge)	$O = 6a^2$
Quader		$V = abc$ (a, b, c Seitenlänge)	$O = 2(ab + bc + ca)$
Kugel		$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$ (r Radius)	$\boxed{O = 4\pi r^2}$
Prisma		$\boxed{V = Gh}$ (G Grundfläche, h Höhe)	
Zylinder		$V = \pi r^2 h$ (r Radius, h Höhe)	$O = M + 2\pi r^2$, $M = 2\pi rh$
Hohlzylinder		$V = \pi h(r^2 - \varrho^2)$ (r äußerer Radius, ϱ innerer Radius, h Höhe)	

Tabelle 0.5 (Fortsetzung)

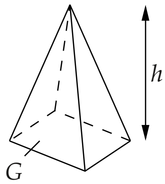
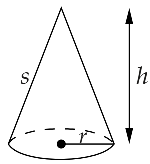
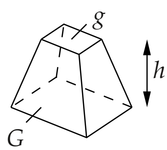
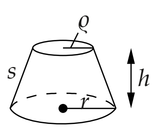
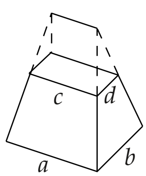
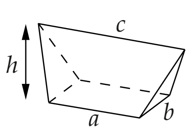
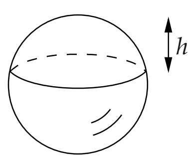
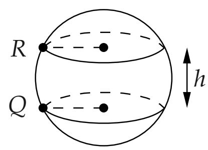
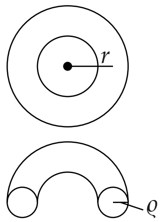
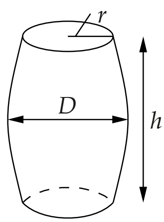
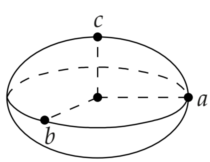
Pyramide		$\boxed{V = \frac{1}{3}Gh}$ (G Grundfläche, h Höhe)	
Kreiskegel		$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (r Radius, h Höhe, s Länge der Seitenlinie)	$O = M + \pi r^2$, $M = \pi rs$
Pyramidenstumpf		$V = \frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$ (G Grundfläche, g Deckfläche)	
Kegelstumpf		$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r\varrho + \varrho^2)$ (r, ϱ Radien, h Höhe, s Länge der Seitenlinie)	$O = M$ $+ \pi(r^2 + \varrho^2)$, $M = \pi s(r + \varrho)$
Obelisk		$V = \frac{1}{6}(ab + (a+c)(b+d)$ $+cd)$ (a, b, c, d Längen der Seiten)	
Keil (die Seiten sind gleichschenklige Dreiecke)		$V = \frac{\pi}{6}bh(2a + c)$ (a, b Grundseiten, c obere Kantenlinie, h Höhe)	
Kugelabschnitt (begrenzt durch einen Breitenkreis)		$V = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$ (r Radius der Kugel, h Höhe)	$O = 2\pi rh$ (Kugelkappe)

Tabelle 0.5 (Fortsetzung)

Kugelschicht (begrenzt durch zwei Breitenkreise)		$V = \frac{\pi h}{6}(3R^2 + 3\varrho^2 + h^2)$ (r Radius der Kugel, h Höhe, R und ϱ Radien der Breitenkreise)	$O = 2\pi rh$ (Kugelzone)
Torus		$V = 2\pi r^2 \varrho$ (r Radius des Torus, ϱ Radius des Querschnitts)	$O = 4\pi^2 r\varrho$
Tonnenkörper (mit kreisförmigem Querschnitt)		$V = 0{,}0873\, h(2D + 2r)^2$ (D Durchmesser, h Höhe, r oberer Radius; Näherungsformel)	
Ellipsoid		$V = \frac{4}{3}\pi abc$ (a, b, c Länge der Achsen, $c < b < a$)	siehe die Formel von Legendre (L) für O

Die Bedeutung elliptischer Integrale für die Berechnung der Oberfläche eines Ellipsoids: Die Oberfläche O eines Ellipsoids kann nicht elementar berechnet werden. Man benötigt dazu elliptische Integrale. Es gilt die Formel von Legendre

$$\boxed{O = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}}\Big(c^2 F(k, \varphi) + (a^2 - c^2)E(k, \varphi)\Big)} \tag{L}$$

mit

$$k = \frac{a}{b}\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \qquad \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}.$$

Die Formeln für die elliptischen Integrale $E(k,\varphi)$ und $F(k,\varphi)$ lauten

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

$$E(k,\,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,\mathrm{d}\psi = \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{K} = F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

$$\mathrm{E} = E\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,\mathrm{d}\psi = \int_0^{1} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

0.1.5 Volumen und Oberfläche der regulären Polyeder

Polyeder: Unter einem *Polyeder* versteht man einen Körper, der von Ebenenteilen begrenzt wird.

Die regelmäßigen Polyeder (auch Platonische Körper genannt) besitzen als Seitenflächen kongruente, regelmäßige Vielecke der Kantenlänge a, wobei in jedem Eckpunkt die gleiche Anzahl von Seitenflächen zusammenstößt. Es gibt genau 5 reguläre Polyeder, die in Tabelle 0.6 aufgeführt werden.

Tabelle 0.6

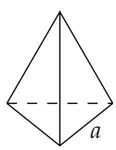
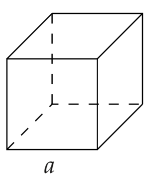
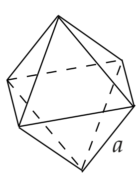
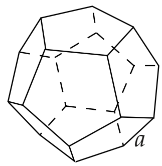
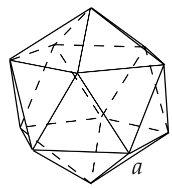
Reguläre Polyeder	Seitenflächen	Volumen	Oberfläche
Tetraeder 	4 gleichseitige Dreiecke	$\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot a^3$	$\sqrt{3}a^2$
Würfel 	6 Quadrate	a^3	$6a^2$
Oktaeder 	8 gleichseitige Dreiecke	$\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot a^3$	$2\sqrt{3}\cdot a^2$

Tabelle 0.6 (Fortsetzung)

Dodekaeder 	12 gleichseitige Fünfecke	$7{,}663 \cdot a^3$	$20{,}646 \cdot a^2$
Ikosaeder[5] 	20 gleichseitige Dreiecke	$2{,}182 \cdot a^3$	$8{,}660 \cdot a^2$

Eulersche Polyederformel: Für die regulären Polyeder gilt:[6]

$$\boxed{\text{Anzahl der Eckpunkte } E - \text{Anzahl der Kanten } K + \text{Anzahl der Flächen } F = 2\,.}$$

Tabelle 0.7 bestätigt diese Formel.

Tabelle 0.7

Reguläres Polyeder	E	K	F	$E - K + F$
Tetraeder	4	6	4	2
Würfel	8	12	6	2
Oktaeder	6	12	8	2
Dodekaeder	20	30	12	2
Ikosaeder	12	30	20	2

0.1.6 Volumen und Oberfläche der n-dimensionalen Kugel

Die folgenden Formeln benötigt man in der statistischen Physik. Dabei liegt n in der Größenordnung von 10^{23}. Für solch große Werte von n benutzt man die Stirlingsche Näherungsformel für $n!$ (vgl. (0.1)).

Charakterisierung der Vollkugel durch eine Ungleichung: Die n-dimensionale Kugel $K_n(r)$ vom Radius r (mit dem Mittelpunkt im Ursprung) besteht definitionsgemäß aus genau allen

[5] Über die Symmetrien des Ikosaeders (Ikosaedergruppe) und ihre Beziehungen zu den Gleichungen 5. Grades hat Felix Klein ein berühmtes Buch geschrieben (vgl. [Klein 1884/1993])

[6] Diese Formel ist der Spezialfall eines allgemeinen topologischen Sachverhalts. Da die Ränder aller regulären Polyeder zur Kugeloberfläche homöomorph sind, ist ihr Geschlecht gleich null und ihre Eulersche Charakteristik gleich 2. Das wird ausführlicher in 18.1 und 18.2 dargestellt.

Punkten $(x_1, \ldots, x_n)$, die der Ungleichung

$$\boxed{x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq r^2}$$

genügen. Dabei sind $x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen mit $n \geq 2$. Der Rand dieser Kugel wird von allen Punkten $(x_1, \ldots, x_n)$ gebildet, die die Gleichung

$$\boxed{x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2}$$

erfüllen. Für das Volumen V_n und die Oberfläche O_n von $K_n(r)$ gelten die Formeln von Jacobi:

$$\boxed{\begin{aligned} V_n &= \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \\ O_n &= \frac{2\pi^{n/2} r^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \end{aligned}}$$

Die Gammafunktion Γ wird in 1.14.16. betrachtet. Sie genügt der Rekursionsformel

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{für alle } x > 0$$

mit $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Daraus erhält man für $m = 1, 2, \ldots$ die folgenden Formeln:

$$V_{2m} = \frac{\pi^m r^{2m}}{m!}, \qquad V_{2m+1} = \frac{2(2\pi)^m r^{2m+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m+1)}$$

und

$$O_{2m} = \frac{2\pi^m r^{2m-1}}{(m-1)!}, \qquad O_{2m+1} = \frac{2^{2m+1} m! \pi^m r^{2m}}{(2m)!}.$$

▶ Beispiel: Im Spezialfall $n = 3$ und $m = 1$ ergeben sich die bekannten Formeln

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad O_3 = 4\pi r^2$$

für das Volumen V_3 und die Oberfläche O_3 der dreidimensionalen Kugel vom Radius r.

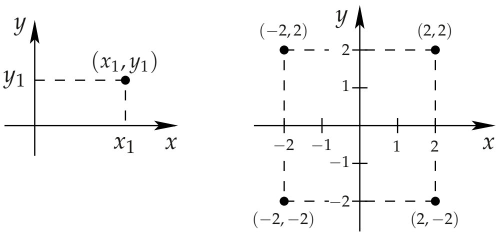
0.1.7 Grundformeln der analytischen Geometrie in der Ebene

Die analytische Geometrie beschreibt geometrische Gebilde wie Geraden, Ebenen und Kegelschnitte durch Gleichungen für die Koordinaten und untersucht die geometrischen Eigenschaften durch Umformungen dieser Gleichungen. Diese Arithmetisierung und Algebraisierung der Geometrie geht auf den Philosophen, Naturwissenschaftler und Mathematiker René Descartes (1596–1650) zurück, nach dem die kartesischen Koordinaten benannt sind.

0.1.7.1 Geraden

Alle folgenden Formeln beziehen sich auf ein ebenes kartesisches Koordinatensystem, bei dem die y-Achse senkrecht auf der x-Achse steht. Die Koordinaten eines Punktes (x_1, y_1) ergeben sich wie in Abb. 0.8a. Die x-Koordinate eines Punktes links von der y-Achse ist negativ, und die y-Koordinate eines Punktes unterhalb der x-Achse ist ebenfalls negativ.

▶ Beispiel 1: Die Punkte $(2,2)$, $(2,-2)$, $(-2,-2)$ und $(-2,2)$ findet man in Abb. 0.8b.



(a) (b) Abb. 0.8

Der Abstand d der beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2):

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

(Abb. 0.9). Diese Formel entspricht dem Satz des Pythagoras.

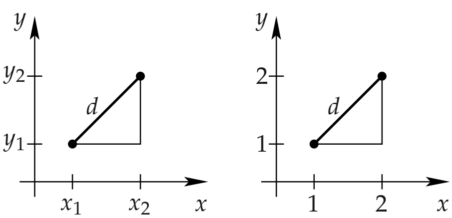


Abb. 0.9

► Beispiel 2: Der Abstand der beiden Punkte $(1, 1)$ und $(2, 2)$ beträgt

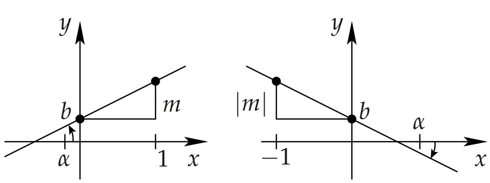
$$d = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}\,.$$

Die Gleichung einer Geraden:

$$\boxed{y = mx + b\,.} \tag{0.6}$$

Dabei ist b der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse, und m bezeichnet den *Anstieg* der Geraden (Abb. 0.10). Für den *Anstiegswinkel* α erhält man

$$\boxed{\tan\alpha = m\,.}$$



(a) $m > 0$ (b) $m < 0$ Abb. 0.10