

**Sarah Beumann & Sebastian Geisler (Hrsg.)**

**EXPERIMENTIEREN IM  
MATHEMATIKUNTERRICHT  
AKTUELLE BEITRÄGE AUS FORSCHUNG UND PRAXIS**



**WTM**  
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien  
Münster

**Sarah Beumann & Sebastian Geisler (Hrsg.)**

# **EXPERIMENTIEREN IM MATHEMATIKUNTERRICHT**

**AKTUELLE BEITRÄGE AUS FORSCHUNG UND PRAXIS**

**WTM**  
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien  
Münster

**Bibliografische Information der Deutschen  
Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über <http://dnb.de> abrufbar.

Druck durch / Printed by  
winterwork  
04451 Borsdorf  
<http://www.winterwork.de>

Covergrafik: Sarah Beumann

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

All Rights Reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form, electronic, mechanical, recording, photocopying, or otherwise, without the permission of the copyright holder.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien,  
Ferdinand-Freiligrath-Str. 26, Münster  
Münster 2024 – E-Book  
ISBN 978-3-95987-190-7  
<https://doi.org/10.37626/GA9783959871907.0>

# Inhalt

---

Vorwort.....	3
<i>Sarah Beumann und Sebastian Geisler</i>	
Die Rolle des Experimentierens in Mathematik und Mathematikunterricht.....	5
Aktuelle Beiträge aus der Forschung.....	
15	
<i>Wiebke Auhagen</i>	
Experimentieren als potenzialorientierter Zugang zum Umgang mit Diversität im Mathematikunterricht.....	17
<i>Sarah Beumann</i>	
Jonas – Fallstudie eines mathematisch begabten Schülers zur Veränderung mathematischer Beliefs durch innermathematische Experimente.....	33
<i>Ramona Hagenkötter, Katrin Rolka, Valentina Nachtigall und Nikol Rummel</i>	
Typische mathematische Tätigkeiten beim realen mathematischen experimentieren aus Sicht von Schüler*innen und Lehrer*innen.....	49
<i>Sebastian Geisler und Stefanie Rach</i>	
Students' situational interest concerning modelling tasks with experiments.....	68
<i>Julia Rey und Michael Meyer</i>	
Von der Empirie zur Theorie und zurück. Experimente zur Hypothesenbildung, -prüfung und -begründung.....	83
Aktuelle Beiträge aus der Praxis.....	
101	
<i>Dirk Weber</i>	
Komplexe außermathematische Experimente mit digitalen Medien in der Grundschule? Die Tablet-App Physical Phone Experiments.....	103
<i>Ralf Benölken und Wiebke Auhagen</i>	
Fachsubstanz als Anlass für innermathematische Experimente – Die Sicht Lernender.....	111
<i>Michael Kleine</i>	
Origami – Experimentelle Zugänge mit Papier und Faltkanten in der Mathematik.....	118
<i>Axel Goy</i>	
„Digitales“ Experimentieren im Stochastikunterricht.....	127
<i>Reinhard Oldenburg</i>	
Das Haus der Vierecke und das Haus der Gleichungen experimentell erkunden.....	135
<i>Sabine Elter</i>	
Seifenhautexperimente.....	140
<i>Eva Mertens und Sebastian Kitz</i>	
Der freie Fall – Aufnahme und Auswertung von Daten zu quadratischen Funktionen.....	147
<i>Matthias Müller</i>	
Ein experimenteller Zugang zur Bestimmung der Zahl $e$ als Grenzwert eines Füllprozesses.....	155

<i>Daniel Frohn</i> Experimentieren und Argumentieren beim isoperimetrischen Problem.....	165
<i>Sarah Beumann, Sebastian Geisler, Axel Goy und Michael Kleine</i> Säure-Base-Titration zur Erkundung des logistischen Wachstums.....	172
<i>Ines Goldhausen und David-Samuel Di Fuccia</i> Chemie Experimente als Anlass für mathematisches Modellieren.....	180
<i>Sebastian Kuntze</i> Spielregel setzen, reflektieren und variieren – Eine mathematische Big Idea für experimentelle Lernanlässe im Unterricht.....	190

# Vorwort

---

Die Forderung, dass Mathematikunterricht die drei von Heinrich Winter formulierten Grunderfahrungen ermöglichen soll, ist in der Mathematikdidaktik und darüber hinaus Konsens - weniger Klarheit herrscht darüber, wie es Lernenden ermöglicht wird, diese Erfahrungen zu machen. Die erste Grunderfahrung „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen“ (Winter, 1995) ist offensichtlich besonders dann intensiv möglich, wenn man mit der Welt und der Natur interagiert, zum Beispiel wenn man experimentiert. Einen wichtigen Beitrag dazu leisten auch Aktivitäten beim Modellieren, deren Bedeutung unbestritten ist, aber durch die experimentierende Auseinandersetzung mit einer Realsituation steigen Authentizität und Motivation und insbesondere rückt der Prozess der Validierung, der beim Modellieren alleine oft nicht gut umsetzbar ist, in den Fokus. Werden die Experimente nicht nur nach vorgegebener Anleitung ausgeführt, sondern auch konzipiert und gegebenenfalls verändert und insbesondere, wenn die Ergebnisse zur weiteren Entwicklung mathematischer Theorien genutzt werden, umfasst der Prozess des Experimentierens auch die Kompetenzen des Argumentierens und Kommunizierens. Mathematisches Experimentieren ist also eine Unterrichtsform, die viele verschiedene Kompetenzen anspricht und in einem Kontext bündelt.

Reale Experimentalsituationen sind immer authentisch, sie bringen es mit sich, dass man sich über Messfehler Gedanken machen muss. Statistik, Regression aber auch die Ableitung als Verstärkungsfaktor für Messfehler bekommen so einen unmittelbaren Sinn. Ist etwa ein Potenzgesetz oder ein Exponentialgesetz besser geeignet, einen bestimmten Abnahmeprozess zu beschreiben? Echte Messwerte können die Antwort geben, aber wenn sie diese nicht eindeutig geben, fordern sie zur Reflexion und gegebenenfalls zur verbesserten, reflektierten Wiederholung des Experiments auf. Das echte eigene Experimentieren in der Realität ist dabei ein wichtiges Korrektiv: Beispielsweise kann man entdecken, dass, anders als in einigen Schulbüchern beschrieben, sich die Temperatur von heißem Wasser in einem Becher nicht exponentiell der Umgebungstemperatur nähert – und die Erklärung des Phänomens hilft beim Energiesparen.

Experimente in digitalen Umgebungen, seien es Simulationen analoger Situationen oder Experimente zu Phänomenen der digitalen Artefakte, bilden eine weitere Dimension des Experimentierens, die noch längst nicht voll erschlossen ist. Noch weiter weg von der physischen Realität, und deswegen trotzdem keineswegs uninteressant, sind innermathematische Experimente von der Primarstufe bis zur Oberstufe, die auch in mehreren Beiträgen in diesem Band untersucht

werden. Dazu passt, dass in den letzten Jahrzehnten ein eigener mathematischer Forschungszweig entstanden ist, der sich experimentellen, insbesondere computerbasierten Methoden in der mathematischen Forschung verschrieben hat. Das Potenzial mathematischer Experimente reicht also offensichtlich von der ersten Klasse bis zu Universität. Dies führt zur möglicherweise überraschenden Einsicht, dass neben der ersten Winter'schen Grunderfahrung, auch die zweite, nämlich "mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen" (Winter, 1995), durch Experimente zugänglich wird. Mathematische Phänomene selbst zu erkennen und zu erleben, kann dazu führen zu diesen Experimentiererergebnissen auch eine Erklärung zu finden, die Vielfalt von Beobachtungen fordert auf zum Klassifizieren. All dies sind mathematische Tätigkeiten, die in ihrer Vielfalt die Erfahrung ermöglichen, dass sich Mathematik keineswegs auf Rechnen oder Beweisen beschränken lässt.

Durch ihre Reichhaltigkeit eignen sich mathematische Experimente, wie auch in diesem Band gezeigt wird, auch dazu, der Heterogenität der Lernenden gerecht zu werden. In der Auseinandersetzung mit Experimenten entwickeln sich zudem die mathematischen Weltbilder weiter und werden differenzierter.

Wenn auch Mathematik im Grunde keine experimentelle Wissenschaft ist, sondern interne, theoretische Wahrheitskriterien hat, profitiert sie doch von der Auseinandersetzung mit mathematischen Phänomenen, und dies gilt noch in höherem Maße für den Unterricht.

Die Hoffnung, durch Experimente den Mathematikunterricht zu verbessern hat uns (Matthias Ludwig und Reinhard Oldenburg) schon vor fast zwei Jahrzehnten zu gemeinsamen Arbeiten geführt. Es ist erfreulich, dass diese Ideen aufgegriffen weitergeführt und verändert wurden und insbesondere, dass die wissenschaftliche Begleitforschung an Tiefe gewonnen hat. Das zeigt sich eindrücklich an den Beiträgen dieses Sammelbands. Wir wünschen ihm eine große Verbreitung.

Frankfurt/Augsburg, im Juni 2023,

Matthias Ludwig & Reinhard Oldenburg

# Die Rolle des Experimentierens in Mathematik und Mathematikunterricht

## 1. Einleitung

Das Experiment als eine zentrale Methode zur Erkenntnisgewinnung der Naturwissenschaften nimmt einen hohen Stellenwert auch im naturwissenschaftlichen Unterricht ein (Pietschmann, 1996; Shadish, Cook, & Campbell, 2002). Diese Form des Erkenntnisgewinns verbindet man allerdings eher selten mit typischen Arbeitsweisen in der Mathematik und im Mathematikunterricht. Innerhalb der Mathematik wird stattdessen der Beweis sowie dessen Kommunikation als wichtigster Bestandteil des Erkenntnisprozesses betrachtet, denn die Mathematik gilt als beweisende und nicht als empirische Wissenschaft.

Im Mathematikunterricht finden sich Experimente hauptsächlich im Bereich der Stochastik als sogenannte Zufallsexperimente wieder (Ludwig & Oldenburg, 2007). Doch auch abseits der Stochastik nehmen Experimente im mathematischen Lernprozessprozess eine wichtige Rolle ein. So kann das Experimentieren im Mathematikunterricht die Begriffsbildung begünstigen, Ausgangspunkt für vielfältige Modellierungen sein oder im Beweisprozess durch experimentelle Beobachtungen eine wichtige Rolle einnehmen (Brunner, 2014; Pólya, 1962).

Das Thema Experimentieren im Mathematikunterricht gewann in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung, so wie es sich in der Vielzahl aktuellerer Arbeiten widerspiegelt (wie z.B. Lichti & Roth, 2020; Carreira & Baioa, 2018; Beumann, 2016; Roth, 2014; Ganter, 2013; Philipp, 2013; Halverscheidt, 2008).

In der einschlägigen, fachdidaktischen Literatur finden sich viele unterschiedliche Praxisbeispiele für mathematische Schülerexperimente (z.B. Goy & Kleine, 2015; Lengnink & Leuders, 2008; Ludwig & Oldenburg, 2007): Von innermathematischen Experimenten zum Erkunden mathematischer Zusammenhänge, über Experimente zur Unterstützung des funktionalen Denkens, bis hin zu realistischen oder realitätsnahen Modellierungen. Dabei gibt es zu jedem Inhaltsbereich eine Vielzahl von Unterrichtsbeispielen. Doch trotz der vielen Praxisbeispiele gibt es noch wenige empirische Arbeiten auf diesem Gebiet. Dieser Herausgeberband soll nun beides miteinander vereinen und eine Lücke zwischen Theorie und Praxis schließen: es sollen aktuelle Forschungsarbeiten rund um das Themengebiet der mathematischen Schülerexperimente publiziert werden, aber auch neuere, z.T. interdisziplinäre Praxisbeispiele zu finden sein.

## 2. Was ist eigentlich ein Experiment? – Eine begriffliche Annäherung

### 2.1 Alltagsbedeutung und geschichtliche Entwicklung des Experimentierens

Das berühmte Zitat „Keine Experimente“ Konrad Adenauers aus dem Jahre 1957, dass als Slogan für den CDU Wahlkampf verwendet wurde, ist mit dafür verantwortlich, dass der Begriff des Experimentierens im alltäglichen Sprachgebrauch oftmals negativ konnotiert ist (Rieß et al., 2012, S.7). Adenauer verwendet dies in dem Sinne, dass politisch nicht rumprobiert werden sollte, da der Ausgang von Experimenten oftmals zu unsicheren und unerwünschten Konsequenzen führen kann (ebd.). Dieses alltägliche Beispiel (hier aus der Politik) ist eins von vielen, die die negative Konnotation des Begriffs *Experiment* im alltäglichen Sprachgebrauch aufzeigt. Entgegen der alltäglichen Verwendung, sind Experimente in der empirischen Wissenschaft positiv behaftet. Oftmals gelten Erkenntnisse erst dann als gesichert, wenn sie experimentell bestätigt wurden, sodass das Experiment auch als „Königsweg der Erkenntnisgewinnung und -prüfung“ bezeichnet wird (Rieß et al., 2012, S.7).

Aber sowohl in der Alltags- als auch in der Fachsprache werden die Begriffe *Experiment* bzw. *Experimentieren* sehr heterogen und in vielfältigen Kontexten verwendet.

Der Begriff *Experiment* leitet sich vom lateinischen Begriff *experiri* ab und bedeutet so viel wie *versuchen, prüfen* und *erproben* (Meyer, 2011). In der Alltagssprache wird oftmals von *Experimenten* im Sinne von einem spielerischen Erkunden gesprochen oder vom *Experimentieren*, wenn es sich um reines Ausprobieren handelt, wohingegen ein wissenschaftliches Experiment nachvollziehbare und meist zuverlässige Kausalaussagen ermöglicht. Ein Experiment ist dabei eine methodisch angelegte Untersuchung, bei der durch systematische Variationen der Einflussgrößen kausale Zusammenhänge untersucht werden. Die Auswertung der erhobenen Daten eines Experiments erfolgt als Schlussfolgerung, die wiederum zu neuen Erkenntnissen führen kann, sowie die zuvor aufgestellten Hypothesen untermauern oder widerlegen kann (Keppel & Wickens, 2004).

Bereits in der Antike sind Ursprünge des Experimentierens zu finden. Aristoteles begann im vierten Jahrhundert vor Christi im antiken Griechenland mit der Methode des Experimentierens (Moore, 1993). Allerdings handelte es sich hierbei hauptsächlich um Beobachtungen der Natur und sogenannte Gedankenexperimente. So waren mit der Ausrichtung der Erkenntnisse auf die Natur die Anfänge der modernen Naturwissenschaften gelegt, indem man glaubte, was man sah, anstatt zu sehen, was man glaubte (Moore, 1993). Das Ziel naturwissenschaftlicher Untersuchungen war während der Antike noch die Ergründung des Sinns und des Ursprungs aller Dinge. Nach und nach richtete sich das Interesse der modernen Naturwissenschaften aber auf die funktionale Erklärung von Naturvorgängen (Puthz, 1988). Nach Aristoteles dauerte es noch

mehr als 2000 Jahre, bis das Wissen über die Natur grundlegend in Frage gestellt und so naturwissenschaftliche Untersuchungen anerkannt wurden. So gelten neben Francis Bacon (1561 – 1626) auch Galileo Galilei (1564 – 1642) als Vorreiter der Ausrichtung naturwissenschaftlicher Erkenntnisse auf prüfende Experimente (Klautke, 1990; Kremer & Keil, 1993). Während sich Bacons Experimente noch innerhalb des bekannten und akzeptierten Wissenskanons bewegten, richtete Galilei seine Überzeugungen weitestgehend anhand experimentell gewonnener Erkenntnisse aus.

## 2.2 Begriffliche Annäherung an (naturwissenschaftliches) Experimentieren

Beim Experimentieren handelt es sich nicht um einen feststehenden Prozess, sondern eher um eine Methode der Erkenntnisgewinnung, deren konkrete Ausgestaltung von dem jeweiligen Untersuchungsgegenstand und der jeweiligen Untersuchungssituation abhängt (z.B. Lederman et al., 2002; Sandoval & Reiser, 2004). So ist eine umfassende Definition für die Methode des Experimentierens und auch des Experiments problematisch.

In den Naturwissenschaften selbst wird der Begriff *Experiment* sowohl in den Fachwissenschaften als auch den zugehörigen Fachdidaktiken nicht einheitlich genutzt. Barzel, et al. (2012) unterscheiden zwischen Betrachten und Beobachten sowie Versuchen und Experimentieren, wobei sie gleichzeitig darauf hinweisen, dass die Unterscheidung zwischen Versuchen und Experimenten international (d.h. in englischsprachigen Publikationen) nicht vorgenommen wird. Barzel et al. (2012.) sprechen von:

- » Betrachten und Beobachten, wenn die Erkenntnisgewinnung ohne Eingriff in den zu beobachtenden Prozess zustande kommt und
- » von Versuchen, wenn in den Prozess selbst eingegriffen wird, durch Untersuchung einer abhängigen Variablen und das dazugehörige systematische Verändern einer unabhängigen Variable.

Der entscheidende Unterschied zwischen einem Versuch und einem Experiment ist nach dieser Klassifikation das Vorhandensein einer Variablenkontrolle. Neben der unabhängigen Variable, deren Einfluss auf die abhängige Variable untersucht werden soll, wird Letztere in den meisten Fällen noch durch weitere Parameter beeinflusst. Der Einfluss dieser (Stör-) Variablen muss kontrolliert werden, um tatsächlich eine Aussage über den untersuchten Zusammenhang machen zu können. Somit sind Experimente durch die zusätzlich betrachtete Variablenkontrolle deutlich komplexer als Versuche, sowohl in der Planung und Durchführung als auch bei der Auswertung, da ein tiefgehendes Verständnis der einzelnen Variablen vorhanden sein muss (Barzel, Reinhoffer & Schrenk, 2012). Grygier und Hartinger (2012) unterscheiden hingegen

zwischen Laborieren, Experimentieren, Versuch und Explorieren. Für ihre Klassifikation ist entscheidend, ob eine (übergeordnete) Fragestellung vorgegeben ist, ob die Vorgehensweise für die Lernenden bereits von der Lehrkraft vorgegeben ist oder ob diese von den Lernenden selbst geplant werden muss. Die Klassifikation von Grygier und Hartinger bezieht sich zwar auf den Sachunterricht und damit die Primarstufe, dennoch sind die von ihnen zur Unterscheidung formulierten Kernfragen ebenfalls auf die Sekundarstufe übertragbar, da sie zwei zentrale Unterscheidungsfragen bzgl. der methodischen Gestaltung einbeziehen, die von der Lehrkraft beantwortet werden müssen. Wenn die Vorgehensweise von der Lehrkraft vorgegeben wurde und keine Fragestellung vorhanden ist, so klassifizieren Grygier und Hartinger (2012) das Vorgehen als einen Versuch. Zu beachten ist, dass die Definition eines Versuchs nicht deckungsgleich mit der von Barzel, Reinhoffer und Schrenk ist, da sie das Vorhandensein einer konkreten Fragestellung nicht ausschließen und stattdessen die Manipulation einer unabhängigen Variable zum Kriterium machen. Wenn hingegen eine Fragestellung vorhanden ist und die Vorgehensweise klar vorgegeben, dann sprechen Grygier und Hartinger (2012) von Laborieren. Zu beachten ist dabei, dass sowohl Fragestellung als auch Ziele des Laborierens den Schüler\*innen transparent sein sollte. Das Experimentieren grenzt sich soweit ab, dass eine Fragestellung zwar vorhanden ist, das Vorgehen von der Lehrkraft aber nicht vorgegeben wird. Auch diese begriffliche Definition deckt sich nicht mit derer von Barzel et al., denn hierbei steht die Variablenkontrolle als zentrales Kriterium im Mittelpunkt und die Frage nach einer konkreten Vorgehensweise wird vernachlässigt. Als vierte und letzte Möglichkeit benennen Grygier und Hartinger das Explorieren, bei dem weder die Fragestellung vorhanden noch die Vorgehensweise angegeben ist. Beim Vergleich beider Klassifikationssysteme fällt auf, dass Ersteres nach der Komplexität der experimentellen Situation (vom reinen Beobachten bis zum Erkennen und Verstehen abhängiger und unabhängiger Variablen) differenziert und Letzteres sich stärker an der methodischen Gestaltung der Unterrichtssituation orientiert.

### **3. Mathematik und Experimentieren**

In den Naturwissenschaften spielen Experimente beim Erfassen und Untersuchen von Zusammenhängen oder Phänomenen eine zentrale Rolle (Goy & Kleine, 2015), wohingegen Experimente meist nicht mit der Disziplin Mathematik assoziiert werden (Leuders & Philipp, 2012). Welche Zusammenhänge gibt es dennoch zwischen Mathematik und Experimentieren? Zur Beantwortung dieser Frage ist es sinnvoll verschiedene Facetten der Disziplin Mathematik zu betrachten. Niss (1994) nennt unter anderem die Facetten der angewandten und reinen Wissen-

schaft. Mathematik als angewandte Wissenschaft hat mannigfaltige Berührungspunkte mit naturwissenschaftlichen Experimenten, denn die Auswertung der Daten, die in naturwissenschaftlichen Experimenten gewonnen wurden, erfordert in der Regel eine mathematische Modellierung.

Weniger offensichtlich aber dennoch relevant, ist die Rolle, die das Experimentieren für die Facette der reinen Mathematik spielt. Reine Mathematik wird häufig als eine deduktive und beweisende Disziplin angesehen. Neue Erkenntnisse werden durch formale (innermathematische) Beweise abgesichert. Solche formalen Beweise stehen jedoch erst am Ende des Erkenntnisprozesses. So unterscheidet Hersh (1991, S. 128) zwischen einem *front*- und *back*-Bereich der Mathematik:

the ‘front’ of mathematics is mathematics in ‘finished’ form, as it is presented to the public in classrooms, textbooks, and journals. The ‘back’ would be mathematics as it appears among working mathematicians, in informal settings, told to one another in an office behind closed doors.

Hersh nutzt die Metapher des Theaterbetriebes, mit einem für Gäste zugänglichen front-Bereich, indem das fertige Theaterstück aufgeführt wird und dem unzugänglichen back-Bereich, indem chaotische Verhältnisse herrschen und Proben stattfinden. Mathematik wird im front-Bereich als fertiges und abgeschlossenes Produkt präsentiert, dabei werden neue Erkenntnisse mittels formaler und rein deduktiver Beweise kommuniziert. Der Prozess, der zu diesem formalen Beweis geführt hat, wird nicht kommuniziert und findet allein, unter Ausschluss der Öffentlichkeit, im back-Bereich statt. Nach Hersh (1991) findet aber genau hier die eigentliche mathematische Tätigkeit statt, die weniger formal und durch Intuition sowie induktives Vorgehen gekennzeichnet ist. Dieser back-Bereich ist in der Regel nicht Bestandteil der wissenschaftlichen Kommunikation, d.h. in fachmathematischen Publikationen wird normalerweise nicht der Weg der Erkenntnisgewinnung wiedergegeben, der zu Satz und Beweis geführt hat. Einige wenige Ausnahmen stellen die Arbeiten von Euler dar, worin detaillierte Einblicke in die Arbeitsweisen gewährt werden. Dabei betont Euler mehrfach die Bedeutung von Beobachtungen und experimentellem Arbeiten (Euler, 1761). So wird in seinen Aufzeichnungen deutlich, dass das Betrachten von Beispielen, das Aufstellen von Vermutungen und deren Prüfung anhand weiterer Beispiele am Anfang eines jeden Erkenntnisprozesses stehen, wohingegen der formale Beweis schlussendlich als Absicherung der gewonnenen Erkenntnisse erst am Ende eines solchen Prozesses steht (Leuders & Philipp, 2014). Neben Euler betont auch Wiener (1923, S. 237 ff.) die Bedeutung des Aufstellens und Überprüfens von Hypothesen innerhalb der Mathematik und beschreibt Mathematik als experimentelle Wissenschaft:

Die Mathematik ist eine experimentelle Wissenschaft. Die Formulierung und Überprüfung von Hypothesen spielt in der Mathematik keine andere Rolle als in der Chemie, Physik, Astronomie oder Botanik. [. . .] Es ist unerheblich, dass der Mathematiker mit Bleistift und Papier experimentiert, während der Chemiker Reagenzglas und Retorte oder der Biologe Färbemittel und Mikroskop verwendet.

Eine ähnliche Sichtweise findet man auch bei Heintz (2000) wieder, die in ihrer soziologischen Studie über die Arbeitsweisen von Mathematikerinnen und Mathematikern berichtet. Auch hier wird betont, dass das Experimentieren und insbesondere das Aufstellen von Hypothesen und deren Prüfung an Beispielen zum Auffinden neuer Erkenntnisse dient und somit am Beginn des Erkenntnisprozesses steht, während das Absichern der Erkenntnisse anschließend durch Beweise geschieht. Mittlerweile existiert eine Teildisziplin der Mathematik, die sich als experimentelle Mathematik bezeichnet, und sich dem Auffinden neuer Gesetzmäßigkeiten durch das (meist computergestützte) Erzeugen und Untersuchen von Beispielen widmet (Borwein et al., 2004). Zu Bedenken ist aber auch, dass im Gegensatz zu den Naturwissenschaften Mathematikerinnen und Mathematiker mit mathematischen und damit meist geistigen Objekten experimentieren (Heintz, 2000). Zur Abgrenzung von naturwissenschaftlichen Experimenten haben Leuders et al. (2011) den Begriff des innermathematischen Experiments geprägt.

#### **4. Experimentieren im Mathematikunterricht**

Im Mathematikunterricht finden sowohl innermathematische Experimente, die ausschließlich mit mathematischen Objekten und ihren Repräsentationen durchgeführt werden, als auch Experimente, die eher der naturwissenschaftlichen Methodik zuzurechnen sind – in diesem Band als außermathematische oder reale Experimente bezeichnet – Anwendung.

Es gibt durchaus Experimente, bei denen der Zeitbedarf für die Versuchsdurchführung recht hoch, das Ablesen der Messwerte teilweise zu ungenau oder das mathematische Modell zur Auswertung zu komplex ist. Abhilfe kann hier die Verwendung von Simulationen schaffen. Das Simulieren ist eine Lernmethode, die im Kontext von Modellierungs- und Problemlöseaktivitäten mit dem Computer steht (Greefrath & Weigand, 2012; Elter, 2020). Nach Greefrath und Weigand (2012, S.2) sind „Simulationen [...] Experimente mit Modellen“. Simulieren wird also als Experimentieren mit Computermodellen und deren Visualisierung verstanden (Elter, 2020), sowohl für innermathematische als auch außermathematische Kontexte.

Allen diesen „Arten“ von Experimenten ist ein planvolles und hypothesengeleitetes Vorgehen

inhärent. Daher nutzt dieser Sammelband die folgende Definition (Ludwig & Oldenburg, 2007, S. 4) für Experimente im Mathematikunterricht:

Ein Experiment ist durch Hypothesen geleitetes planvolles und kontrolliertes Handeln mit Objekten zum Zweck der Erkenntnisgewinnung durch Beobachtung.

Diese Definition schließt sowohl innermathematische als auch außermathematische bzw. reale Experimente ein, da nicht näher spezifiziert wird, mit welcher Art von Objekten gehandelt wird. Ludwig und Oldenburg (2007) beschreiben zudem typische Schritte eines Experiments im Mathematikunterricht: Zunächst muss eine Fragestellung festgelegt und eine Hypothese aufgestellt werden. Im Anschluss wird das Experiment geplant und dann durchgeführt sowie die Ergebnisse dokumentiert. Die Ergebnisse werden nun ausgewertet und zuletzt interpretiert. Dabei sehen Ludwig und Oldenburg (2007) diese Schritte als typisch sowohl für innermathematische als auch außermathematische bzw. reale Experimente.

Innermathematische Experimente können im Unterricht Ausgangspunkt für Erkundungs- und Begründungsprozesse sein (Leuders et al., 2011) sowie den Beginn eines Beweisprozesses markieren. In ihrem Prozessmodell des *Schulischen Beweisens* bezeichnet Brunner (2014) den ersten Schritt, indem eine vermutete Aussage zunächst anhand von Beispielen geprüft wird, um empirische Gewissheit bezüglich dieser Beispiele zu erlangen, als experimentellen Beweis. Dieser ist Ausgangspunkt eines operativen Beweises, der allgemeingültige Argumentationen verfolgt. Beumann und Geisler (2022) beschreiben, wie innermathematische Experimente auch dazu geeignet sind, ein facettenreiches Bild des Faches Mathematik zu vermitteln.

Außermathematische Experimente werden im Unterricht vor allem als Ausgangspunkt für reale Modellierungen genutzt. Dabei wird insbesondere ein positiver Effekt auf das Validieren diskutiert (z.B. Zell & Beckmann, 2009). Darüber hinaus, haben sich außermathematische Experimente sowie Simulationen als fruchtbar für Begriffsbildungsprozesse insbesondere im Bereich des funktionalen Denkens erwiesen (Barzel & Ganter, 2010; Lichti & Roth, 2020). Auch positive motivationale Effekte außermathematischer Experimente werden diskutiert (Beumann, 2016).

Die Forschungsarbeiten in diesem Sammelband, die alle einen single blind Peer-Review Prozess durchlaufen haben, betrachten sowohl inner- als auch außermathematische Experimente aus verschiedensten Perspektiven und mit unterschiedlichen methodischen Zugängen. **Wiebke Auhagen** beschreibt anhand von Fallstudien die Potentiale von Modellierungen mit außermathematischen Experimenten für den Umgang mit Diversität im Mathematikunterricht. Die Er-

gebnisse ihrer strukturierten Beobachtungen zeigen, dass außermathematische Experimente unterschiedlich leistungsstarken Schüler\*innen einen Zugang zu mathematischen Problemen ermöglichen können.

Inwiefern innermathematische Experimente sich auf die mathematischen Beliefs von begabten Schüler\*innen auswirken können, untersucht **Sarah Beumann** in ihrer Fallstudie. Grundlage der Analyse, die eine Erweiterung des Mathematikbildes zeigt, waren von einem mathematisch begabten Schüler gemalte Bilder und Interviews.

Der Frage, inwiefern auch reales mathematisches Experimentieren typische mathematische Tätigkeiten widerspiegelt, gehen **Ramona Hagenkötter**, **Katrin Rolka**, **Valentina Nachtigall** und **Nikol Rummel** aus Sicht von Schüler\*innen sowie Lehrerinnen und Lehrern mittels einer explorativen Interviewstudie nach.

**Sebastian Geisler** und **Stefanie Rach** analysieren in einer Mixed-Methods-Studie, inwiefern sich das situationale Interesse von Schüler\*innen an Modellierungsaufgaben mit und ohne reale Experimente unterscheidet und welche Gründe die Schüler\*innen für Interesse an Modellierungen mit Experimenten wahrnehmen.

Ausgehend von einer Spielsituation, untersuchen **Julia Rey** und **Michael Meyer** in einer interpretativen Studie das Wechselspiel zwischen experimentellen und mathematischen Denk- und Arbeitsweisen, sowie die Frage, wie experimentelle Erkenntnisse zur mathematischen Theoriebildung beitragen und umgekehrt.

Neben den zuvor genannten Forschungsarbeiten finden sich auch eine Vielzahl an Praxisbeiträgen in diesem Sammelband wieder. Hierbei gibt es sowohl Beispiele aus der Sekundarstufe I und II, jahrgangübergreifende Ideen sowie Themen auch aus der Grundschule. Daneben werden auch interdisziplinäre Unterrichtsideen aus den Naturwissenschaften vorgestellt und für den Mathematikunterricht aufgearbeitet.

## Literatur

- Barzel, B., & Ganter, S. (2010). Experimentell zum Funktionsbegriff. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 31, 14–19.
- Barzel, B., Reinhoffer, B. & Schrenk, S. (2012). Das Experimentieren im Unterricht. In W. Rieß, M. Wirtz, B. Barzel & A. Schulz (Hrsg.), *Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Schüler lernen wissenschaftlich denken und arbeiten*. (S. 103-138). Waxmann.
- Beumann, S. (2016). *Versuch's doch mal: Eine empirische Untersuchung zur Förderung von Motivation und Interesse durch mathematische Schülerexperimente*. [Dissertation] Ruhr-Universität Bochum.

- Beumann, S., & Geisler, S. (2022). Epistemologische Überzeugungen und inner-mathematische Experimente - Eine Interventionsstudie mit mathematisch interessierten Lernenden. *mathematica didactica*, 45(1). <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2022.1389>
- Borwein, J.M., Bailey, D.H., & Girgensohn, R. (2004). *Experimentation in Mathematics: Computational Paths to Discovery*. A K Peters, Wellesley, MA.
- Brunner, E. (2014). Ein Prozessmodell des schulischen Beweisens. In J. Roth, J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014 Band 1*. (S. 269-272). WTM.
- Carreira, S. & Baioa, A. M. (2018). Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: On the student's sense of credibility. *ZDM*, 50 (1–2), 201–215.
- Elter, S. (2020). *Zum Einfluss von Simulationen auf das funktionale Denken: Am Beispiel von Mathematisierungssituationen im MATHEMATIK-Labor*. Springer.
- Euler (1761). Specimen de usu observationum in mathesi pura. (Example of the use of observation in pure mathematics). In: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae: Anonymos, Vol. 6*, S. 185–230.
- Ganter, S. (2013). *Experimentieren – ein Weg zum Funktionalen Denken*. Kovac.
- Greefrath, G. & Weigand, H.-G. (2012). Simulieren – mit Modellen experimentieren. *mathematik lehren*, 174, 2–6.
- Grygier, P. & Hartinger, A. (2012). *Gute Aufgaben Sachunterricht*. (2. Aufl.). Cornelsen Verlag Scriptor.
- Goy, A., & Kleine, M. (2015). Experimentieren. Mathematische Zugänge erforschen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 65, 2 – 8.
- Halverscheid, S. (2008). Building a local conceptual framework for epistemic actions in a modelling environment with experiments. *ZDM*, 40(2), 225–234.
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Springer.
- Hersh, R. (1991). Mathematics has a front and a back. *Synthese*, 88 (2), 127–133.
- Keppel, G., & Wickens, T. D. (2004). *Design and analysis: A researcher's handbook: Fourth edition*. Pearson Prentice Hall.
- Klautke, S. (1990). Für und wider das Experiment im Biologieunterricht. In W. Killermann & L. Staeck (Hrsg.), *Methoden des Biologieunterrichts* (S. 70-83). Aulis.
- Kremer, B. P., & Keil, M. (1993). *Experimente aus der Biologie*. VCH.
- Lederman, N. G., Abd-El-Khalick, F., Bell, R. L., & Schwartz, R. S. (2002). Views of Nature of Science questionnaire: Toward valid and meaningful assessment of learners' conceptions of Nature of Science. *Journal of Research in Science Teaching*, 39 (6), 497–521.
- Lengnink, K., & Leuders, T. (2008). Probier's doch mal! Mit Beispielen experimentieren. Themenheft. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 50 (23), 1–6.
- Leuders, T., Naccarella, D., & Philipp, K. (2011). Experimentelles Denken – Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. *Journal für Mathematikdidaktik*, 32, 205–231.
- Leuders, T. & Philipp, K. (2012). Experimentelles Arbeiten in der Mathematik - ein Brückenschlag zur Naturwissenschaft mit Blick auf Peirce, Pólya und Medawar. In W. Rieß, M. Wirtz, B. Barzel & A. Schulz (Hrsg.), *Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Schüler lernen wissenschaftlich denken und arbeiten*. (S. 75-88). Waxmann.
- Lichti, M., & Roth, J. (2020). Wie Experimente mit gegenständlichen Materialien und Simulationen das funktionale Denken fördern. *Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis (ZMFP)*, 1, 1– 35.

- Ludwig, M., & Oldenburg, R. (2007). Lernen durch Experimentieren. Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. *mathematiklehren*, 141, 4 – 11.
- Meyer, H. (2011). *Unterrichtsmethoden II: Praxisband*. Frankfurt a. M.: Cornelsen.
- Moore, J. A. (1993). *Science as a way of knowing: The foundation of modern biology*. Harvard University Press.
- Niss, M. (1994). Mathematics in Society. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann (Hrsg.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (S. 367–378). Kluwer Academic Publishers.
- Philipp, K. (2013). *Experimentelles Denken*. Springer.
- Pietschmann, H. (1996). *Phänomenologie der Naturwissenschaften*. Springer.
- Pólya, G. (1962). *Mathematik und plausible Schliessen Band I. Induktion und Analogie in der Mathematik*. Birkhäuser Verlag
- Puthz, V. (1988). Experiment oder Beobachtung? *Unterricht Biologie*, 132, 11–13.
- Rieß, W., Wirtz, M., Barzel, B. & Schulz, A. (2012). *Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Schüler lernen wissenschaftlich denken und arbeiten*. Waxmann.
- Roth, J. (2014). Experimentieren mit realen Objekten, Videos und Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. *Der Mathematikunterricht*, 60 (6), 37–42.
- Sandoval, W. A., & Reiser, B. J. (2004). Explanationdriven inquiry: Integrating conceptual and epistemic scaffolds for scientific inquiry. *Science Education*, 88, 345–372.
- Shadish, W., Cook, T., & Campbell, D. (2002). *Experimental and Quasi-Experimental Designs for Generalized Causal Inference*. Houghton Mifflin.
- Wiener, N. (1923). *Collected works: With commentaries*. The MIT Press.
- Zell, S., & Beckmann, A. (2009). Modelling Activities While Doing Experiments to Discover the Concept of Variable. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.). *Proceedings of CERME 6* (S. 2216–2225). INRP.

# Aktuelle Beiträge aus der Forschung



## **Experimentieren als potenzialorientierter Zugang zum Umgang mit Diversität im Mathematikunterricht**

***Zusammenfassung:** Wie kann ein potenzialorientierter Zugang zum Umgang mit Diversität im Mathematikunterricht gelingen? Inwiefern Experimentieren in mathematischen Kontexten eine Möglichkeit darstellt, dieser Herausforderung entgegenzutreten, wird durch die Analyse von Fallbeispielen zur mathematischen Erkundung des logistischen Wachstums anhand einer Säure-Base-Titration exemplarisch diskutiert.*

***Abstract:** How can experimentation contribute to dealing successfully with diversity in maths teaching? This question is discussed by analysing case studies on the mathematical exploration of logistic growth using an acid-base titration as an example.*

### **Schlagworte**

*Potenzialorientierung, außermathematische Experimente*

### **1. Einleitung**

Mit den Fragen nach einem produktiven Umgang mit Diversität sowie nach Gelingensbedingungen individueller Förderung und inklusiver Bildung sind zentrale, aktuelle Herausforderungen des Mathematikunterrichts angesprochen (z.B. Käpnick, 2016; Häsel-Weide & Nührenböcker, 2021). Konstruktiv scheint hier ein weites Inklusionsverständnis, welches die individuellen Potenziale aller Schüler und Schülerinnen in den Vordergrund stellt und die Förderung möglichst aller inter- und intrapersonal orientierten Diversitätsfacetten unterstreicht (vgl. Veber, 2019). In den Fachdidaktiken werden geeignete Formate weiterentwickelt, in denen sich die individuelle Förderung aller Kinder im Rahmen inklusiver Bildung konstruktiv realisieren lässt. In der Mathematikdidaktik wird diesbezüglich die Bedeutung der natürlichen Differenzierung hervorgehoben, auch und gerade realisiert durch eine hohe fachliche Substanz (vgl. Wittmann, 1996). Einen Ansatz können Experimente im Mathematikunterricht darstellen, die aufgrund ihrer Handlungsorientierung einerseits einen Einstieg in die mathematische Problemstellung ebenso wie die Verständnisbildung erleichtern können und andererseits durch ihren Anspruch des authentischen Lernens vielfältige Anschlussprobleme schaffen können. Im Rahmen dieses Beitrags soll diskutiert werden, inwiefern das Experimentieren im Mathematikunterricht, am