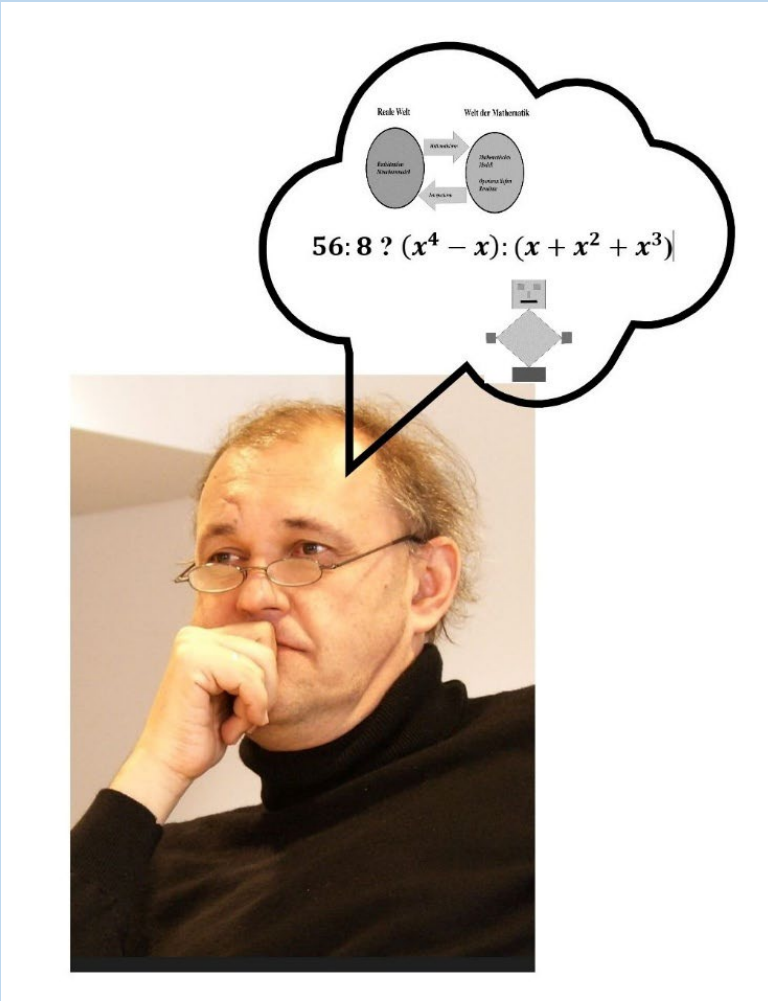
Karl Josef Fuchs

MATHEMATISCHES DENKEN



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Karl Josef Fuchs

MATHEMATISCHES DENKEN

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über https://dnb.de abrufbar.

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
https://www.winterwork.de

Münster 2025 – E-Book
ISBN 978-3-95987-332-1
https://doi.org/10.37626/GA9783959873321.0

ZUM GELEIT

Mathematisches Denken stellt eine Besonderheit der kognitiven Fähigkeit des Denkens dar. Zum Begriff selbst gibt es zahlreiche Konzepte, die von unterschiedlichen Parametern bestimmt sind.

Die Parameter werden in diesem Buch in einzelne Kategorien aufbereitet:

- *Kategorie Basic Ideas, Big Ideas, Fundamentale Ideen*
- *Kategorie Grundvorstellungen*
- *Kategorie Muster und Struktur*
- *Kategorie Veranschaulichung*

Die einzelnen Teildisziplinen der Mathematik bedingen spezifische Formen des Denkens, die diskutiert werden.

Das Gehirn wird als Zentrum der Konstruktion bzw. Rekonstruktion von Wissen be-handelt. Konzepte zur Funktion des Gedächtnisses werden behandelt.

Mathematisches Denken setzt unterschiedliche intra- bzw. interindividuelle Persönlichkeitsmerkmale voraus:

- Kognitionspsychologische Merkmale wie INTELLIGENZ, KREATIVITÄT & UMGANG MIT MATHEMATIK
- Selbstbezogenes Merkmal wie das SELBSTKONZEPT
- Handlungsbezogene Merkmale wie PERSISTENZ & INTERESSE

Ich wünsche viel Freude beim Lesen des Textes und hoffe, dass ich mit diesem Buch einige Anregungen für eine Reflexion der Profession des / der Mathematikers / Mathematikerin bzw. des / der Mathematiklehrers / Mathematiklehrerin anbieten kann.

Karl Josef Fuchs Salzburg, 2025

Inhaltsverzeichnis

1. Zur Typologie Mathematischen Denkens

Eine Aufgabe, die im Fokus der Fachdidaktik Mathematik steht, ist die Charakterisierung *Mathematischen Denkens*. Ausgangspunkt dieser Charakterisierung ist die kognitive Fähigkeit des Denkens, die der britische Psychologe Michael Willliam Eysenck und der irische Psychologe und Computerwissenschaftler Mark Thomas Gerad Keane in ihrer „Cognitive Psychology" etwa wie folgt beschreiben:

Key processes involved in object recognition

- Overlapping: deciding where an object ends and another begins.
- Accurate recognition of objects over varying distances and orientations
- Allocating diverse visual stimuli to the same category of objects (Eysenck & Keane 2000, S. 83)

Diese Charakterisierung von Eysenck und Keane wählen wir auch deshalb, da in diesem Buch die Kategorien

- Pattern recognition (Kapitel 2.3)
- Reasoning and Deduction (Kapitel 2.4)
- Basic concepts (Kapitel 2.1)
- Visual Representations

behandelt werden, die unter dem Begriff des Mathematischen Denkens in den Folgekapiteln diskutiert werden.

Eine Beschreibung „Wie man mathematisch denkt" findet sich im 2012 erschienen gleichnamigen Buch von Kevin Houston und Roman Girgensohn. Mathematisch denken repräsentiert sich nach Ansicht der Autoren unter anderem in den Tätigkeiten

- Problemlösen nach dem *Vierpunkteplan* des österreichisch – ungarischen Mathematikers George (György) Pólya in den Schritten:
    1. Problem verstehen
    2. Plan entwickeln
    3. Plan ausführen
    4. Reflexion (Blick zurück)

- Schreiben und Lesen Mathematischer Texte
- Analysieren und Zerlegen einzelner Beweise
- Testen von Extremfällen einzelner Sätze

Alexander Salle und Christina Krause beziehen in ihrem Beitrag „Kognitive Funktionen von Gesten beim mathematischen Arbeiten" (2021) Theorien der *embodied cognition* in die Beschreibung mathematischer Denkprozesse ein. Nach dieser Theorie findet sich Mathematisches Denken auch in körperlichen Ausdrucksformen. In der mathematik-didaktischen Forschung werden vor allem Gesten als Ausdrucksformen untersucht. Die Einflüsse von Gesten (in der folgenden schematischen Darstellung (Abbildung 1.1) als Pfeile repräsentiert) auf das *Mathematische Denken* findet ihren Ausdruck in der *Gesture-for-Conceptualization-Hypothesis*.

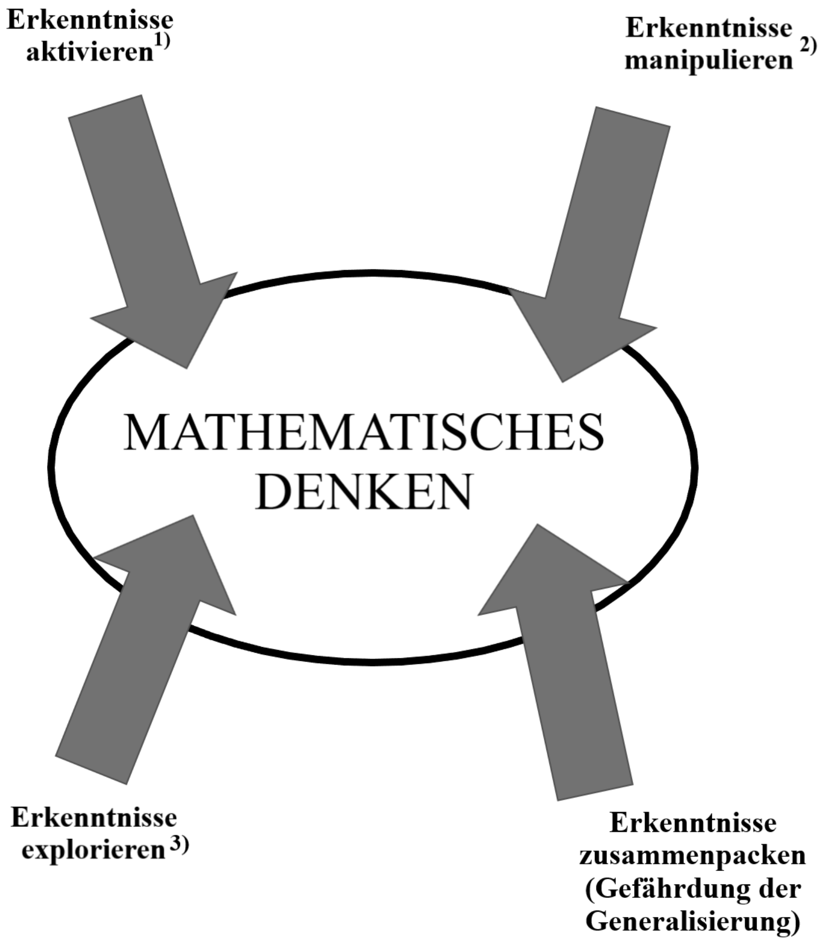


Abb. 1.1: *Gesture-for-Conceptualization-Hypothesis*

[1] "… First, gesture can help maintain the activation of spatio-motoric representations (Kapitel 2.4) that are already active, so that these representations do not decay during speaking or thinking [...].

Second, gestures can activate new spatio-motoric representations – ones that were not previously active – and this can, in turn, change the content of speech and thought. .." (Salle & Krause 2020, S. 128)
[2] " … because schematization via gesture reduces the amount of information to be processed. .." (Salle & Krause 2020, S. 128)
[3] "… People use gesture to explore different ways of conceptualizing a situation. Because gesture schematizes information, this search is efficient and effective. That is, schematization via gesture reduces the amount of information being considered at any given moment. This „distilled" information can be more easily focused on and evaluated for its relevance to the current goal. .." (Salle & Krause 2020, S. 128)

Im Skriptum zum Vorkurs "Einführung in Mathematisches Denken und Arbeiten" Mathematik für Mathematikstudierende beschreibt Theresa Kumpitsch *Mathematisches Denken* und Arbeiten als prozessorientiertes Arbeiten sowie Best – Practice Tipps in charakteristischen Themenbereichen (Abbildung 1.2).

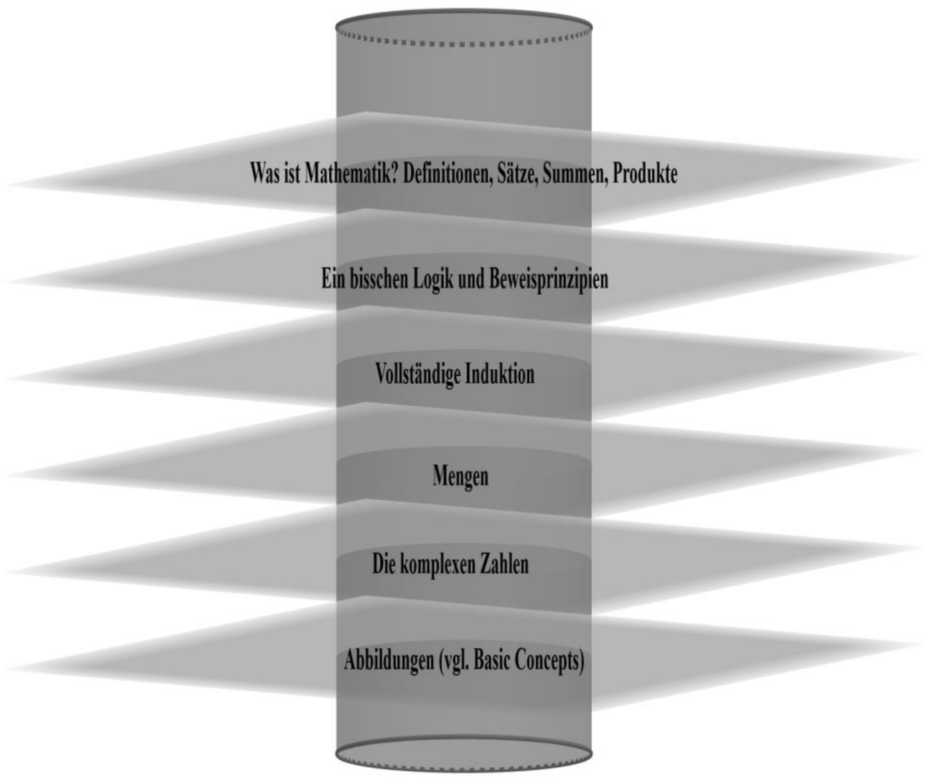


Abb. 1.2: Charakteristische Themenbereiche

2008 publizierte Volker Ulm ein Modell Mathematischen Denkens, das sich in drei Dimensionen vollzieht (Ulm 2008).

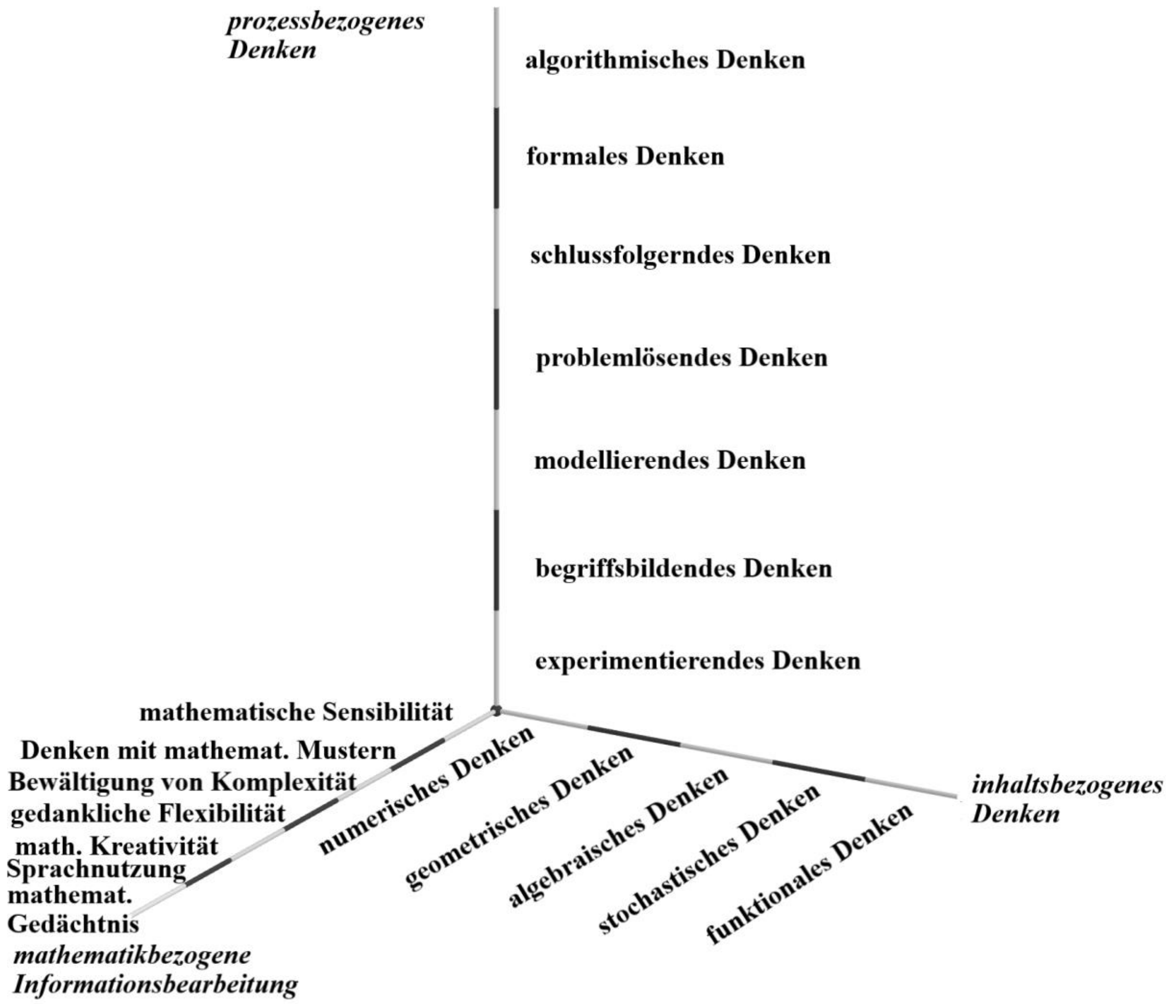


Abb. 1.3: Modell Mathematischen Denkens von Volker Ulm

Inhaltsbezogenes Denken
Mathematisches Denken vollzieht sich an mathematischen Inhalten. Über diese Inhaltsbereiche kann es klassifiziert werden:

- *Numerisches Denken*: z. B. Vorstellungen von Zahlen (natürliche Zahlen, Bruchzahlen, negative Zahlen, reelle Zahlen) entwickeln und nutzen, mit verschiedenen Zahlaspekten umgehen.
- *Geometrisches Denken*: z. B. Begriffe und mentale Vorstellungen von ebenen Figuren und räumlichen Körpern bilden und damit operieren, räumliche Situationen und zweidimensionale Darstellungen wechselseitig ineinander transformieren, in der Vorstellung räumlich sehen und räumlich denken, mit Symmetrie operieren.

- *Algebraisches Denken*: z. B. Rechengesetze erschließen und anwenden (Kommutativ-, Assoziativgesetz, …), mit Variablen, Termen und Gleichungen umgehen.
- *Stochastisches Denken*: z. B. kombinatorische Situationen durchdringen, Zufall mit Wahrscheinlichkeiten qualitativ und quantitativ erfassen, mit Statistiken umgehen.
- *Funktionales Denken*: z. B. Beziehungen zwischen Ursachen und Wirkungen verstehen, mit funktionalen Zusammenhängen – d. h. mit Abhängigkeiten einer Größe von einer anderen – operieren, verschiedene Darstellungsarten einer Funktion ineinander transformieren Funktionsterm, Graph, Wertetabelle, Verbalbeschreibung) (Kapitel 2.1). In diesem Zusammenhang sei auf den 1989 im Journal für Mathematikdidaktik erschienenen Beitrag „Funktionales Denken" von Hans-Joachim Vollrath verwiesen.

Diese inhaltsbezogenen Facetten mathematischen Denkens sind nicht unabhängig voneinander. Beispielsweise ist numerisches Denken eng mit geometrischem Denken verbunden, wenn man sich Zahlen als Punkte am Zahlenstrahl, als Streckenlängen oder als Vektoren vorstellt und wenn Operationen mit Zahlen durch Operationen mit diesen geometrischen Bildern visualisiert werden. Stochastisches Denken hängt mit numerischem Denken zusammen, wenn etwa das Zählprinzip der Kombinatorik als Anwendung der Multiplikation gesehen wird oder Wahrscheinlichkeiten mit Verhältnissen ausgedrückt werden.

Prozessbezogenes Denken

Mathematisches Arbeiten bedeutet das gedankliche Vollziehen mathematiktypischer Prozesse. Diese Arten mathematischen Tätigseins stellen eine zweite Dimension mathematischen Denkens dar:

- *Experimentierendes Denken*: z. B. mathematikhaltige Phänomene erkunden, Beispiele betrachten, Situationen variieren, Beobachtungen gedanklich strukturieren und systematisieren, explorativ gewonnene Vermutungen formulieren.
- *Begriffsbildendes Denken*: z. B. aus der Analyse von Beispielen allgemeine mathematische Begriffe schaffen – etwa für Objekte wie „Kegel", für Eigenschaften wie „punktsymmetrisch" oder für Relationen wie „ist Teiler von", Begriffe definieren, Objekte klassifizieren, Unter- und Oberbegriffe bilden, Begriffe vernetzen.
- *Modellierendes Denken*: z. B. Sachsituationen unter mathematischen Gesichtspunkten analysieren, sie mit mathematischen Modellen beschreiben und bearbeiten, Modellergebnisse interpretieren und bewerten.
- *Problemlösendes Denken*: z. B. problemhaltige Situationen bearbeiten, Problemlösestrategien wie etwa systematisches Probieren, Umstrukturieren, Rückwärtsarbeiten nutzen, Lösungen entwickeln und klar ausarbeiten.
- *Schlussfolgerndes Denken*: z. B. folgerichtig argumentieren und begründen, Kausalketten von Tatsachen oder Ereignissen konstruieren oder verfolgen, Beweise und Beweisstrategien verstehen oder entwickeln.

- *Formales Denken*: z. B. mit formalen Symbolen wie Ziffern oder Variablen operieren, mit mathematischen Symbolen denen, mit Formeln, Termen oder Gleichungen gedanklich operieren.
- *Algorithmisches Denken*: z. B. Rechenalgorithmen wie etwa die schriftlichen Rechenverfahren nutzen, geometrische Konstruktionsverfahren anwenden, etwa zur Konstruktion einer Winkelhalbierenden, Gleichungen mit Äquivalenzumformungen lösen, reelle Zahlen näherungsweise bestimmen (z.B. Nullstellen von Funktionen, Kreiszahl π, …) (Kapitel 3).

Die Prozesse mathematiktypischen Tätigseins sind nicht isoliert voneinander zu sehen, sie können bei der Beschäftigung mit Mathematik nebeneinander oder miteinander verwoben verlaufen. Beispielsweise kann eine tragfähige Begriffsbildung die Grundlage für Modellierungsprozesse darstellen, algorithmisches oder schlussfolgerndes Denken können Bestandteile von Problemlösungen sein.

Mathematikbezogene Informationsbearbeitung
Mathematisches Denken umfasst die Wahrnehmung, die Verarbeitung, die Speicherung und den Abruf mathematikbezogener Information. Diese auf kognitive Prozesse der Informationsbearbeitung fokussierte Sichtweise eröffnet eine dritte Dimension mathematischen Denkens:

- *Mathematische Sensibilität*: z. B. Mathematik in der Umwelt wahrnehmen, in mathematikhaltigen Situationen Besonderes und Interessantes erkennen, Fragen aufspüren, die Struktur von Problemstellungen erfassen, mit mathematischen Objekten gefühlvoll umgehen, die ästhetische Komponente mathematischer Sachverhalte empfinden.
- *Denken mit mathematischen Mustern*: z. B. in Beispielen zu Grunde liegende allgemeine Muster und Strukturen erkennen, konkrete Situationen abstrahieren, verallgemeinern, Analogien erkennen und nutzen, allgemeinen Einsichten auf Konkretes übertragen, mit Mustern operieren (Kapitel 2.3).
- *Bewältigung von Komplexität*: z. B. relevante Informationen aus komplexen Situationen herausfiltern, Informationen strukturieren, Gedankengänge durch Denken in übergeordneten Strukturen verkürzen, gedanklich mit mehreren Objekten parallel operieren.
- *Gedankliche Flexibilität*: z. B. Repräsentationsebenen wechseln (enaktiv, ikonisch, verbal, mathematisch-symbolisch, Abbildung 1.7), Situationen unter verschiedenen Blickwinkeln betrachten, Situationen umstrukturieren, gedankliche Prozesse umkehren.
- *Mathematische Kreativität*: z. B. zu einer mathematischen Situation Ideen und Assoziationen produzieren, divergent denken, gegebene Rahmen durchbrechen, Bekanntes in origineller Weise nutzen, phantasievolle Gedankengänge entwickeln, Querverbindungen herstellen.
- *Nutzung von Sprache*: z. B. mündlich oder schriftsprachlich dargestellte Situationen verstehen, Sprache zur Entwicklung und Darstellung mathematischer Überlegungen und Ergebnisse nutzen.

- *Mathematisches Gedächtnis*: z. B. mathematische Situationen und Ergebnisse, Schemata von Argumentationen sowie grundsätzliche Zugänge zu Problemen merken, Neues mit vorhandenem Wissen vernetzen, Wissen flexibel und situationsadäquat abrufen.

Auch hier ist die Strukturierung mathematikbezogener Informationsbearbeitungsprozesse nicht als überschneidungsfreie Einteilung zu sehen. Beispielsweise hilft das Denken mit mathematischen Mustern zur Bewältigung von Komplexität und zur effizienten Speicherung der Inhalte im Gedächtnis. Kreatives Denken kann durch Sprache angestoßen werden und wird mit Sprache kommuniziert.

Unsere Betrachtungen zur Typologie kognitiver Fähigkeiten im Kontext der Mathematik setzen wir mit dem Beitrag „Understanding the complexities of mathematical cognition: A multi-level framework" von Camilla Gilmore (2023) fort. Darin wird das Zusammenwirken der einzelnen Komponenten mathematischer Fähigkeiten wie folgt beschrieben:

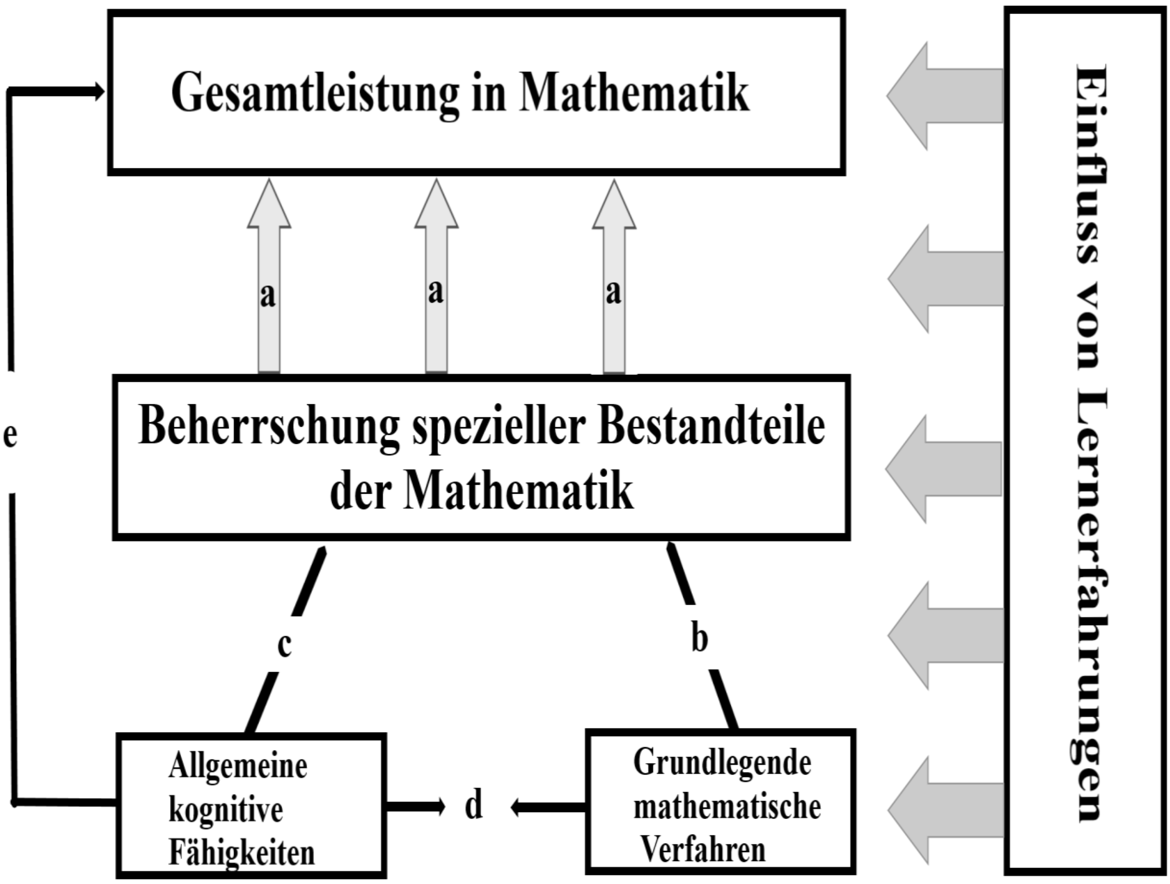


Abb. 1.4: Multi-level Framework mathematischer Fähigkeiten

In der Legende zur Abbildung erfahren wir zunächst Näheres zur Beherrschung spezieller Bestandteile der Mathematik sowie über die Grundlegenden mathematischen Verfahren. Anschließend teilt uns die Autorin von den Beziehungen der einzelnen Komponenten – repräsentiert durch die Pfeiltypen (a bis e) – mit.

Tabelle 1.1: Beherrschung spezieller Bestandteile der Mathematik / Grundlegende mathematische Verfahren – Explizite Nennungen

Beherrschung spezieller Bestandteile der Mathematik	Grundlegende mathematische Verfahren
Wissen über Zählsequenzen	Vergleich von einstelligen Zahlen
Zahlen-Fakten-Gewandtheit	Vergleich mit mehrstelligen Zahlen
Kopfrechnen	Nicht-symbolischer Größenvergleich
Schriftliche Rechenverfahren	Schätzung des Zahlenstrahls
Verstehen von arithmetischen Zusammenhängen	Numerische Auftragsverarbeitung
Lösen von Wortaufgaben	Räumlich-numerische Assoziationen
Adaptive Strategieauswahl	Ortswert-Verständnis
Algebraisches Denken	Intuitives geometrisches Wissen
Lösen von algebraischen Textaufgaben	Mustererkennung (vgl. Kapitel 2.3)
Zusammensetzung der Formen	Analoges Denken (vgl. Kapitel 2.4)

Tabelle 1.2: Markierter Pfeil / Zusammenhang zwischen Komponenten

Markierter Pfeil	Zusammenhang zwischen Komponenten
a – Pfeile	Beherrschung bestimmter Komponenten der Mathematik und mathematische Gesamtleistung.
b – Pfeil	Grundlegende mathematische Prozesse und Beherrschung bestimmter Komponenten der Mathematik.
c – Pfeil	Allgemeine kognitive Fähigkeiten und Kompetenzen mit spezifischen Komponenten der Mathematik.
d – Pfeil	Allgemeinen kognitive Fähigkeiten und grundlegende mathematische Prozesse.
e – Pfeil	Allgemeine kognitive Fähigkeiten und mathematische Gesamtleistungen.

Die Autor(inn)en Pamela Reyes-Sandander, Augsburg, und Jorge Soto-Andrade, Centro de Investigación Avanzada en Educación, Universidad de Chile, erweiterten in ihrem Beitrag „Mathematisches Denken. Grundvorstellungen und Metaphern“ (2011) die Charakterisierung des Denkens vom Standpunkt einer Entwicklungs- bzw. kognitiven Psychologie um die Charakterisierung *Mathematischen Denkens*, indem sie Mathematisches Denken vom Standpunkt der Fachdidaktik Mathematik durch die Dimensionen *Wahrnehmung*, *Inhalts-bezogenes Denken*, *Nichtrationale Fähigkeiten* sowie *Strategien und Prozeduren* (Abbildung 1.5) beschreiben.

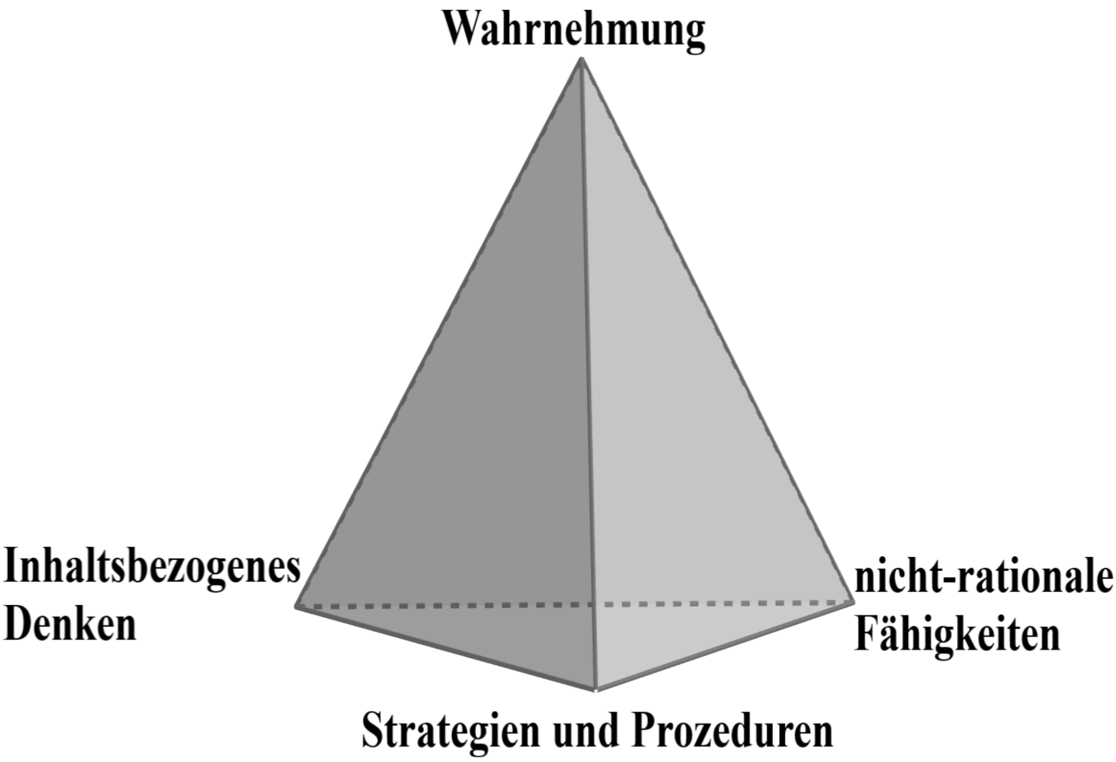


Abb. 1.5: Charakterisierung Mathematisches Denken

Mit *Wahrnehmung* wird nach Ansicht der Autor(inn)en die Annäherung an die Problemsituation beschrieben. So kann etwa die *Analogie* der neuen Situation zu einer bereits bekannten Situation festgestellt werden.

Strategien und Prozeduren beschreiben die Art und Weise wie die Problemlösung abläuft. *Algorithmen* benötigen dabei nur einen kognitiven Prozess, während etwa *Umstrukturierung* oder *Modellierung* mehrere kognitive Prozesse einfordern.

Inhaltsbezogenes Denken stimmt mit der Dimension *Inhaltsbezogenes Denken* im Modell von Volker Ulm überein und umfasst ebenso die Formen numerisches-, algebraisches-, geometrisches-, stochastisches- und funktionales Denken.

Das Merkmal *nichtrationale Fähigkeiten* bildet laut Ansicht der Autor(inn)en die Brücke zum alltäglichen Leben. Die Fähigkeiten „… *haben eine direkte Verbindung zu unserer Kultur, unserem Umfeld, unseren Emotionen und unserer Wahrnehmung. Beispiele: Intuition, Kreativität, Flexibilität, Sensibilität, Fantasie, usw. . Die vier Komponenten interagieren untereinander. Die Kommunikations-*

mittel, wie beispielsweise Strategien zu speichern oder wiederherzustellen geschieht anhand von Repräsentationen, Grundvorstellungen und Metaphern. ..“ (Reyes-Sandander & Soto-Andrade 2011, S. 685)

Fortsetzen wollen wir unsere Betrachtungen zur Typologie Mathematischen Denkens mit einer Charakterisierung aus dem Buch „Introduction to Mathematical Thinking“ (2012) von Keith Devlin. Darin heißt es: „*… mathematical thinking. This is not the same as “doing math,” which usually involves the application of procedures and some heavy duty symbolic manipulations. Mathematical thinking, by contrast, is a specific way of thinking about things in the world. It does not have to be about mathematics at all, though I would argue that certain parts of mathematics provide the ideal contexts for learning how to think that way … Mathematical thinking includes logical and analytic thinking as well as quantitative reasoning, all crucial abilities. ..*“ (Devlin 2012, Preface)

Rudolf vom Hofe und Jürgen Roth sehen in ihrer Publikation „Grundvorstellungen aufbauen“ (2023) *Grundvorstellungen* (kurz: GV) mit Mathematischem Denken und Handeln verbunden. Sie unterscheiden dabei zwischen *Primären* und *Sekundären Grundvorstellungen*.

> *Primäre Grundvorstellungen* haben ihren Ursprung in Handlungen mit realen Objekten; zum Beispiel „Hinzufügen“ (als GV der Addition) oder „Wegnehmen“ (als GV der Subtraktion). Diese Grundvorstellungen entwickeln sich schon lange vor der Schulzeit, z.B. aus dem spielerischen Umgang mit Spielsteinen, Äpfeln, Geld usw. .
> *Sekundäre Grundvorstellungen* entwickeln sich im Unterricht und basieren auf dem Umgang mit mathematischen Objekten wie Termen, Gleichungen oder Funktionen. Ein Beispiel ist das mentale Bewegen im Koordinatensystem, wenn man in Gedanken die *x*-Achse durchläuft und die davon abhängige Änderung des Funktionswerts betrachtet. Dies entspricht der „Kovariation“ als einer der wichtigen Grundvorstellungen für funktionales Denken (vom Hofe & Roth 2023, S. 2; Modell Mathematischen Denkens von Volker Ulm sowie Kapitel 2.1).

Grundvorstellungen spielen eine besondere Rolle beim *Modellbilden* (und zwar beim Übergang von der Realen Welt in die Welt der Mathematik wie wir es in den verschiedenen Modellierungskreisläufen in Kapitel 2.1 kennenlernen werden).