

# INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

Primera edición

José Alfredo Collazos Sánchez

Carlos Alberto Ramírez Vanegas

Óscar Danilo Montoya Giraldo

Collazos Sánchez, José Alfredo, autor

Introducción al álgebra lineal / José Alfredo Collazos Sánchez, Carlos Alberto Ramírez Vanegas, Oscar Danilo Montoya Giraldo. -- Primera edición. -- Bogotá : Ecoe Ediciones, 2024  
224 páginas. – (Matemáticas y ciencias. Álgebra)

Incluye datos biográficos de los autores -- Incluye índice alfabético -- Incluye referencias bibliográficas al final de la obra.

ISBN 978-958-508-265-6 (impreso) -- 978-958-508-266-3 (PDF) -- 978-958-508-267-0 (ePUB)

1. Algebras lineales - Fundamentos - Problemas, ejercicios, etc. 2. Matrices (Matemáticas) - Fundamentos - Problemas, ejercicios, etc. 3. Análisis vectorial - Fundamentos - Problemas, ejercicios, etc. I. Ramírez Vanegas, Carlos Alberto, autor II. Montoya Giraldo, Oscar Danilo, autor

CDD: 512.5 ed. 23

CO-BoBN- a1137262

---



**Área:** Matemáticas y ciencias

**Subárea:** Álgebra

**ECOE**  
**EDICIONES**



© José Alfredo Collazos Sánchez  
© Carlos Alberto Ramírez Vanegas  
© Óscar Danilo Montoya Giraldo

© Ecoe Ediciones S.A.S.  
info@ecoeediciones.com  
www.ecoeediciones.com  
Carrera 19 # 63 C 32  
Teléfono: (+57) 321 226 46 09  
Bogotá, Colombia

♦ Cita sugerida:  
Collazos Sánchez J. A., Ramírez Vanegas C. A. y Montoya Giraldo O. D. (2024). *Introducción al álgebra lineal*. Ecoe Ediciones.

**Primera edición:** Bogotá, abril del 2024

ISBN: 978-958-508-265-6  
e-ISBN (PDF): 978-958-508-266-3  
e-ISBN (ePub): 978-958-508-267-0

Coordinadora editorial: Ana María Rueda G.  
Coordinadora de producción editorial:  
Alejandra Rondón Forero  
Editora de adquisiciones: Alejandra Cely R.  
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz  
Impresión: Carvajal Soluciones de  
Comunicación S.A.S.  
Carrera 69 #15-24

*Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio  
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.*

---

*Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados*

# Agradecimientos

Este libro ha sido desarrollado con el apoyo de la Facultad de Ciencias Básicas y su Departamento de Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira, así como de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, y se concibe como un texto académico para pregrado universitario.

# Índice general

<i>Lista de figuras</i>	VI
<i>Prólogo</i>	1
<b>1. MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES</b>	<b>2</b>
1.1. Matrices	2
1.1.1. Tipos especiales de matrices	4
1.1.2. Operaciones con matrices	5
1.2. Sistemas de ecuaciones lineales	14
1.2.1. Tipos de sistemas de ecuaciones lineales	16
1.2.2. Método de eliminación de Gauss	17
1.2.3. Forma matricial de un sistema	23
1.3. Matrices inversas	32
1.3.1. Matriz elemental y matriz inversa	36
1.4. Ejercicios	38
<b>2. DETERMINANTES</b>	<b>45</b>
2.1. Introducción a los determinantes	45
2.2. Menores y cofactores	47
2.3. Propiedades de los determinantes	49
2.4. Cálculo de la matriz inversa	53
2.5. Regla de Cramer para la solución de sistemas	54
2.6. Ejercicios	56
<b>3. ÁLGEBRA VECTORIAL</b>	<b>58</b>
3.1. Coordenadas cartesianas rectangulares en $\mathbb{R}^n$	58
3.1.1. Coordenadas en la recta	59
3.1.2. Coordenadas en el plano	60
3.1.3. Coordenadas en el espacio	62
3.1.4. Coordenadas cartesianas rectangulares en $\mathbb{R}^n$	64
3.2. Vectores	65
3.2.1. Vectores en $\mathbb{R}^2$	67
3.2.2. Vectores en $\mathbb{R}^3$	68
3.2.3. Vectores en $\mathbb{R}^n$	69
3.2.4. Operaciones básicas con vectores	70
3.2.5. Magnitud y dirección de un vector	75
3.2.6. Vectores canónicos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$	79
3.2.7. Producto escalar o producto punto	81
3.2.8. Ángulo entre vectores	83

3.2.9.	Proyección ortogonal	89
3.2.10.	Producto vectorial o producto cruz	91
3.2.11.	Propiedades del producto vectorial	92
3.2.12.	Producto triple escalar	95
3.3.	Rectas	97
3.3.1.	Rectas paralelas y perpendiculares	101
3.3.2.	Distancia entre dos rectas de $\mathbb{R}^3$	105
3.3.3.	Distancia de un punto a una recta	105
3.4.	Planos	106
3.4.1.	Ángulo entre planos	111
3.4.2.	Planos paralelos y perpendiculares	112
3.4.3.	Intersección de planos	114
3.4.4.	Relación entre rectas y planos	115
3.4.5.	Intersección entre una recta y un plano	117
3.4.6.	Distancia de un punto a un plano	118
3.4.7.	Aplicaciones	119
3.5.	Ejercicios	126
<b>4.</b>	<b>ESPACIOS VECTORIALES</b>	129
4.1.	Espacio vectorial	129
4.2.	Subespacios	132
4.3.	Combinación lineal	135
4.4.	Dependencia e independencia lineal	138
4.5.	Base de un espacio vectorial	140
4.6.	Dimensión	144
4.7.	Coordenadas y cambio de base	146
4.8.	Matriz de transición	148
4.9.	Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt	150
4.10.	Ejercicios	152
<b>5.</b>	<b>TRANSFORMACIONES LINEALES</b>	159
5.1.	Transformaciones	159
5.2.	Transformación lineal	159
5.3.	Núcleo e imagen	165
5.4.	Transformaciones lineales biyectivas	172
5.5.	Matriz asociada a una transformación lineal	177
5.6.	Transformación compuesta	184
5.7.	Transformación inversa	185
5.8.	Cambio de base	187
5.9.	Ejercicios	189
<b>6.</b>	<b>VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS</b>	191
6.1.	Valores propios y vectores propios	191
6.2.	Matrices diagonalizables	198
6.3.	Formas cuadráticas	201
6.3.1.	Cambio de variables	202

6.3.2. Diagonalización de formas cuadráticas	203
6.4. Ejercicios	204
<i>Bibliografía</i>	207
<i>Índice alfabético</i>	209

## Índice de figuras

3.1.	Recta metrizada	59
3.2.	Coordenadas en la recta	59
3.3.	Distancia entre dos puntos de la recta	59
3.4.	Representación del punto $P(x, y)$ en el plano	60
3.5.	Definición de los cuadrantes en un plano	61
3.6.	Puntos en el plano	62
3.7.	Representación del punto $P(a, b, c)$ en el espacio	63
3.8.	Puntos en el espacio	64
3.9.	Vector geométrico	66
3.10.	Vectores localizados en el origen	66
3.11.	Vector $P = (x, y)$	67
3.12.	vector $P = (2, 3)$	68
3.13.	Representación del vector $P = (x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$	69
3.14.	Vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$	69
3.15.	Suma de vectores	71
3.16.	Producto entre un vector y un escalar en el espacio	71
3.17.	Producto de entre vector y un escalar en el plano	72
3.18.	Resta de vectores	72
3.19.	Propiedad asociativa	74
3.20.	Norma del vector $P = (x, y, z)$ en el espacio	76
3.21.	Norma del vector $A = (2, 3)$	76
3.22.	Dirección de un vector	77
3.23.	Ángulos directores de un vector	79
3.24.	$(2, 3) = 2\vec{i} + 3\vec{j}$	80
3.25.	$(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	81
3.26.	Ángulo entre Vectores	84
3.27.	Ángulos del triángulo	86
3.28.	Vectores ortogonales	87
3.29.	Proyección ortogonal	90
3.30.	Producto cruz	92
3.31.	Área del paralelogramo	94
3.32.	Producto triple escalar	96
3.33.	Volumen del paralelepípedo	96
3.34.	Recta en el plano	97
3.35.	Recta en el espacio	98
3.36.	Recta $(1, 2, 1) + t(1, 1, 1)$	100
3.37.	Rectas paralelas	101
3.38.	Rectas perpendiculares	101

3.39. Ángulos entre rectas	102
3.40. Intersección de rectas	103
3.41. Distancia de un punto a una recta	106
3.42. Ecuación del plano	107
3.43. Plano $12x + 10y + 15z = 120$	109
3.44. Planos $x = 4$ , $y = 5$ y $z = 4$	110
3.45. Ángulo entre planos	111
3.46. Planos paralelos	112
3.47. Planos perpendiculares	113
3.48. Intersección de planos	114
3.49. Recta paralela a un plano	115
3.50. Intersección entre una recta y un plano	117
3.51. Distancia de un punto a un plano	118
5.1. Imagen bajo $L$ de los puntos que están en el segmento de recta	163
5.2. Imagen bajo $L$ de los puntos que están en el cuadrado	164
5.3. Imagen bajo $L$ de los puntos que están en el círculo	165



# Prólogo

Este libro pretende ser un punto de referencia que ayude a planificar el curso de álgebra lineal en los programas de las ingenierías y de la licenciatura en matemáticas y física, facilitando el esfuerzo que cada profesor debe hacer al iniciar el curso. También pretende aportar fundamentos y orientaciones que ayuden a elaborar la programación de la intervención en el aula y a organizar la enseñanza del álgebra lineal manejando problemas de los contextos profesionales hacia los que se orientan los estudiantes.

Se brinda específicamente a los profesores y estudiantes un marco conceptual sobre la teoría de matrices, los sistemas de ecuaciones lineales, los espacios vectoriales, las transformaciones lineales y los valores y vectores propios de una matriz. También se presenta una amplia gama de ejemplos, tanto teóricos como prácticos.

El libro está organizado en seis capítulos. En el primer capítulo se estudian las matrices y se aplican a la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

El capítulo dos se dedica al estudio de los determinantes, presentándose algunas aplicaciones del método de cofactores y la regla de Cramer en la determinación de la matriz inversa y la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

En el capítulo tres se hace un estudio gráfico y analítico de la teoría de vectores, presentándose algunas aplicaciones de la geometría vectorial con el estudio de rectas y planos.

En el cuarto capítulo se desarrolla la teoría de los espacios vectoriales, estudiando los conceptos de espacio vectorial y subespacio vectorial, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, generadores y bases.

El capítulo quinto se dedica al estudio de las transformaciones lineales, analizando los conceptos de núcleo e imagen, matriz asociada a una transformación, cambios de bases, transformaciones compuestas e inversas.

Finalmente en el sexto capítulo se estudian los conceptos de valores propios y vectores propios de una matriz, la diagonalización de una matriz simétrica y las formas cuadráticas.

Esperamos que este texto contribuya decididamente a la enseñanza de las matemáticas.