INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

Conceptos, algoritmos y aplicaciones

Ismael Gutiérrez García
Yesneri Maider Zuleta Saldarriaga

EDITORIAL uninorte

Ismael Gutiérrez García

Profesor titular de la Universidad del Norte, actualmente es director delDepartamento de Matemáticas y Estadística. Licenciado en Matemáticas y Física dela Universidad del Atlántico, magíster en Matemáticas de la Universidad del Valle -Universidad del Norte y doctor en Ciencias Naturales de la Universidad de Mainz,Alemania. Miembro del Grupo de investigación en Matemáticas Uninorte.

Yesneri Maider Zuleta Saldarriaga

Profesora catedrática de la Universidad del Norte. Licenciada en Matemática de laUniversidad del Atlántico, magíster en Matemáticas de la Universidad del Norte,candidata a doctora en Ciencias Naturales de la misma institución. Miembro delGrupo de investigación en Matemáticas Uninorte.

Introducción a la

teoría de grafos

Conceptos, algoritmos y aplicaciones

Introducción a la

teoría de grafos

Conceptos, algoritmos y aplicaciones

Ismael Gutiérrez García
Yesneri Maider Zuleta Saldarriaga

EDITORIAL
uninorte

Gutiérrez García, Ismael.
Introducción a la teoría de grafos : conceptos, algoritmos y aplicaciones / Ismael Gutiérrez García, Yesneri Maider Zuleta Saldarriaga. – Barranquilla, Colombia : Editorial Universidad del Norte, 2024.

156 páginas : ilustraciones ; 28 cm.
Incluye referencias bibliográficas (páginas 155-156)
ISBN 978-958-789-634-3 (impreso)
ISBN 978-958-789-631-2 (PDF)

1. Teoría de grafos. 2. Árboles (Teoría de grafos). 3. Coloración de grafos. I. Zuleta Saldarriaga, Yesneri Maider. II. Tít.
(511.5 G984) (CO-BrUNB)

UNIVERSIDAD DEL NORTE
Vigilada Mineducación
www.uninorte.edu.co
Km 5, vía a Puerto Colombia, A.A. 1569
Área metropolitana de Barranquilla (Colombia)

Coordinación editoral
María Margarita Mendoza

Asistencia editoral
Fabián Buelvas

Diseño y diagramación
Ismael Gutiérrez García

Corrección de textos
Teresa Beltrán Barrios

Diseño de portada
Silvana Marulanda

Revisión arte final
Munir Kharfan de los Reyes

Impresión Bajo Demanda (IBD)
Hecho en Colombia
Made in Colombia

Índice general

Índice de figuras

Índice de algoritmos

Prólogo

En este texto se aborda el estudio de la teoría básica de grafos. Por tal razón, en la primera parte del mismo, se dan a conocer definiciones y nociones básicas de grafos tales como grafo no dirigido y digrafo. Además, se definen formalmente los diferentes tipos de grafos, grado o valencia de un vértice y algunos resultados relevantes relacionados con estos temas; posteriormente, se presentan algunas de las familias más conocidas de grafos y operaciones entre estos grafos.

En el segundo capítulo se desarrolla el tema de representación matricial de grafos, se clasifican los distintos tipos de paseos y se introduce la idea de conexidad. En el capítulo tres se presentan algunas definiciones y resultados que giran alrededor de los grafos eulerianos y hamiltonianos. Se continua con un capítulo sobre emparejamiento y cubrimiento en un grafo.

El texto en su parte final se centra en un tipo especial de grafo denominado árbol, mostrando algunos resultados relacionados con este tipo de grafos. Por otro lado, se define lo que es un grafo ponderado, lo cual permite analizar el problema del camino más corto entre dos puntos de un grafo ponderado; y finalmente se desarrolla el tema de coloración de grafos. Adicional a lo anteriormente mencionado, el libro cuenta con un capítulo anexo en el que se recopilan algunos resultados que, aunque no son el objetivo principal del libro, fueron implementados para la demostración de algunas proposiciones que en este se presentan.

Cabe resaltar que cada capítulo cuenta con ejemplos y una sección de ejercicios propuestos que le permitirán al lector beneficiarse aún más de la presente publicación. Conviene advertirle al lector que para la teoría de grafos no existe una notación unificada, por lo que a la hora de realizar un estudio comparativo con diversos textos usted debe establecer con claridad qué definiciones y conceptos utiliza cada uno de los textos involucrados o podría terminar entrando en algún tipo de confusión.

Capítulo 1

Algunos problemas modelados con grafos

La teoría de grafos o teoría de gráficas es considerada una de las ramas más importantes de las matemáticas modernas, en vista de su relativa novedad. Esta teoría surge en Europa gracias al trabajo de **Leonhard Euler**[1] sobre el problema de los puentes de Königsberg, realizado alrededor de la primera mitad del siglo XVIII y considerado posiblemente el primer resultado de la teoría de grafos.

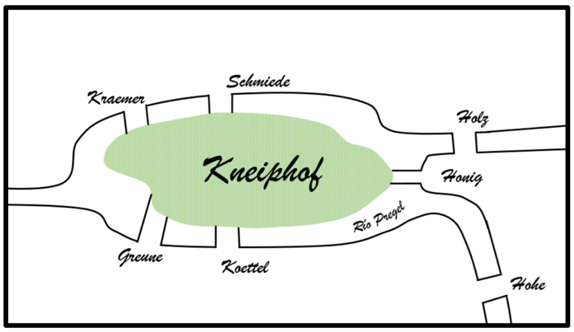
La teoría de grafos tiene muchas aplicaciones modernas, ya que es posible utilizar grafos para resolver problemas en diversas áreas, tanto así que muchos afirman que casi cualquier problema o situación puede ser representada mediante un grafo. En el capítulo uno se define formalmente lo que es un grafo. Sin embargo, con el fin de introducir el problema de los puentes de Königsberg realizaremos la definición de una manera casi que intuitiva. Un grafo es un conjunto, no vacío, de objetos llamados nodos o vértices que suelen representarse mediante marcas circulares y una selección de pares no necesariamente ordenados de vértices, llamados aristas (*edges* en inglés) que se representan mediante líneas o flechas (en el caso de que sean pares ordenados) que relacionan o conectan los vértices.

Los siete puentes de Königsberg. El problema de los puentes de Königsberg se contextualizó justamente en la ciudad prusiana de Königsberg que actualmente es conocida como Kaliningrado, esta ciudad es atravesada por el río que en la época de Euler era llamado el río Pregel y que hoy se le denomina río Pregolya. Llegado a un punto, el río genera una especie de isla y define tres zonas más de la ciudad como bien puede observar en la Figura 1.1. Por tal razón, la ciudad contaba con siete puentes, en la actualidad tan solo se conservan cinco puentes, ya que dos de los puentes originales no sobrevivieron al bombardeo de Königsberg en la Segunda Guerra Mundial. Además, cabe resaltar

[1] **Leonhard Euler** (1707-1783). Matemático suizo que desde temprana edad mostró sus habilidades en diferentes campos de las matemáticas. Euler fue un prolífico escritor de matemáticas, realizó investigación teórica en análisis infinitesimal, cálculo, geometría, teoría de números, entre otros. Además, estudió ciertas funciones y ecuaciones diferenciales que hoy día llevan su nombre. Las diferentes publicaciones que realizó sobre matemáticas y su libro *Mecánica*, donde presenta la mecánica newtoniana en forma de análisis matemático, lo dieron a conocer como uno de los mejores matemáticos de su tiempo.

que otros dos puentes fueron demolidos y reemplazados por una autopista, en la siguiente imagen aparecen en círculos naranja, y los otros tres puentes se mantienen, aunque solo dos de ellos son de la época de Euler ya que uno de estos puentes fue reconstruido en 1935. Estos unían las diferentes áreas de la ciudad que fragmentaba el río.

Los habitantes de Königsberg se preguntaban si sería posible hacer un paseo por la ciudad empezando en un punto de esta y volver al punto de partida recorriendo cada uno de los puentes una única vez. Este problema alcanzó fama en su tiempo y, como ya se mencionó, finalmente fue resuelto por Euler, pero en sentido negativo.



(a) Los puentes de Königsberg en la época de L. Euler

(b) Vista actual de los puentes en Google Maps

Figura 1.1: Los puentes de Königsberg

Para dar solución al problema, Euler usó el grafo obtenido al considerar la cuatro zonas o regiones en las que el río dividía la ciudad mediante vértices (círculos) y los siete puentes mediante aristas (líneas) como se muestra a continuación.

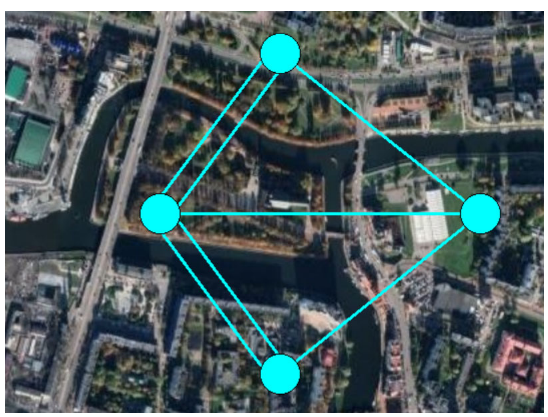


Figura 1.2: Representación del problema mediante un grafo

Así que el problema se reducía a determinar la existencia o no de un camino (sucesión de aristas)