



INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

Conceptos, algoritmos
y aplicaciones

Ismael Gutiérrez García
Yesneri Mainer Zuleta Saldarriaga

EDITORIAL
uninorte

Ismael Gutiérrez García

Profesor titular de la Universidad del Norte, actualmente es director del Departamento de Matemáticas y Estadística. Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad del Atlántico, magíster en Matemáticas de la Universidad del Valle -Universidad del Norte y doctor en Ciencias Naturales de la Universidad de Mainz, Alemania. Miembro del Grupo de investigación en Matemáticas Uninorte.

Yesneri Maider Zuleta Saldarriaga

Profesora catedrática de la Universidad del Norte. Licenciada en Matemática de la Universidad del Atlántico, magíster en Matemáticas de la Universidad del Norte, candidata a doctora en Ciencias Naturales de la misma institución. Miembro del Grupo de investigación en Matemáticas Uninorte.



Introducción a la
teoría de grafos
Conceptos, algoritmos y aplicaciones

Introducción a la
teoría de grafos
Conceptos, algoritmos y aplicaciones

Ismael Gutiérrez García
Yesneri Maider Zuleta Saldarriaga

EDITORIAL
uninorte

Gutiérrez García, Ismael.

Introducción a la teoría de grafos : conceptos, algoritmos y aplicaciones / Ismael Gutiérrez García, Yesneri Maider Zuleta Saldarriaga. – Barranquilla, Colombia : Editorial Universidad del Norte, 2024.

156 páginas : ilustraciones ; 28 cm.

Incluye referencias bibliográficas (páginas 155-156)

ISBN 978-958-789-634-3 (impreso)

ISBN 978-958-789-631-2 (PDF)

1. Teoría de grafos. 2. Árboles (Teoría de grafos). 3. Coloración de grafos. I. Zuleta Saldarriaga, Yesneri Maider. II. Tít.

(511.5 G984) (CO-BrUNB)



Vigilada Mineducación

www.uninorte.edu.co

Km 5, vía a Puerto Colombia, A.A. 1569

Área metropolitana de Barranquilla (Colombia)

© Universidad del Norte, 2024

Ismael Gutiérrez García

Yesneri Maider Zuleta Saldarriaga

Coordinación editorial

María Margarita Mendoza

Asistencia editorial

Fabián Buelvas

Diseño y diagramación

Ismael Gutiérrez García

Corrección de textos

Teresa Beltrán Barrios

Diseño de portada

Silvana Marulanda

Revisión arte final

Munir Kharfan de los Reyes

Impresión Bajo Demanda (IBD)

Hecho en Colombia

Made in Colombia

© Reservados todos los derechos. Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio reprográfico, fónico o informático, así como su transmisión por cualquier medio mecánico o electrónico, fotocopias, microfilm, *offset*, mimeográfico u otros sin autorización previa y escrita de los titulares del *copyright*. La violación de dichos derechos constituye un delito contra la propiedad intelectual.

Índice general

Prólogo	7
1. Algunos problemas modelados con grafos	9
2. Definiciones básicas sobre grafos	15
2.1. Algunos tipos de grafos	15
2.2. Propiedades de los vértices	19
2.3. Algunas familias de grafos no dirigidos	27
2.4. Operaciones entre grafos	32
2.5. Isomorfía entre grafos	34
2.6. Ejercicios	37
3. Representación matricial de grafos y conexión	41
3.1. Recorridos en grafos no dirigidos y dirigidos	41
3.2. Matriz de adyacencia	43
3.3. Matriz de incidencia	47
3.4. Matriz laplaciana	49
3.5. Conexión	50
3.6. Ejercicios	59
4. Grafos eulerianos, hamiltonianos y planos	63
4.1. Circuitos eulerianos	64
4.2. Algoritmos para hallar circuitos eulerianos	66
4.3. Circuitos hamiltonianos	67
4.4. Algoritmo para determinar todos los caminos hamiltonianos	72
4.5. Grafos planos	72
4.6. Ejercicios	77
5. Emparejamientos y cubrimientos	83
5.1. Emparejamiento	83
5.2. Un algoritmo para aumentar un emparejamiento	89
5.3. Cubrimientos	91
5.4. Algunos algoritmos de cubrimiento por vértice	93
5.5. Ejercicios	94
6. Árboles	97

6.1. Árbol	97
6.2. Árboles enraizados	101
6.3. Algunos algoritmos para obtener un árbol generador mínimo	104
6.4. Ejercicios	117
7. Coloración de grafos	121
7.1. Coloreando vértices	121
7.2. Algunas aplicaciones	134
7.3. Coloreando aristas	136
7.4. Algunos algoritmos	140
7.5. Ejercicios	142
8. ANEXOS	147
8.1. Principio de inducción matemática	147
8.2. Principio de adición	149
8.3. Principio de las cajas o principio del palomar	152

Índice de figuras

1.1. Los puentes de Königsberg	10
1.2. Representación del problema mediante un grafo	10
1.3. Los cuatro colores	11
1.4. Modelando con grafos	12
1.5. Un grafo asociado al problema de los tres servicios	13
1.6. Una malla flexible y una variante deformada	14
1.7. Una malla reforzada por diagonales	14
2.1. Representación gráfica de un grafo no dirigido	16
2.2. Representación gráfica de G_1 y G_2	16
2.3. Grafos con bucles o lazos	17
2.4. Ilustración de los diferentes tipos de grafos	18
2.5. Un subgrafo generador	19
2.6. Grados de vértices	21
2.7. Grafos de sólidos platónicos	23
2.8. Grafo trivial	27
2.9. Grafos N_n con $1 \leq n \leq 4$	27
2.10. Grafos L_n con $2 \leq n \leq 5$	27
2.11. Grafos C_n con $3 \leq n \leq 6$	28
2.12. Grafos W_n con $4 \leq n \leq 7$	28
2.13. Grafos K_n con $3 \leq n \leq 6$	29
2.14. Ilustración de algunos grafos bipartidos	29
2.15. Grafos bipartidos o bicromáticos	30
2.16. Un grafo bipartido	30
2.17. Grafos $K_{r,s}$ con $1 \leq r \leq 3$ y $2 \leq s \leq 3$	31
2.18. Grafos E_n con $2 \leq n \leq 5$	31
2.19. Un grafo y su complemento	32
2.20. Producto cartesiano $G_1 \times G_2$	33
2.21. Subdivisión de una arista en un grafo	34
2.22. Grafos isomorfos	35
2.23. Grafos no isomorfos	35
3.1. Ciclos, paseos, longitud y distancia	42
3.2. Grafo con arista de corte	55
3.3. Grafo dirigido conexo	59

4.1. Cruce de la red	63
4.2. Grafos euleriano, semieuleriano y no euleriano	64
4.3. Un grafo no euleriano	65
4.4. El grafo de los puentes de Königsberg	66
4.5. Ilustración de una solución del juego de Hamilton	67
4.6. Ciclo construido en la demostración del teorema de Bondy–Chvátal	71
5.1. Un emparejamiento	84
5.2. Ilustración del grafo DS	87
6.1. Un árbol	97
6.2. Un bosque	100
6.3. Un árbol enraizado	101
6.4. Un grafo ponderado	103
7.1. Asignación de horarios	135
7.2. Organizando químicos	136
7.3. Una coloración de aristas del grafo de Petersen	136
7.4. Factorización del grafo de Petersen	139
8.1. Idea de inducción matemática	148

Índice de algoritmos

1.	. Algoritmo de Havel-Hakimi	26
2.	. Algoritmo de Fleury	66
3.	. Algoritmo de Hierholzer	67
4.	. Algoritmo de Kaufmann y Malgranger	72
5.	. Algoritmo para aumentar un emparejamiento	90
6.	. Algoritmo de cubrimiento mediante arista aleatoria	93
7.	. Algoritmo de cubrimiento mediante el vértice de mayor grado	94
8.	. Algoritmo de Prim	105
9.	. Algoritmo de Kruskal	107
10.	. Algoritmo de Dijkstra	111
11.	. Algoritmo secuencial básico de coloración de vértices de un grafo	123
12.	. Algoritmo de Welsh-Powell	126
13.	. Algoritmo de Brelaz	128
14.	. Algoritmo secuencial básico de coloración de aristas de un grafo	140
15.	. Algoritmo de coloración de aristas usando emparejamientos	141

Prólogo

En este texto se aborda el estudio de la teoría básica de grafos. Por tal razón, en la primera parte del mismo, se dan a conocer definiciones y nociones básicas de grafos tales como grafo no dirigido y digrafo. Además, se definen formalmente los diferentes tipos de grafos, grado o valencia de un vértice y algunos resultados relevantes relacionados con estos temas; posteriormente, se presentan algunas de las familias más conocidas de grafos y operaciones entre estos grafos.

En el segundo capítulo se desarrolla el tema de representación matricial de grafos, se clasifican los distintos tipos de paseos y se introduce la idea de conexidad. En el capítulo tres se presentan algunas definiciones y resultados que giran alrededor de los grafos eulerianos y hamiltonianos. Se continúa con un capítulo sobre emparejamiento y cubrimiento en un grafo.

El texto en su parte final se centra en un tipo especial de grafo denominado árbol, mostrando algunos resultados relacionados con este tipo de grafos. Por otro lado, se define lo que es un grafo ponderado, lo cual permite analizar el problema del camino más corto entre dos puntos de un grafo ponderado; y finalmente se desarrolla el tema de coloración de grafos. Adicional a lo anteriormente mencionado, el libro cuenta con un capítulo anexo en el que se recopilan algunos resultados que, aunque no son el objetivo principal del libro, fueron implementados para la demostración de algunas proposiciones que en este se presentan.

Cabe resaltar que cada capítulo cuenta con ejemplos y una sección de ejercicios propuestos que le permitirán al lector beneficiarse aún más de la presente publicación. Conviene advertirle al lector que para la teoría de grafos no existe una notación unificada, por lo que a la hora de realizar un estudio comparativo con diversos textos usted debe establecer con claridad qué definiciones y conceptos utiliza cada uno de los textos involucrados o podría terminar entrando en algún tipo de confusión.

Capítulo 1

Algunos problemas modelados con grafos

La teoría de grafos o teoría de gráficas es considerada una de las ramas más importantes de las matemáticas modernas, en vista de su relativa novedad. Esta teoría surge en Europa gracias al trabajo de **Leonhard Euler**¹ sobre el problema de los puentes de Königsberg, realizado alrededor de la primera mitad del siglo XVIII y considerado posiblemente el primer resultado de la teoría de grafos.

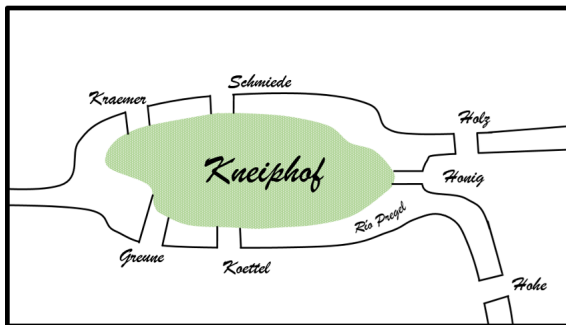
La teoría de grafos tiene muchas aplicaciones modernas, ya que es posible utilizar grafos para resolver problemas en diversas áreas, tanto así que muchos afirman que casi cualquier problema o situación puede ser representada mediante un grafo. En el capítulo uno se define formalmente lo que es un grafo. Sin embargo, con el fin de introducir el problema de los puentes de Königsberg realizaremos la definición de una manera casi que intuitiva. Un grafo es un conjunto, no vacío, de objetos llamados nodos o vértices que suelen representarse mediante marcas circulares y una selección de pares no necesariamente ordenados de vértices, llamados aristas (*edges* en inglés) que se representan mediante líneas o flechas (en el caso de que sean pares ordenados) que relacionan o conectan los vértices.

Los siete puentes de Königsberg. El problema de los puentes de Königsberg se contextualizó justamente en la ciudad prusiana de Königsberg que actualmente es conocida como Kaliningrado, esta ciudad es atravesada por el río que en la época de Euler era llamado el río Pregel y que hoy se le denomina río Pregolya. Llegado a un punto, el río genera una especie de isla y define tres zonas más de la ciudad como bien puede observar en la Figura 1.1. Por tal razón, la ciudad contaba con siete puentes, en la actualidad tan solo se conservan cinco puentes, ya que dos de los puentes originales no sobrevivieron al bombardeo de Königsberg en la Segunda Guerra Mundial. Además, cabe resaltar

¹**Leonhard Euler** (1707-1783). Matemático suizo que desde temprana edad mostró sus habilidades en diferentes campos de las matemáticas. Euler fue un prolífico escritor de matemáticas, realizó investigación teórica en análisis infinitesimal, cálculo, geometría, teoría de números, entre otros. Además, estudió ciertas funciones y ecuaciones diferenciales que hoy día llevan su nombre. Las diferentes publicaciones que realizó sobre matemáticas y su libro *Mecánica*, donde presenta la mecánica newtoniana en forma de análisis matemático, lo dieron a conocer como uno de los mejores matemáticos de su tiempo.

que otros dos puentes fueron demolidos y reemplazados por una autopista, en la siguiente imagen aparecen en círculos naranja, y los otros tres puentes se mantienen, aunque solo dos de ellos son de la época de Euler ya que uno de estos puentes fue reconstruido en 1935. Estos unían las diferentes áreas de la ciudad que fragmentaba el río.

Los habitantes de Königsberg se preguntaban si sería posible hacer un paseo por la ciudad empezando en un punto de esta y volver al punto de partida recorriendo cada uno de los puentes una única vez. Este problema alcanzó fama en su tiempo y, como ya se mencionó, finalmente fue resuelto por Euler, pero en sentido negativo.



(a) Los puentes de Königsberg en la época de L. Euler



(b) Vista actual de los puentes en Google Maps

Figura 1.1: Los puentes de Königsberg

Para dar solución al problema, Euler usó el grafo obtenido al considerar las cuatro zonas o regiones en las que el río dividía la ciudad mediante vértices (círculos) y los siete puentes mediante aristas (líneas) como se muestra a continuación.

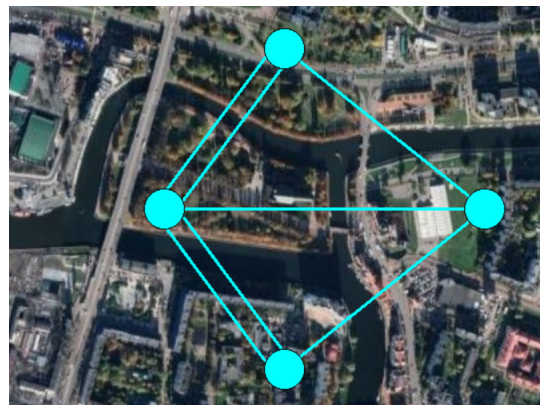


Figura 1.2: Representación del problema mediante un grafo

Así que el problema se reducía a determinar la existencia o no de un camino (sucesión de aristas)