Eberhard Zeidler *Hrsg.*

Springer-Handbuch der Mathematik III

Begründet von I. N. Bronstein und K. A. Semendjaew

Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler

Herausgegeben von E. Zeidler

Springer Spektrum

Springer-Handbuch der Mathematik III

Herausgeber:
Prof. Dr. Eberhard Zeidler, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, Deutschland

Beitragsautoren:
Prof. Dr. Eberhard Zeidler, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig (Kap. 5 bis 6)
Prof. Dr. Hans-Rudolf Schwarz, Universität Zürich (Kap. 7.1–7.6)
Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig (Kap. 7.7)
Prof. Dr. Bernd Luderer, TU Chemnitz (Kap. 8.1, 8.13)
Prof. Dr. Jochen Blath, TU Berlin (Kap. 8.2, 8.3)
Prof. Dr. Alexander Schied, Universität Mannheim (Kap. 8.4, 8.5)
Prof. Dr. Stephan Dempe, TU Bergakademie Freiberg (Kap. 8.6–8.10)
Prof. Dr. Gert Wanka, TU Chemnitz (Kap. 8.11, 8.12)
Prof. Dr. Juraj Hromkovic, ETH Zürich (Kap. 9.1–9.9)
Prof. Dr. Siegfried Gottwald, Universität Leipzig (Kap. 9.10)

Springer-Handbuch der Mathematik III

Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew
Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler
Herausgegeben von E. Zeidler

Springer Spektrum

Herausgeber
Prof. Dr. Eberhard Zeidler
Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften
Leipzig
Deutschland

ISBN 978-3-658-00274-9 ISBN 978-3-658-00275-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-00275-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.
Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Theoria cum praxi

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Die Mathematik spielt eine wichtige Rolle in vielen Bereichen unserer modernen Gesellschaft. Sie ist eine Querschnittswissenschaft und zugleich eine Schlüsseltechnologie mit vielfältigen engen Verbindungen zu anderen Wissenschaften. Das betrifft die Naturwissenschaften, die Ingenieurwissenschaften, die Informatik und Informationstechnologie, die Wirtschafts- und Finanzwissenschaft, die Sozialwissenschaften sowie die Medizin. Mathematik ist abstrakt und zugleich sehr praktisch. Das vorliegende

SPRINGER-HANDBUCH DER MATHEMATIK,

das sich um einen breit angelegten Brückenschlag zwischen der Mathematik und ihren Anwendungen bemüht, stellt eine wesentliche Erweiterung des SPRINGER-TASCHENBUCHES DER MATHEMATIK dar, das 2012 im Verlag Springer Spektrum erschienen ist. Das Springer-Handbuch umfasst die folgenden vier Teile:

– TEIL I: Analysis.
– TEIL II: Algebra, Geometrie, Grundlagen der Mathematik.
– TEIL III: Variationsrechnung und Physik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Numerik und Wissenschaftliches Rechnen, Wirtschafts- und Finanzmathematik, Algorithmik und Informatik.
– TEIL IV: Funktionalanalysis, Dynamische Systeme, Mannigfaltigkeiten, Topologie, Mathematische Physik.

Als mehrbändiges Nachschlagewerk ist das Springer-Handbuch in erster Linie für wissenschaftliche Bibliotheken gedacht, die ihren Leserinnen und Lesern parallel zum Springer-Taschenbuch der Mathematik das umfangreichere Material des Springer-Handbuches (in elektronischer Form und Papierform) zur Verfügung stellen wollen. Für individuell interessierte Leserinnen und Leser sei auf folgendes hingewiesen. Die Teile I bis III des Springer-Handbuches der Mathematik enthalten die entsprechenden Kapitel des Springer-Taschenbuches der Mathematik, die durch wichtiges zusätzliches Material ergänzt werden. Dagegen sind die neun Kapitel von Teil IV nicht im Springer-Taschenbuch der Mathematik enthalten.

Teil I enthält neben dem einführenden Kapitel und dem Kapitel 1 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zur höheren komplexen Funktionentheorie und zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Teil II enthält neben den Kapiteln 2–4 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zu folgenden Gebieten: multilineare Algebra, höhere Zahlentheorie, projektive Geometrie, algebraische Geometrie und Geometrien der modernen Physik.

Teil III enthält neben den Kapiteln 5–9 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zu stochastischen Prozessen.

Teil IV enthält die folgenden Zusatzkapitel zum Springer-Taschenbuch der Mathematik:

– Kapitel 10: Höhere Analysis (Tensoranalysis und spezielle Relativitätstheorie, Integralgleichungen, Distributionen und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, moderne Maß- und Integrationstheorie).
– Kapitel 11: Lineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen.
– Kapitel 12: Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen.
– Kapitel 13: Dynamische Systeme – Mathematik der Zeit.
– Kapitel 14: Nichtlineare partielle Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften.
– Kapitel 15: Mannigfaltigkeiten.
– Kapitel 16: Riemannsche Geometrie und allgemeine Relativitätstheorie.
– Kapitel 17: Liegruppen, Liealgebren und Elementarteilchen - Mathematik der Symmetrie.
– Kapitel 18: Topologie - Mathematik des qualitativen Verhaltens.
– Kapitel 19: Krümmung, Topologie und Analysis (Eichheorie in Mathematik und Physik).

Hier werden im Rahmen der mathematischen Physik die Bedürfnisse der modernen Physik berücksichtigt. Am Ende von Teil IV findet man eine Tafel zur Geschichte der Mathematik. Die sorgfältig zusammengestellten Literaturangaben am Ende jedes Kapitels sollen dem Leser helfen, bei auftretenden Fragen geeignete moderne Bücher zu konsultieren, wobei zwischen einführender Literatur und anspruchsvollen Standardwerken gewählt werden kann.

Das vorliegende Springer-Handbuch der Mathematik wendet sich an:

– Fortgeschrittene Studierende der Mathematik und angrenzender naturwissenschaftlicher, technischer, wirtschaftswissenschaftlicher Fachrichtungen, Graduierte, Doktoranden
– Mathematiker, Physiker, Ingenieure, Informatiker, Wirtschaftsmathematiker in Forschung, Lehre und Praxis
– wissenschaftliche Bibliotheken, akademische Institutionen und Firmen.

Die Bedürfnisse eines derart breiten Leserkreises werden berücksichtigt, indem der Bogen von elementaren Kenntnissen bis hin zu anspruchsvollen mathematischen Resultaten sehr weit gespannt wird und das Werk ein breites Spektrum mathematischer Gebiete überdeckt. Großer Wert wird dabei auf folgende Aspekte gelegt:

– ausführliche Motivation und Erläuterung der Grundideen,
– leichte Fasslichkeit, Anschaulichkeit, und Übersichtlichkeit,
– die Verbindung zwischen reiner und angewandter Mathematik,
– vielseitige Anwendungen der Mathematik und Praxisnähe, sowie
– die Diskussion des historischen Hintergrunds.

Es wird gezeigt, dass die Mathematik mehr ist als eine trockene Ansammlung von Formeln, Definitionen, Theoremen und Rechenrezepten. Sie ist ein unverzichtbarer Partner der modernen Technik, und sie hilft wesentlich bei der optimalen Gestaltung von Industrie- und Wirtschaftsprozessen. Gleichzeitig ist die Mathematik ein wichtiger Bestandteil unserer menschlichen Kultur und ein wundervolles Erkenntnisorgan des Menschen, das ihn etwa in der Hochtechnologie, der Elementarteilchenphysik und der Kosmologie in Bereiche vorstoßen lässt, die ohne Mathematik nicht zu verstehen sind, weil sie von unserer täglichen Erfahrungswelt extrem weit entfernt sind.

Während das Springer-Taschenbuch der Mathematik den Anforderungen des Bachelor-Studiums angepasst ist, bezieht sich das Springer-Handbuch der Mathematik sowohl auf das Bachelor-Studium als auch auf das weiterführende Master-Studium.

Bei den Anwendungen der Mathematik spielen Phänomene eine große Rolle, die in Natur und Technik auftreten. Das mathematische Verständnis dieser Phänomene erleichtert dem Anwender in den Naturwissenschaften und in den Ingenieurwissenschaften den Überblick über die Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen mathematischen Disziplinen. Deshalb wird in diesem Springer-Handbuch der Mathematik die Sicht auf wichtige Phänomene besonders betont. Das betrifft:

– Mathematik der Grenzübergänge (Analysis und Funktionalanalysis),
– Mathematik des Optimalen (Variationsrechnung, optimale Steuerung, lineare und nichtlineare Optimierung),
– Mathematik des Zufalls (Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und stochastische Prozesse),
– Mathematik der Zeit und des Chaos (dynamische Systeme),
– Mathematik der Stabilität von Gleichgewichtszuständen in Natur und Technik, von zeitabhängigen Prozessen und von Algorithmen auf Computern,
– Mathematik der Komplexität von Algorithmen auf Computern,
– Mathematik der Symmetrie (Gruppentheorie),
– Mathematik der Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden (Funktionalanalysis),
– Mathematik des qualitativen Verhaltens von Gleichgewichtszuständen und zeitabhängigen Prozessen in Natur und Technik (Topologie),
– Mathematik der Wechselwirkungskräfte in der Natur (nichtlineare partielle Differentialgleichungen und nichtlineare Funktionalanalysis, Differentialgeometrie der Faserbündel und Eichtheorie),
– Mathematik der Strukturen (Kategorientheorie).

Interessant ist die Tatsache, dass klassische Ergebnisse der Mathematik heutzutage im Rahmen neuer Technologien völlig neue Anwendungen erlauben. Das betrifft etwa die Zahlentheorie, die lange Zeit als ein reines Vergnügen des menschlichen Geistes galt. Beispielsweise wird die berühmte Riemannsche Zetafunktion der analytischen Zahlentheorie, die in Kapitel 2 betrachtet wird, in der modernen Quantenfeldtheorie zur Berechnung von Streuprozessen von Elementarteilchen im Rahmen der Renormierungstheorie eingesetzt. Der klassische Satz von Fermat–Euler über Teilbarkeitseigenschaften von Zahlen wird heute wesentlich benutzt, um die Übermittlung von Nachrichten in raffinierter Weise zu verschlüsseln. Das findet man ebenfalls in Kapitel 2.

Das „Springer-Handbuch der Mathematik" knüpft an eine lange Tradition an. Das „Taschenbuch der Mathematik" von I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew wurde von Dr. Viktor Ziegler aus dem Russischen ins Deutsche übersetzt. Es erschien 1958 im Verlag B. G. Teubner in Leipzig, und bis zum Jahre 1978 lagen bereits 18 Auflagen vor. Unter der Herausgabe von Dr. Günter Grosche und Dr. Viktor Ziegler und unter wesentlicher redaktioneller Mitarbeit von Frau Dorothea Ziegler erschien 1979 die völlig überarbeitete 19. Auflage, an der Wissenschaftler der Leipziger Universität und anderer Hochschulen des mitteldeutschen Raumes mitwirkten.[1] Diese Neubearbeitung wurde ins Russische übersetzt und erschien 1981 im Verlag für Technisch-Theoretische Literatur in Moskau. Ferner wurden eine englische und eine japanische Übersetzung publiziert.

Motiviert durch die stürmische Entwicklung der Mathematik und ihrer Anwendungen erschien in den Jahren 1995 und 1996 ein völlig neuverfasstes, zweibändiges „Teubner-Taschenbuch der Mathematik" im Verlag B. G. Teubner, Stuttgart und Leipzig.[2] Das daraus entstandene, vorliegende „Springer-Handbuch der Mathematik" enthält zwei völlig neu geschriebene Kapitel über Wirtschafts-und Finanzmathematik sowie über Algorithmik und Informatik.

[1] Bis 1995 erschienen sieben weitere Auflagen.

[2] Die englische Übersetzung des ersten Bandes erschien 2003 im Verlag Oxford University Press, New York, als „Oxford Users' Guide to Mathematics".

Die moderne Konzeption und Koordination des Kapitels 8 über Wirtschafts-und Finanzmathematik lag in den erfahrenen Händen von Herrn Prof. Dr. Bernd Luderer (TU Chemnitz). In das von Herrn Prof. Dr. Juraj Hromkovič (ETH Zürich) verfasste Kapitel 9 über Algorithmik und Informatik flossen seine reichen Lehrerfahrungen ein. Im Mittelpunkt steht das zentrale Problem der Komplexität von Algorithmen. Erinnert sei daran, dass eines der berühmten sieben Milleniumsprobleme der Mathematik aus dem Jahre 2000 eine tiefe Frage der Komplexitätstheorie betrifft. Das Kapitel 7 über Numerik und Wissenschaftliches Rechnen wurde von Herrn Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch (Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig) wesentlich überarbeitet, und die übrigen Kapitel wurden aktualisiert. Der Herausgeber möchte den Kollegen Hackbusch, Hromkovič und Luderer sowie allen seinen Koautoren für ihre engagierte Arbeit sehr herzlich danken. Das betrifft:

- Prof. Dr. Hans-Rudolf Schwarz (7.1–7.6) und
  Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch (7.7),
- Prof. Dr. Bernd Luderer (8.1, 8.13),
  Prof. Dr. Jochen Blath (8.2, 8.3),
  Prof. Dr. Alexander Schied (8.4, 8.5),
  Prof. Dr. Stephan Dempe (8.6–8.10) und
  Prof. Dr. Gert Wanka (8.11, 8.12),
- Prof. Dr. Juraj Hromkovič (9.1– 9.9) und
  Prof. Dr. Siegfried Gottwald (9.10).

Ein herzliches Dankeschön geht auch an Frau Micaela Krieger-Hauwede für das sorgfältige Anfertigen vieler Abbildungen in den Teilen I bis III, das Lesen der Korrekturen und die einfühlsame, ästhetisch gelungene Textgestaltung. Frau Kerstin Fölting danke ich sehr herzlich für das sorgfältige Anfertigen der Abbildungen und der LaTeX-Version von Teil IV sowie für zahlreiche Hinweise zur Verbesserung der Darstellung. Den Mitarbeitern des Leipziger Max-Planck-Institutes für Mathematik in den Naturwissenschaften, Regine Lübke (Sekretariat), Katarzyna Baier und Ingo Brüggemann (Bibliothek), Oliver Heller und Rainer Kleinrensing (EDV-Abteilung) sei sehr herzlich für die technische Unterstützung bei der Fertigstellung des Springer-Handbuches der Mathematik gedankt. Ferner danke ich sehr herzlich Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch vom Verlag Springer Spektrum für die Koordination des gesamten Projekts und für die kompetente Aktualisierung des Literaturverzeichnisses. Schließlich sei allen Leserinnen und Lesern gedankt, die in der Vergangenheit durch ihre Hinweise zur Verbesserung der Darstellung beigetragen haben.

Alle Beteiligten hoffen, dass dieses Nachschlagewerk in allen Phasen des Studiums und danach im Berufsleben ein nützlicher Begleiter sein wird, der die Einheit der Mathematik betont.

Leipzig, im Sommer 2012 Der Herausgeber

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 5

VARIATIONSRECHNUNG UND PHYSIK

Da nämlich der Plan des Universums der vollkommenste ist, kann kein Zweifel bestehen, dass alle Wirkungen in der Welt aus den Ursachen mit Hilfe der Methode der Maxima und Minima gleich gut bestimmt werden können.
Leonhard Euler (1707–1783)

Die Mathematik kennt neben der konkurrenzlosen Epoche der Griechen keine glücklichere Konstellation als diejenige, unter der Leonhard Euler geboren wurde. Es ist ihm vorbehalten gewesen, der Mathematik eine völlig veränderte Gestalt zu geben und sie zu dem mächtigen Gebäude auszugestalten, welches sie heute ist.
Andreas Speiser (1885–1970)

Indem er die Eulersche Methode der Variationsrechnung verallgemeinerte, entdeckte Lagrange (1736–1813), wie man in einer einzigen Zeile die Grundgleichung für alle Probleme der analytischen Mechanik aufschreiben kann.
Carl Gustav Jakob Jacobi (1804–1851)

Echte Optimierung ist der revolutionäre Beitrag der modernen mathematischen Forschung zur effektiven Gestaltung von Entscheidungsprozessen.
George Bernhardt Dantzig (1914–2005)[1]

In diesem Kapitel betrachten wir die Elemente der Variationsrechnung, der Steuerungstheorie und der Optimierungstheorie. Weiterführende Resultate findet man in den Kapiteln 12 und 14 im Handbuch. Insbesondere erläutern wir dort den Zusammenhang mit der nichtlinearen Funktionalanalysis. der Theorie nichtlinearer partieller Differentialgleichungen und der modernen Physik. Ferner werden im Kapitel 8 Anwendungen der Optimierungstheorie in der Wirtschaftsmathematik betrachtet.[2]

[1] Dantzig entwickelte um 1950 in den USA den grundlegenden Simplexalgorithmus zur linearen Optimierung. Das war der Ausgangspunkt für die moderne Optimierungstheorie, deren Entwicklung eng mit dem Einsatz von leistungsfähigen Computern verbunden ist.

[2] Eine umfassende einheitliche moderne Darstellung der Variationsrechnung, der Steuerungstheorie und der Optimierungstheorie findet man in [Zeidler 1984, Vol. 3). Das einigende Band zwischen diesen scheinbar sehr unterschiedlichen Fragestellungen sind die Prinzipien der nichtlinearen Funktionalanalysis, die den Aufbau einer geschlossenen Theorie der „Mathematik des Optimalen" ermöglicht haben.

E. Zeidler (Hrsg.), *Springer-Handbuch der Mathematik III*,
DOI 10.1007/978-3-658-00275-6_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

5.1 Variationsrechnung für Funktionen einer Variablen

5.1.1 Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen

Gegeben seien die reellen Zahlen t_0, t_1, q_0, q_1 mit $t_0 < t_1$. Wir betrachten das Minimumproblem

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} L\big(q(t), q'(t), t\big)\, \mathrm{d}t = \min!,\\ &q(t_0) = a, \qquad q(t_1) = b, \end{aligned}} \tag{5.1}$$

und das allgemeinere Problem

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} L\big(q(t), q'(t), t\big)\, \mathrm{d}t = \text{stationär!}\,,\\ &q(t_0) = a, \qquad q(t_1) = b. \end{aligned}} \tag{5.2}$$

Die sogenannte *Lagrangefunktion* L sei hinreichend regulär.[3]

Hauptsatz: Ist $q = q(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ eine C^2-Lösung von (5.1) oder (5.2), dann gilt die Euler–Lagrangesche Gleichung[4]

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{q'} - L_q = 0.} \tag{5.3}$$

Dieser berühmte Satz wurde von Euler im Jahre 1744 in seinem Werk *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici la tissimo sensu accepti* bewiesen.[5] Damit schuf er die Variationsrechnung als mathematische Disziplin. Im Jahre 1762 vereinfachte Lagrange die Eulersche Herleitung und war damit in der Lage, die Gleichung (5.3) auf Funktionen mehrerer Variabler zu verallgemeinern (vgl. (5.46)). Carathéodory (1873–1950) bezeichnete die Eulersche Variationsrechnung als „eines der schönsten mathematischen Werke, das je geschrieben worden ist“. Beispiele werden in 5.1.2 betrachtet.

Kommentar: Die Euler-Lagrangesche Gleichung (5.3) ist äquivalent zu dem Problem (5.2). Dagegen stellt die Euler–Lagrangesche Gleichung (5.3) nur eine notwendige Bedingung für das Minimumproblem (5.1) dar. Jede Lösung von (5.1) genügt (5.3). Die umgekehrte Behauptung ist jedoch nicht richtig. In 5.1.5 geben wir hinreichende Bedingungen dafür an, dass Lösungen der Euler–Lagrangeschen Gleichung (5.3) tatsächlich Lösungen des Minimumproblems (5.1) sind.

Verallgemeinerung auf Systeme: Ist $q = (q_1, \ldots, q_F)$ in (5.1) oder (5.2), dann muss man (5.3) durch das System der Euler-Lagrangeschen Gleichungen ersetzen:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{q'_j} - L_{q_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, F\,.} \tag{5.4}$$

[3] Diese Bedingung ist beispielsweise erfüllt, wenn $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ vom Typ C^2 ist.

[4] Ausführlich geschrieben hat diese Gleichung die folgende Gestalt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L(q(t), q'(t), t)}{\partial q'} - \frac{\partial L(q(t), q'(t), t)}{\partial q} = 0.$$

[5] Die Übersetzung dieses lateinischen Titels lautet: *Eine Methode, um Kurven zu finden, denen eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt oder Lösung des isoperimetrischen Problems, wenn es im weitesten Sinne des Wortes aufgefasst wird.*

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der Mechanik: In der Mechanik hat man im Fall zeitunabhängiger Kräfte, die ein Potential besitzen, die Lagrangefunktion

$$\boxed{L = \text{kinetische Energie} - \text{potentielle Energie}}$$

zu wählen. Dann stellt das System (5.4) die berühmten *Lagrangeschen Bewegungsgleichungen* dar. Der Parameter t entspricht der Zeit, und q sind beliebige Ortskoordinaten.

Das zugehörige Variationsproblem (5.2) heißt *Hamiltonsches Prinzip der stationären Wirkung*.

Hat man es mit der Bewegung von Massenpunkten auf Kurven oder Flächen zu tun (z. B. Kreis- oder Kugelpendel), dann muss man in den Newtonschen Bewegungsgleichungen Zwangskräfte hinzufügen, die das Teilchen auf der Kurve oder der Fläche halten. Dieser Apparat ist schwerfällig. Nach der genialen Idee von Lagrange (1736–1813) ist es viel eleganter, durch Einführung geeigneter Koordinaten, die Nebenbedingungen vollständig zu eliminieren. Das führt auf (5.4) (vgl. z. B. das Kreispendel in 5.1.2). Die Newtonschen Gleichungen der Mechanik *Kraft gleich Masse mal Beschleunigung* lassen sich nicht auf weiterführende physikalische Theorien verallgemeinern (z. B. Elektrodynamik, allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie, Elementarteilchentheorie usw.). Dagegen gilt:

> Der Zugang von Lagrange lässt sich auf alle Feldtheorien der Physik verallgemeinern.

Das findet man in Kapitel 14 im Handbuch.

Interpretation der Lösung des Variationsproblems: Wir betrachten eine Kurvenschar

$$q = q(t) + \varepsilon\, h(t), \qquad t_0 \le t \le t_1, \tag{5.5}$$

die durch die Punkte (t_0, q_0) und (t_1, q_1) geht, d. h., es gilt $h(t_0) = h(t_1) = 0$ (Abb. 5.1). Ferner sei ε ein kleiner reeller Parameter. Setzen wir diese Kurvenschar in das Integral (5.1) ein, dann erhalten wir den Ausdruck

$$\varphi(\varepsilon) := \int_{t_0}^{t_1} L\big(q(t) + \varepsilon\, h(t)\,,\, q'(t) + \varepsilon\, h'(t)\,,\, t\big)\,\mathrm{d}t.$$

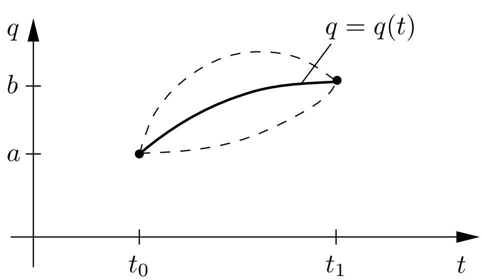

Abb. 5.1

(i) Ist $q = q(t)$ eine Lösung des Minimumproblems (5.1), dann besitzt die Funktion $\varphi = \varphi(\varepsilon)$ im Punkt $\varepsilon = 0$ ein Minimum, d. h., es gilt

$$\boxed{\varphi'(0) = 0.} \tag{5.6}$$

(ii) Das Problem (5.2) bedeutet definitionsgemäß, dass die Funktion $\varphi = \varphi(\varepsilon)$ in $\varepsilon = 0$ einen kritischen Punkt besitzt. Daraus folgt wiederum (5.6).

Aus (5.6) erhält man die Euler-Lagrangesche Gleichung. Das wird in 14.5.1 im Handbuch ausführlich bewiesen.

Wir setzen

$$J(q) := \int_{t_0}^{t_1} L\big(q(t), q'(t), t\big)\,\mathrm{d}t$$

und

$$\|q\|_k := \sum_{j=0}^{k} \max_{t_0 \le t \le t_1} |q^{(j)}(t)|$$

mit $q^0(t) := q(t)$. Dann gilt $\varphi(\varepsilon) = J(q + \varepsilon h)$. Definitionsgemäß ist die *erste Variation* des Integrals J durch $\delta J(q)h := \varphi'(0)$ gegeben. Die Gleichung (5.6) bedeutet dann

$$\boxed{\delta J(q)h = 0}$$

(Verschwinden der ersten Variation). In der Physik schreibt man dafür kurz $\delta J = 0$ (vgl. 14.5.1 im Handbuch). Die zweite Variation wird durch

$$\delta^2 J(q)h^2 := \varphi''(0)$$

definiert.

Die folgende Begriffsbildung ist fundamental.

Starkes und schwaches lokales Minimum: Gegeben sei eine C^1-Funktion $q = q(t)$ auf $[t_0, t_1]$ mit $q(t_0) = a$ und $q(t_1) = b$. Definitionsgemäß ist die Funktion q genau dann ein starkes (bzw. schwaches) lokales Minimum von (5.1), wenn es eine Zahl $\eta > 0$ gibt, so dass

$$\boxed{J(q_*) \ge J(q)}$$

gilt für alle C^1-Funktionen q_* auf $[t_0, t_1]$ mit $q_*(t_0) = a,\ q_*(t_1) = b$ und

$$\|q_* - q\|_k < \eta$$

für $k = 0$ (bzw. $k = 1$).

Diese Definition lässt sich in analoger Weise auf Systeme übertragen. Jedes schwache (oder starke) lokale Minimum ist eine Lösung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen.

Erhaltungssätze: Die Euler-Lagrangesche Gleichung (5.3) für $L = L(q, q', t)$, d. h.,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{q'} - L_q = 0$$

lautet explizit:

$$L_{q'q'}q'' + L_{q'q}q' + L_{q't} - L_q = 0. \tag{5.7}$$

Die Größe

$$p(t) := L_{q'}\big(q(t), q'(t), t\big)$$

nennen wir (verallgemeinerten) Impuls.

(i) *Erhaltung der Energie:* Hängt die Lagrangefunktion L nicht von der Zeit t ab (Homogenität des Systems bezüglich der Zeit), dann kann (5.7) in der Gestalt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q' L_{q'} - L) = 0$$

geschrieben werden. Daraus folgt

$$\boxed{q'(t)p(t) - L\big(q(t), q'(t)\big) = \text{const.}} \tag{5.8}$$

Die links stehende Größe entspricht in der Mechanik der Energie des Systems.

(ii) *Erhaltung des Impulses:* Hängt L nicht vom Ort q ab (Homogenität des Systems bezüglich des Orts), dann ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{q'} = 0,$$

also

$$\boxed{p(t) = \text{const.}} \tag{5.9}$$

(iii) *Erhaltung der Geschwindigkeit:* Ist L vom Ort q und von der Zeit t unabhängig, dann gilt $L_{q'}(q'(t)) = \text{const}$ mit der Lösung

$$q'(t) = \text{const.} \tag{5.10}$$

Daraus folgt, dass die Geradenschar $q(t) = \alpha + \beta t$ Lösung von (5.7) ist.

Das Noethertheorem und die Erhaltungsgesetze in der Natur: Allgemein erhält man in der Variationsrechnung Erhaltungssätze aus Symmetrieeigenschaften der Lagrangefunktion und damit des Variationsintegrals. Das ist der Inhalt des berühmten Theorems von Emmy Noether aus dem Jahre 1918. Dieses Theorem findet man in 14.5.3 im Handbuch.

Verallgemeinerung auf Variationsprobleme mit höheren Ableitungen: Hängt die Lagrangefunktion L von Ableitungen bis zur Ordnung n ab, dann hat man die Euler-Lagrangeschen Gleichungen (5.4) durch die folgenden Relationen zu ersetzen:

$$\boxed{L_{q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{q'_j} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} L_{q''_j} - \ldots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} L_{q_j^{(n)}} = 0, \qquad j = 1, \ldots, F.}$$

Im Prinzip der stationären Wirkung muss man dann die Werte von $q_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, in den Randpunkten t_0 und t_1 vorschreiben.

5.1.2 Anwendungen

Kürzeste Verbindungslinie: Das Variationsproblem

$$\boxed{\begin{gathered}\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + q'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \min!\,, \\ q(t_0) = a, \qquad q(t_1) = b,\end{gathered}} \tag{5.11}$$

bedeutet, dass wir die kürzeste Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten (t_0, q_0) und (t_1, q_1). bestimmen. Die Euler-Lagrangesche Gleichung $(L_{q'})' - L_q = 0$ besitzt nach (5.10) die Geradenschar

$$q(t) = \alpha + \beta t$$

als Lösung. Die freien Konstanten α und β bestimmen sich eindeutig aus den Randbedingungen $q(t_0) = a$ und $q(t_1) = b$.

Satz: Eine Lösung von (5.11) muss die Gestalt

$$q(t) = a + \frac{b-a}{t_1 - t_0}(t - t_0)$$

besitzen. Das sind Geraden.

Lichtstrahlen in der geometrischen Optik (Fermatsches Prinzip): Das Variationsproblem

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} \frac{n(x, y(x))}{c} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x = \min!, \\ &y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1, \end{aligned}} \tag{5.12}$$

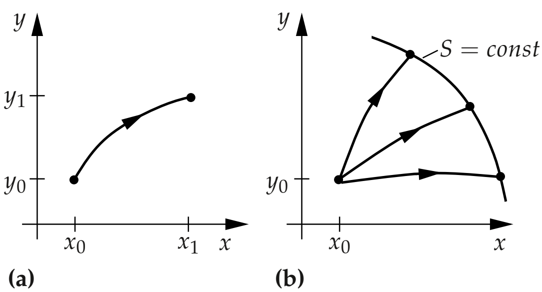

Abb. 5.2

stellt das *Grundproblem der geometrischen Optik* dar. Dabei ist $y = y(x)$ die Bahnkurve eines Lichtstrahls (c Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, $n(x, y)$ Brechungsindex im Punkt (x, y)). Das in (5.12) links stehende Integral ist gleich der Zeit, die das Licht in dem brechenden Medium benötigt, um vom Punkt (x_0, y_0) zum Punkt (x_1, y_1) zu gelangen (Abb. 5.2a). Somit stellt (5.12) das Prinzip von Fermat (1601–1665) dar:

> Lichtstrahlen bewegen sich so zwischen zwei Punkten, dass sie die kürzeste Zeit benötigen.

Die zu (5.12) gehörigen Euler-Lagrangeschen Gleichungen sind die *Grundgleichungen der geometrischen Optik:*:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{n(x, y(x))y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}\right) - n_y(x, y)\sqrt{1 + y'(x)^2} = 0.} \tag{5.13}$$

Spezialfall: Hängt der Brechungsindex $n = n(y)$ nicht von der Ortsvariablen x ab, dann folgt nach (5.8) aus der Gleichung (5.13) die Beziehung

$$\frac{n\big(y(x)\big)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = \text{const.} \tag{5.14}$$

Das Eikonal S und Wellenfronten: Wir fixieren den Punkt (x_0, y_0) und setzen

$$S(x_1, y_1) := \int_{x_0}^{x_1} \frac{n(x,y)}{c} \sqrt{1+y'(x)^2}\, dx.$$

Dabei ist $y = y(x)$ die Lösung des Variationsproblems (5.12), d. h., $S(x_1, y_1)$ entspricht der Zeit, die das Licht benötigt, um vom Punkt (x_0, y_0) zum Punkt (x_1, y_1) zu gelangen.

Die Funktion S heißt Eikonal und genügt der *Eikonalgleichung*

$$\boxed{S_x(x,y)^2 + S_y(x,y)^2 = \frac{n(x,y)^2}{c^2},} \tag{5.15}$$

die einen Spezialfall der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung darstellt (vgl. 5.1.3).

Die durch die Gleichung

$$S(x,y) = \text{const}$$

bestimmten Kurven $y = w(x)$ heißen *Wellenfronten*. Sie bestehen aus den Punkten, die vom festen Ausgangspunkt (x_0, y_0) durch Lichtstrahlen in der gleichen Zeit erreicht werden können (Abb. 5.2b).

Transversalität: Alle vom Punkt (x_0, y_0) ausgehenden Lichtstrahlen schneiden die Wellenfront transversal (d. h., der Schnittwinkel ist ein rechter Winkel).

▶ BEISPIEL: Gilt $n(x,y) \equiv 1$ für den Brechungsindex, dann sind die Lichtstrahlen nach (5.14) Geraden. Die Wellenfronten sind hier Kreise (Abb. 5.3).

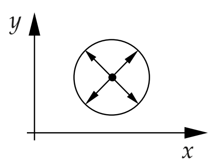

Abb. 5.3

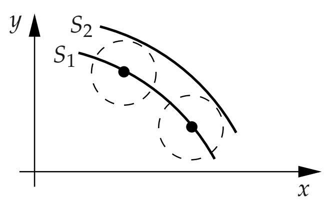

Abb. 5.4

Das Prinzip von Huygens (1629–1695) (Abb. 5.4): Betrachtet man eine Wellenfront

$$S\big(x, w_1(x)\big) = S_1$$

und lässt man von jedem Punkt dieser Wellenfront Lichtstrahlen starten, dann erreichen diese nach der Zeit t eine zweite Wellenfront

$$S\big(x, w_2(x)\big) = S_2$$

mit $S_2 := S_1 + t$. Diese zweite Wellenfront kann man als Einhüllende von „Elementarwellen“ erhalten. Das sind diejenigen Wellenfronten, die von einem festen Punkt nach Ablauf der Zeit t erzeugt werden.

Nichteuklidische hyperbolische Geometrie und Lichtstrahlen: Das Variationsproblem

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{y}\,\mathrm{d}x = \min!, \\ y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1, \end{array}} \tag{5.16}$$

erlaubt zwei Interpretationen.

(i) Im Rahmen der geometrischen Optik beschreibt (5.16) die Bewegung von Lichtstrahlen in einem Medium mit dem Brechungsindex $n = 1/y$. Aus (5.14) ergibt sich, dass die Lichtstrahlen die Gestalt

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2 \tag{5.17}$$

besitzen. Das sind Kreise mit dem Mittelpunkt auf der x-Achse (Abb. 5.5).

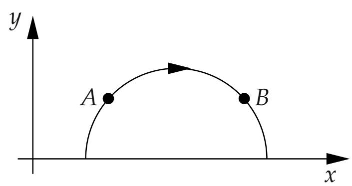

Abb. 5.5

(ii) Wir führen auf der oberen Halbebene die Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$$

ein. Wegen

$$\int \mathrm{d}s = \int \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{y}\,\mathrm{d}x$$

stellt (5.16) das Problem der kürzesten Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten $A(x_0, y_0)$ und $B(x_1, y_1)$ dar. Die Kreise (5.17) sind die „Geraden“ dieser Geometrie, die mit der nichteuklidischen hyperbolischen Geometrie des Poincaré-Modells identisch ist (vgl. 3.2.8).

Das berühmte Brachystochronenproblem von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1696: Im Juniheft der Leipziger Acta Eruditorum (Zeitschrift der Gelehrten) veröffentlichte Johann Bernoulli das folgende Problem. *Gesucht wird die Bahnkurve eines Massenpunktes, der sich unter dem Einfluss der Schwerkraft in kürzester Zeit vom Punkt A zum Punkt B bewegt* (Abb. 5.6).

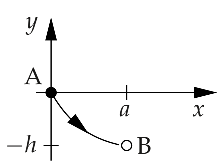

Abb. 5.6

Dieses Problem markiert den Beginn der Variationsrechnung. Bernoulli stand noch nicht die Euler-Lagrangesche Gleichung zur Verfügung, die wir jetzt benutzen werden.

Lösung: Das Variationsproblem lautet

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^a \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{-y}}\,\mathrm{d}x = \min!, \\[2ex] y(0)=0, \qquad y(a)=-h. \end{array}} \tag{5.18}$$

Die zugehörige Euler-Lagrangesche Gleichung (5.14) ergibt die Lösung

$$x = C(u - \sin u), \qquad y = C(\cos u - 1), \qquad 0 \le u \le u_0,$$

wobei die Konstanten C und u_0 aus der Bedingung $y(a) = -h$ zu bestimmen sind. Das ist ein *Zykloidenbogen*.

Das Fallgesetz für einen Stein: Die Lagrangefunktion lautet:

$$\begin{aligned} L &= \text{kinetische Energie minus potentielle Energie} \\ &= \frac{1}{2}my'^2 - mgy \end{aligned}$$

(m Masse des Steins, g Schwerebeschleunigung). Daraus ergibt sich die Euler-Lagrangesche Gleichung

$$\boxed{my'' + mg = 0}$$

mit der Lösung $y(t)$ für die Höhe des Steins zur Zeit t:

$$\boxed{y(t) = h - vt - \frac{gt^2}{2}.}$$

Dabei ist h die Höhe und v die Geschwindigkeit des Steins zur Anfangszeit $t = 0$. Das ist das *Fallgesetz* von Galilei (1564–1642).

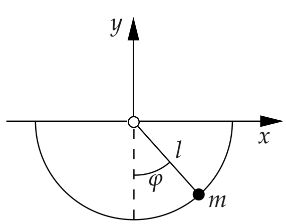

Abb. 5.7 Kreispendel

Das Kreispendel und die Methode der dem Problem angepassten Koordinaten von Lagrange (Abb. 5.7): Für die Bewegung $x = x(t)$, $y = y(t)$ eines Kreispendels im Schwerefeld der Erde in kartesischen Koordinaten lautet die Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned} L &= \text{kinetische Energie} - \text{potentielle Energie} \\ &= \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2) - mgy. \end{aligned}$$

Bei dem zugehörigen Variationsproblem ist jedoch die Nebenbedingung

$$x(t)^2 + y(t)^2 = l^2$$

zu berücksichtigen (m Pendelmasse, l Pendellänge, g Schwerebeschleunigung). Bei diesem Zugang muss man die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren benutzen (vgl. 5.1.6).

Die Behandlung dieses Problems wird jedoch viel einfacher, wenn man Polarkoordinaten verwendet. Dann wird die Bewegung allein durch die Winkelgleichung

$$\boxed{\varphi = \varphi(t)}$$

beschrieben, wobei die *Nebenbedingungen völlig entfallen*. Es gilt

$$x(t) = l\,\sin\varphi(t), \qquad y(t) = -l\,\cos\varphi(t).$$

Wegen $x'(t) = l\varphi'(t)\cos\varphi(t)$, $y'(t) = l\varphi'(t)\sin\varphi(t)$ und $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ erhalten wir für die Lagrangefunktion den Ausdruck

$$\boxed{L = \frac{1}{2}ml^2\varphi'^2 + mgl\,\cos\varphi.}$$

Die Euler-Lagrangesche Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_{\varphi'} - L_\varphi = 0$$

ergibt

$$\boxed{\varphi'' + \omega^2\sin\varphi = 0}$$

mit $\omega^2 = g/l$. Ist φ_0 der maximale Ausschlag des Pendels $(0 < \varphi_0 < \pi)$, dann ergibt sich die Bewegung $\varphi = \varphi(t)$ aus der Gleichung

$$2\omega t = \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{k^2 - \sin^2\frac{\xi}{2}}}$$

mit $k = \sin\dfrac{\varphi_0}{2}$. Die Substitution $\sin\dfrac{\varphi}{2} = k\sin\psi$ liefert das elliptische Integral

$$\boxed{\omega t = \int_0^\psi \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\eta}}\,.}$$

Die Schwingungsdauer T des Pendels erhält man durch die berühmte Formel:

$$\boxed{T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K(k)}$$

mit dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4} + O(k^4)\right), \qquad k \to 0.$$

Die Näherungsformel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right)$$

ist bei maximalen Amplituden φ_0 die kleiner als $70°$ sind, mindestens bis auf 1 Prozent richtig.

Das Kreispendel für kleine Ausschläge und der harmonische Oszillator: Für kleine Ausschläge φ des Pendels gilt $\cos\varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2} + \ldots$ Bis auf eine unwesentliche Konstante lautet dann die Lagrangefunktion näherungsweise

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \varphi'^2 - \frac{1}{2} mgl\varphi^2.$$

Das zugehörige Variationsproblem

$$\int_{t_0}^{t_1} L \, dt = \text{stationär!},$$

$$\varphi(t_0) = a, \qquad \varphi(t_1) = b,$$

führt auf die Euler-Lagrangesche Gleichung

$$\boxed{\varphi'' + \omega^2 \varphi = 0}$$

mit $\omega^2 = g/l$ und der Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

wobei die maximale Amplitude φ_0 und die Phase α aus den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \beta$ und $\varphi'(0) = \gamma$ folgen. Für die Schwingungsdauer ergibt sich jetzt

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.}$$

Weitere wichtige Variationsprobleme der Geometrie und Physik:

(i) Minimalflächen (vgl. 5.2.2 und 18.12 im Handbuch).

(ii) Kapillarflächen und Raumfahrtexperimente (vgl. 18.12 im Handbuch).

(iii) Stringtheorie und Elementarteilchen (vgl. 18.13 im Handbuch).

(iv) Geodätische Linien in der Riemannschen Geometrie (vgl. 16.2.5 im Handbuch).

(v) Nichtlineare Elastizitätstheorie (vgl. 14.6 im Handbuch).

(vi) Balkenbiegung und Bifurkation (vgl. 14.6.5 im Handbuch).

(vii) Nichtlineare stationäre Erhaltungsgleichungen der Rheologie für sehr zähe Flüssigkeiten und plastische Materialien (vgl. 14.5.4 im Handbuch).

(viii) Bewegung eines Teilchens in der Einsteinschen speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie (vgl. 16.5.2 im Handbuch).

(ix) Die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie für das Gravitationsfeld (vgl. 16.5.2 im Handbuch).

(x) Die Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik (vgl. 10.2.9 im Handbuch).

(xi) Quantenelektrodynamik für Elektronen, Positronen und Photonen (vgl. 14.8 im Handbuch).

(xii) Eichfeldtheorie und Elementarteilchen (vgl. 14.8 im Handbuch).

5.1.3 Die Hamiltonschen Gleichungen

Es liegt im Wesen der Mathematik, dass jeder wirkliche Fortschritt stets Hand in Hand geht mit der Auffindung schärferer Hilfsmittel und einfacherer Methoden... Der einheitliche Charakter der Mathematik liegt im inneren Wesen dieser Wissenschaft begründet; denn die Mathematik ist die Grundlage alles exakten naturwissenschaftlichen Erkennens.

David Hilbert
Pariser Vortrag, 1900

Im Anschluss an die Arbeiten von Euler und Lagrange im 18. Jahrhundert hatte Hamilton (1805–1865) die geniale Idee, die Methoden der geometrischen Optik auf die Lagrangesche Mechanik zu übertragen. Das führt zu dem folgenden Schema:

Lichtstrahlen	$\longrightarrow$	Bahnkurven von Teilchen, Hamiltonsche kanonische Gleichungen
Eikonal S	$\longrightarrow$	Wirkungsfunktion S
Eikonalgleichung und Wellenfronten	$\longrightarrow$	Hamilton–Jacobische Differentialgleichung
Fermatsches Prinzip	$\longrightarrow$	Hamiltonsches Prinzip der stationären Wirkung.

Die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden durch ein neues System erster Ordnung ersetzt,

$$\boxed{\text{die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen.}}$$

Dadurch wird es möglich, auf die klassische Mechanik den Apparat der Theorie dynamischer Systeme auf Mannigfaltigkeiten (Phasenräumen) anzuwenden. Es zeigt sich dabei, dass hinter der klassischen Mechanik eine Geometrie steht, die sogenannte symplektische Geometrie (vgl. 1.13.1.7 und 15.6 im Handbuch). Ende des 19. Jahrhunderts erkannte Gibbs (1839–1903), dass man die Hamiltonsche Formulierung der Mechanik bequem benutzen kann, um Systeme mit großer Teilchenzahl (z. B. Gase) im Rahmen der statistischen Physik zu behandeln. Ausgangspunkt ist dabei die aus der symplektischen Geometrie resultierende Tatsache, dass die Hamiltonsche Strömung das Phasenraumvolumen invariant lässt (Satz von Liouville).

Die Wirkung als fundamentale Größe in der Natur : Unter Wirkung versteht man eine physikalische Größe, die die Dimension

$$\boxed{\text{Wirkung} = \text{Energie mal Zeit}}$$

besitzt. Im Jahre 1900 formulierte Max Planck (1858–1947) seine epochale Quantenhypothese, wonach die Wirkungen in unserer Welt nicht beliebig klein sein können. Die kleinste Einheit der

Wirkung ist das Plancksche Wirkungsquantum

$$\boxed{\mathrm{h} = 6.626 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}.}$$

Das war der Schlüssel zur Schaffung der Quantentheorie, die neben der Einsteinschen Relativitätstheorie aus dem Jahre 1905 die Physik völlig revolutionierte (vgl. 1.13.2.11ff und 14.9 im Handbuch).

Der Hamiltonsche Formalismus stellt eine fundamentale Formulierung physikalischer Gesetze dar, die der *Ausbreitung von Wirkung* in unserer Welt besonders gut angepasst ist. Die Fruchtbarkeit dieses Formalismus zeigt sich darin, dass man ihn zur Quantisierung von klassischen Feldtheorien im Rahmen der Quantenmechanik und allgemeiner im Rahmen der Quantenfeldtheorie benutzen kann (kanonische Quantisierung oder Feynmansche Quantisierung unter Verwendung des Pfadintegrals).

> Der tiefere Sinn der Mechanik wird erst deutlich, wenn man nach Hamilton Ort und Impuls als Einheit auffasst und die Ausbreitung der Wirkung studiert.

Das enge Verhältnis zwischen Ort und Impuls wird in der Quantenmechanik besonders deutlich. Danach kann man Ort q und Impuls p nicht gleichzeitig genau messen. Die Dispersionen Δq und Δp genügen vielmehr der Ungleichung

$$\boxed{\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.}$$

(Heisenbergsche Unschärferelation). Dabei setzen wir $\hbar := \mathrm{h}/2\pi$.

Zusammenhang mit der modernen Steuerungstheorie: Die Hamiltonsche Mechanik war zugleich in den Jahren um 1960 das Vorbild für die Schaffung der optimalen Steuerungstheorie auf der Basis des Pontrjaginschen Maximumprinzips (vgl. 5.3.3).

Im Folgenden beschreiben wir die Bewegung von Teilchen durch eine Gleichung der Form

$$\boxed{q = q(t)}$$

mit der Zeit t und den Lagekoordinaten $q = (q_1, \ldots, q_F)$. Dabei heißt F die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems. Die Koordinaten q_j sind in der Regel keine kartesischen Koordinaten, sondern dem Problem angepasste Koordinaten (z. B. der Auslenkungswinkel φ beim Kreispendel; vgl. Abb. 5.7).

Das Hamiltonsche Prinzip der stationären Wirkung:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} L\big(q(t), q'(t), t\big)\, \mathrm{d}t = \text{stationär!}, \\ &q(t_0) = a, \qquad q(t_1) = b. \end{aligned}} \tag{5.19}$$

Dabei sind $t_0,\ t_1 \in \mathbb{R}$ und $a,\ b \in \mathbb{R}^F$ fest vorgegeben. Das links stehende Integral besitzt die Dimension einer Wirkung.

Euler-Lagrangesche Gleichungen: Für eine hinreichend reguläre Situation ist das Problem (5.19) äquivalent zu den folgenden Gleichungen:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{q_j'}(q(t), q'(t), t) - L_{q_j}(q(t), q'(t), t) = 0, \qquad j = 1, \ldots, F.} \tag{5.20}$$

Legendretransformation: Wir führen neue Variable

$$\boxed{p_j := \frac{\partial L}{\partial q_j'}(q, q', t), \qquad j = 1, \ldots, F} \tag{5.21}$$

ein, die wir *verallgemeinerte Impulse* nennen. Ferner setzen wir voraus, dass wir die Gleichung (5.21) nach q' auflösen können:[6]

$$q' = q'(q, p, t).$$

Anstelle der Lagrangefunktion L, wird die Hamiltonsche Funktion $H = H(q, p, t)$ benutzt:

$$\boxed{H(q, p, t) := \sum_{j=1}^{F} q_j' p_j - L(q, q', t).}$$

Dabei ist q' durch $q'(q, p, t)$ zu ersetzen. Die Transformation

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (q, q', t) & \mapsto & (q, p, t), \\ \text{Lagrangefunktion } L & \mapsto & \text{Hamiltonfunktion } H \end{array}} \tag{5.22}$$

heißt *Legendretransformation*. Wir bezeichnen den F-dimensionalen q-Raum M als Konfigurationsraum und den $2F$-dimensionalen (q, p)-Raum als *Phasenraum*. Wir fassen dabei M als eine offene Menge des $\mathbb{R}^F$ und den Phasenraum als eine offene Menge des $\mathbb{R}^{2F}$ auf. Die volle Kraft der Theorie kommt erst zum Tragen, wenn man die Sprache der Mannigfaltigkeiten benutzt.[7]

Die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen: Aus den Euler-Lagrangeschen Gleichungen folgt durch die Legendretransformation das neue System erster Ordnung[8]

$$\boxed{p_j' = -H_{q_j}, \qquad q_j' = H_{p_j}, \qquad j = 1, \ldots, F.} \tag{5.23}$$

[6] Ist die strenge Legendrebedingung

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_j' \partial q_k'}(q_0, q_0', t_0) \right) > 0$$

erfüllt, dann lässt sich (5.21) nach dem Satz über implizite Funktionen in einer Umgebung von (q_0, q_0', t_0) eindeutig nach q' auflösen.

[7] Dann ist M eine reelle F-dimensionale Mannigfaltigkeit, und der Phasenraum entspricht dem Kotangentialbündel T^*M von M. Die tiefere Bedeutung der Legendretransformation besteht darin, dass sie einen Übergang vom Tangentialbündel TM der Konfigurationsmannigfaltigkeit M zum Kotangentialbündel T^*M bewirkt und T^*M eine natürliche symplektische Struktur trägt (vgl. 15.6 im Handbuch).

[8] Ausführlich geschrieben lautet (5.23):

$$p_j'(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q(t), p(t), t), \qquad q_j'(t) = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q(t), p(t), t).$$

Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung:

$$\boxed{S_t(q,t) + H(q, S_q(q,t), t) = 0.} \tag{5.24}$$

Zwischen dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen (5.23) und der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (5.24) besteht ein enger Zusammenhang.

(i) Aus einer mehrparametrigen Lösung von (5.24) kann man Lösungen von (5.23) aufbauen.

(ii) Umgekehrt erhält man aus Lösungsscharen von (5.23) Lösungen von (5.24).

Das findet man in 1.13.1.3 In der geometrischen Optik steht hinter (i) die Konstruktion von Lichtstrahlen aus Wellenfronten, während (ii) dem Aufbau von Wellenfronten aus Scharen von Lichtstrahlen entspricht.

Die Hamiltonsche Strömung: Wir nehmen an, dass die Hamiltonfunktion H nicht von der Zeit t abhängt, und interpretieren die Lösungen

$$q = q(t), \qquad p = p(t) \tag{5.25}$$

der kanonischen Gleichungen als Bahnkurven der Flüssigkeitsteilchen einer Strömung (Abb. 5.8).

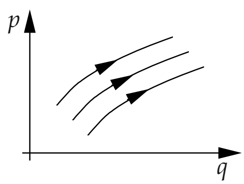

Abb. 5.8 Hamiltonsche Strömung im Phasenraum

(i) *Erhaltung der Energie:* Die Funktion H ist eine Erhaltungsgröße der Hamiltonschen Strömung, d. h., es gilt

$$\boxed{H(q(t), p(t)) = \text{const.}}$$

Die Funktion H besitzt die Bedeutung der Energie des Systems.

(ii) *Erhaltung des Phasenvolumens (Satz von Liouville):* Die Hamiltonsche Strömung ist volumentreu.[9]

Somit verhält sich die Hamiltonsche Strömung wie eine inkompressible Flüssigkeit.

Die Bedeutung der Wirkungsfunktion S: Wir fixieren einen Punkt q_* zur Zeit t_0 und setzen

$$\boxed{S(q_{**}, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), q'(t), t)\, \mathrm{d}t.}$$

Im Integranden wählen wir eine Lösung $q = q(t)$ der Euler-Lagrangeschen Gleichung (5.20), die den Randbedingungen

$$q(t_0) = q_*, \qquad q(t_1) = q_{**}$$

genügt. Wir nehmen an, dass diese Lösung eindeutig bestimmt ist.

[9] Die Flüssigkeitsteilchen eines Gebiets G_0 zur Zeit $t = 0$ befinden sich zur Zeit t in einem Gebiet G_t welches das gleiche Volumen wie G_0 besitzt.

Satz: Liegt eine hinreichend reguläre Situation vor, dann ist die Wirkungsfunktion S eine Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung (5.24).

Irreguläre Situationen entsprechen in der geometrischen Optik dem Schneiden oder Berühren von Wellenfronten (Kaustiken).

Poissonklammern und Erhaltungsgrößen: Sind $A = A(q, p, t)$ und $B = B(q, p, t)$ Funktionen, dann definieren wir die Poissonklammer durch

$$\{A, B\} := \sum_{j=1}^{F} A_{p_j} B_{q_j} - A_{q_j} B_{p_j}.$$

Es gilt

$$\boxed{\{A, B\} = -\{B, A\},}$$

also speziell $\{A, A\} = 0$. Ferner hat man die Jacobi-Identität

$$\boxed{\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.}$$

Liealgebra: Die reellen C^∞-Funktionen $A = A(q, p)$ bilden auf dem Phasenraum bezüglich der Addition, der Multiplikation mit reellen Zahlen und bezüglich der Poissonklammer $\{A, B\}$ eine unendlichdimensionale Liealgebra.

Poissonsche Bewegungsgleichung: Entlang der Bahnkurven (5.25) einer Hamiltonschen Strömung gilt für jede hinreichend glatte Funktion $A = A(q, p, t)$ die Beziehung [10]

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \{H, A\} + A_t.} \tag{5.26}$$

Satz: Hängt A nicht von t ab und gilt $\{H, A\} = 0$, dann ist A eine Erhaltungsgröße, d. h., man hat

$$\boxed{A\big(q(t), p(t)\big) = \text{const}}$$

entlang der Bahnkurven der Hamiltonschen Strömung.

▶ BEISPIEL 1: Hängt die Hamiltonfunktion $H = H(q, p)$ nicht von der Zeit ab, dann ist H eine Erhaltungsgröße der Hamiltonschen Strömung. Das ergibt sich aus der trivialen Beziehung $\{H, H\} = 0$.

▶ BEISPIEL 2: Für die Poissonklammern zwischen Ort und Impuls gilt

$$\boxed{\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}, \qquad \{q_j, q_k\} = 0, \qquad \{p_j, p_k\} = 0.} \tag{5.27}$$

Aus (5.26) folgt ferner

$$\boxed{q_j' = \{H, q_j\}, \qquad p_j' = \{H, p_j\}, \qquad j = 1, \ldots, F.} \tag{5.28}$$

Das sind die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen.

[10] Explizit entspricht das der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(q(t), p(t), t) = \{A, H\}(q(t), p(t), t) + A_t(q(t), p(t), t).$$