Christoph Selter
Elena Zannetin

Mathematik unterrichten in der Grundschule

Inhalte – Leitideen – Beispiele

Christoph Selter · Elena Zannetin

Mathematik unterrichten in der Grundschule

Klett | Kallmeyer

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Impressum

Christoph Selter, Elena Zannetin
Mathematik unterrichten in der Grundschule
Inhalte – Leitideen – Beispiele

1. Auflage 2023
Das E-Book folgt der Buchausgabe 4. Auflage 2023

www.friedrich-verlag.de

Redaktion: Stefan Hellriegel, Berlin
Realisation: Matthias Schiller
E-Book-Erstellung: Friedrich Verlag GmbH; Hannover

ISBN: 978-3-7727-1225-8

Christoph Selter · Elena Zannetin

Mathematik unterrichten in der Grundschule

Inhalte – Leitideen – Beispiele

Klett | Kallmeyer

Raum und Form

Größen und Messen

Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten

Rico
Mathe ist halt dasselbe wie Rechnen. In Mathe ist es immer leise, wenn wir im Schulbuch rechnen. Unsere Lehrerin sagt immer: „Wir haben Mathe und nicht Sprache."

1 Warum dieses Buch?

Es gibt doch schon ein umfangreiches Repertoire an Büchern für die Lehrerausbildung, an Literatur für die Unterrichtspraxis, qualitätsvolle Internet-Plattformen und gute, lehrplankonforme Schulbuchwerke. Warum dann ein weiteres Buch zum Mathematikunterricht an Grundschulen?

Die Adressaten dieses Buches sind (angehende) Lehrpersonen, die sich in kompakter Form über Zielsetzungen, Inhalte und Leitideen des Mathematikunterrichts in der Grundschule informieren möchten. Durch eine exemplarische Darstellung zentraler Themen soll es zum Nachdenken über guten Mathematikunterricht anregen.

Aber: Was ist eigentlich guter Mathematikunterricht? Wir haben Grundschülerinnen und Grundschüler gebeten, ihren Mathematikunterricht zu beschreiben. Die Aussagen der Kinder, die in den Sprechblasen auf dieser Seite zu lesen sind, spiegeln unterschiedliche Wirklichkeiten wider.

Rico und Leonie erfahren offensichtlich einen Unterricht, in dem das Erlernen des Rechnens im Mittelpunkt steht. Die Lernenden bearbeiten Aufgabe für Aufgabe, ohne viel nachdenken oder mit anderen gemeinsam etwas herausfinden zu müssen. Anders ist es bei Maurice und bei Tara: Hier geht es darum, dass Mathematik auch ausprobieren, nachdenken, knobeln, mit anderen zusammenarbeiten, beschreiben und erklären ist. Und hier wird deutlich: Mathe ist viel mehr als nur Rechnen! Und das ist die zentrale Botschaft zeitgemäßen Mathematikunterrichts, die wir Ihnen in diesem Buch anhand vieler Beispiele nahebringen möchten.

Kinder sollen über die gesamte Schulzeit hinweg nicht nur die Inhalte kennenlernen, die im späteren Leben potenziell bedeutsam sind. Zudem sollten sich auch lernen, wie man entdeckt, beschreibt und begründet. Hier sprechen die Lehrpläne von *prozessbezogenen* oder *allgemeinen mathematischen Kompetenzen*.

In diesem Buch beschreiben wir zunächst, was genau unter inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen verstanden wird. Anschließend illustrieren wir das alles durch die ausführliche Darstellung von zehn Unterrichtsbeispie-

Maurice
Die Lehrerin erklärt am Anfang ein bisschen. Ziel ist: Triff die 1.000. Und dann geht die Denkerei los. Es gibt Material: Ziffernkärtchen und ein Probierblatt. Zuerst waren meine Ergebnisse zu groß. Ich habe probiert und probiert, bis ich 1.000 erreicht habe. Das war ein tolles Gefühl. Plötzlich hatte ich noch weitere Ideen.

Leonie
Im Matheunterricht rechnen wir immer Arbeitsblätter. Jedes Kind hat so einen Plan, was es arbeiten muss. Und wenn dann Mathe ist, nehmen wir uns unsere Blätter, die wir noch machen müssen, und rechnen die aus. Und dann heften wir die ab in die Mathe-Mappe. Das ist so wie ins Büro gehen.

Tara
Bei den Mal-Plus-Häusern haben wir erst allein gearbeitet, es uns dann gegenseitig gezeigt und auf Kärtchen geschrieben. Und plötzlich haben wir gemerkt, dass uns noch was gefehlt hat. Am Ende finde ich schön, wenn wir es zusammen geschafft haben. Wenn wir nicht mehr weiterwussten, gab es immer Tipps.

len. Diese widmen sich bestimmten Aufgabenschwerpunkten, sprechen aber darüber hinaus jeweils auch eine übergeordnete Leitidee an wie die Einbeziehung von Eigenproduktionen das beziehungsreiche Üben an. Die zehn Unterkapitel folgen allesamt einem einheitlichen Aufbau:

- Anhand eines Beispiels aus dem Unterricht wird in das Thema eingeführt.
- Auf drei Seiten wird das zentrale fachdidaktische und fachliche themenbezogene Hintergrundwissen anschaulich beschrieben.
- Themenbezogene Denkweisen, Fehlermuster oder Vorstellungen von Lernenden werden dargestellt, um dadurch eine bessere Vorbereitung auf den Unterricht zu ermöglichen.
- Auf fünf Seiten wird ein dann dokumentiertes Unterrichtsbeispiel beschrieben, das einen Aspekt der vorangehenden Hintergrundüberlegungen behandelt.
- Eine Leitidee guten Mathematikunterrichts wird abschließend am ausgewählten inhaltsbezogenen Thema konkretisiert.

Bevor es losgeht: Warum verwenden wir keine Beispiele aus Schulbüchern, obwohl diese doch in der Regel und zu Recht das Leitmedium des Unterrichts darstellen? Wir möchten kein Schulbuch hervorheben. Aber wir möchten die Leserinnen und Leser dabei unterstützen, zunehmend souverän mit ihrem Schulbuchwerk umzugehen.

In dieses Buch sind in Form von sogenannten Kurz-URLS (z. B.: pikas.dzlm.de/089) diverse Verweise auf Websites aufgenommen worden, auf denen Sie weiterführende Hinwiese, Unterrichtsanregungen, Videos, Elternbriefe und vieles andere mehr finden können. Diese Websites entstammen fünf Projekten, in denen die Autorin und der Autor aktiv sind. Im Einzelnen sind es die rechts kurz beschriebenen Projekte.

pikas.dzlm.de:
PIKAS – Fortbildungs-, Unterrichts- und Informationsmaterialien für den Mathematikunterricht in der Grundschule

mahiko.dzlm.de
Mathehilfe kompakt – Erklärvideos für Mathelfende, Lernvideos für Kinder und Übungsmaterial als Unterstützungsangebot

primakom.dzlm.de:
Primakom – Zentrale Hintergrundinformationen und Unterrichtsanregungen für Mathematik fachfremd Unterrichtende

kira.dzlm.de:
Kinder rechnen anders (Kira) – Hintergrundinformationen und Videos bzw. Schülerlösungen zur Illustration der Denkweisen von Lernenden

pikas-mi.dzlm.de:
Mathe inklusiv mit PIKAS – Hintergrundinformationen, Konzeptionen und Unterrichtsanregungen für inklusiven Mathematikunterricht

mathe-sicher-koennen.dzlm.de:
Mathe sicher können – aufeinander abgestimmtes Diagnose- und Fördermaterial für „mathematikschwache“ Lernende ab Klasse 3

2 Mathe – mehr als Rechnen

Zeitgemäßer Mathematikunterricht verfolgt vielfältige Zielsetzungen. In der Auseinandersetzung mit mathematikhaltigen Aufgaben sollen die Lernenden Kompetenzen erwerben, die sie sowohl für das Weiterlernen in der Schule als auch für die Bewältigung lebensweltlicher Situationen benötigen.

So weit, so gut. Doch was sind eigentlich Kompetenzen? Weinert (2001, S. 27f.) versteht darunter „die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können".

Individuelle Kompetenz umfasst also diverse netzartig zusammenwirkende Facetten wie Wissen, Fähigkeit, Verstehen, Können, Handeln, Erfahrung und Motivation. Sie wird verstanden als Disposition, die eine Person befähigt, konkrete Anforderungssituationen eines bestimmten Typs zu bewältigen. Kompetenzen sind also weit mehr als nur Inhaltswissen.

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz und die Lehrpläne der einzelnen Bundesländer, die die Grundlage für die Ausrichtung des Grundschulunterrichts darstellen, stellen hierzu konkrete kognitive Kompetenzerwartungen auf und strukturieren sie entlang von Kompetenzbereichen.

Die Ausführungen unterscheiden sich in Nuancen von Bundesland zu Bundesland; darauf gehen wir aber im Weiteren nicht ein. Stattdessen verwenden wir in der Zusammenschau eine Strukturierung entlang von jeweils vier inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen, die in den beiden nachfolgenden Kapiteln vorgestellt werden.

Im Mathematikunterricht sollen die Lernenden nicht nur mathematische Verfahren ausführen und Basisfakten abrufen können, sie sollen auch „verstehen" lernen. Dies soll in einer Unterrichtskultur ermöglicht werden, die sich am Kind und seinen Denkweisen orientiert. Ihm sollen einerseits Wege aufgezeigt werden, es soll andererseits aber auch eigene Denkwege gehen können und dabei stets ermutigt werden, effizientere, elegantere und weniger fehleranfällige Denk- und Vorgehensweisen zu entwickeln. Dabei spielt der Einsatz von Aufgaben, die Raum für Entdeckungen geben und eigenes Denken ermöglichen, eine zentrale Rolle.

Ein Beispiel: Vergleichen Sie die beiden Aufgaben auf dieser Seite. Auf den ersten Blick unterscheiden sie sich nicht. Es sind jeweils fünf Aufgaben, bei denen zwei dreistellige Zahlen voneinander subtrahiert werden müssen. Dabei treten auch Fälle auf, bei denen die jeweilige Ziffer im Subtrahenden, also die untere Zahl, größer ist als die darüberstehende Ziffer im Mi-

Aufgabe 1: Rechne aus!

324	682	871	944	502
–279	–384	–129	–675	–307

Aufgabe 2: Was fällt dir auf? Erkläre!

321	432	543	654	765
–198	–198	–198	–198	–198

nuenden. Schaut man jedoch genauer hin, so erkennt man, dass bei Aufgabe 1 die einzelnen Zahlen innerhalb einer Aufgabe und die einzelnen Aufgaben untereinander in keiner Beziehung zueinander stehen. Hier können die Lernenden die Ausführung des Algorithmus der schriftlichen Subtraktion üben. Es geht also um eine ausschließliche Förderung inhaltsbezogener Kompetenzen.

Bearbeiten Sie nun die Aufgabe 2. Subtrahiert man von 321 den Subtrahenden 198, so erhält man das Ergebnis 123, aus 432 wird 234 usw. (also stets die „Umkehrzahl"). Sie können feststellen, dass es hier nicht nur um die Übung der schriftlichen Subtraktion geht, sondern auch prozessbezogene Kompetenzen angesprochen werden. Der offene Arbeitsauftrag: „Was fällt dir auf? Erkläre!", fordert die Kinder dazu auf, genauer hinzuschauen, Zusammenhänge zu entdecken und diese auch zu erklären.

Wo immer es möglich ist, sollten inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen *integriert* gefördert werden, da die zur Verfügung stehende Unterrichtszeit begrenzt ist. Jedoch ist dies nicht immer sinnvoll. An einigen Stellen müssen im Unterricht ausschließlich die inhaltsbezogenen Kompetenzen angesprochen werden, etwa dann, wenn in reinen Übungsstunden zum Beispiel die Automatisierung des Einmaleins im Zentrum steht. Denkbar sind manchmal auch Stunden, in denen allein die prozessbezogenen Kompetenzen angesprochen werden, etwa dann, wenn die Lernenden sich mit Sudokus beschäftigen.

Halten wir also fest: Der Erwerb kognitiver, also inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen ist die zentrale Zielsetzung zeitgemäßen Mathematikunterrichts. Inhaltsbezogene Kompetenzen bilden dabei einerseits oft die Grundlage, um prozessbezogene Kompetenzen weiterentwickeln zu können. Denn wenn ein Kind nicht schriftlich subtrahieren kann, wird es die Zusammenhänge und Beziehungen zwischen den Aufgaben und ihren Ergebnissen nicht entdecken und somit auch nicht beschreiben, begründen oder darstellen können.

Andererseits werden die inhaltsbezogenen Kompetenzen stets mitgefördert und „geübt", auch wenn der Fokus auf dem Beschreiben, Begründen oder Darstellen mathematischer Besonderheiten in den unterschiedlichen (nicht nur arithmetischen) Bereichen liegt. Prozessbezogene Kompetenzen unterstützen somit den Erwerb inhaltsbezogener Fertigkeiten und Fähigkeiten und nehmen „eine herausragende Rolle bei der Entwicklung von auf Verständnis gegründeten inhaltlichen mathematischen Kompetenzen" (Walther/Selter/Neubrand 2008, S. 20) ein.

Aber im Mathematikunterricht geht es nicht nur um den Erwerb der formulierten inhalts- oder prozessbezogenen Kompetenzen. *Freude* und *Interesse* an mathematikhaltigen Aufgabenstellungen auf- bzw. auszubauen, ist ebenfalls ein wesentliches Ziel des Unterrichts. Durch die Auseinandersetzung mit geeigneten Problemstellungen kann der „Entdeckergeist" der Kinder geweckt werden. So kann eine grundlegende *Motivation* und *Ausdauer* für den Prozess mathematischen Arbeitens entwickelt werden. Ein weiteres zentrales Ziel ist es, dass die Kinder *Selbstvertrauen* in ihre eigenen mathematischen Kompetenzen erlangen. Auch sollen sie dafür zu einem *konstruktiven Umgang mit Fehlern und Schwierigkeiten* angeleitet werden, indem sie diese als produktive Lerngelegenheiten wahrnehmen. Dabei ermöglichen es positive Rückmeldungen und ermutigende Hilfestellungen (zum Beispiel in Form von Tippkarten), dass die Kinder ihre eigenständigen mathematischen Aktivitäten als bedeutungsvoll ansehen.

3 Prozessbezogene Kompetenzen

Die bundesweiten Bildungsstandards für Mathematik im Primarbereich aus dem Jahr 2004 legen die Förderung prozessbezogener (allgemeiner mathematischer) Kompetenzen als konstitutives Element des Mathematikunterrichts fest. Mehr als zehn Jahre später kann man konstatieren, dass sich alle Lehrpläne der 16 Bundesländer auf breiter Basis in diese Richtung entwickelt haben. Und die Lehrpläne machen verbindliche Vorgaben zur Gestaltung des Unterrichts.

Die Bildungsstandards und die Lehrpläne der einzelnen Bundesländer verwenden teilweise unterschiedliche Formulierungen, wenn über prozessbezogene Kompetenzen gesprochen wird. Dabei werden manchmal fünf, manchmal vier prozessbezogene Kompetenzbereiche benannt. Wir formulieren in der Gesamtschau der vorliegenden amtlichen Dokumente *Problemlösen, Argumentieren, Darstellen und Modellieren* als die vier zentralen prozessbezogenen Bereiche. In der Auseinandersetzung mit reichhaltigen Aufgaben werden selten Kompetenzen allein aus einem Bereich – also zum Beispiel nur zum Darstellen – angesprochen. Gleichwohl beschreiben wir im Folgenden die vier Kompetenzbereiche getrennt.

Aber warum sollen Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht nicht nur rechnen lernen, sondern auch ihre Kompetenzen ausbauen, Probleme zu lösen, zu argumentieren, ihre Gedanken darzustellen und Sachsituationen zu modellieren? Aus unserer Sicht gibt es im Wesentlichen drei Begründungsstränge.

- **Mathematischer Begründungsstrang:** Auf die Frage, was Mathematik ist, geben Mathematiker häufig die Antwort: *Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern*. „Muster" meint keineswegs nur sichtbare Muster wie Zahlenfolgen oder Parkette. Weit darüber hinausgehend steht das Wort „Muster" stellvertretend für Begriffe wie *Ordnungen, Strukturen, Beziehungen, Zusammenhänge, Auffälligkeiten, Abhängigkeiten* oder *Regelmäßigkeiten.* Muster kann man nicht nur betrachten und reproduzieren, sondern auch erforschen, fortsetzen, ausgestalten und selbst erzeugen (vgl. Wittmann 2003, S. 26; Müller, Selter/Wittmann 2012). Denken Sie an die Muster in den sogenannten Entdeckerpäckchen (1 + 2 = 3; 2 + 3 = 5; 3 + 4 = 7; 4 + 5 = 9 usw.).
- **Grundschulpädagogischer Begründungsstrang:** Eine ganz zentrale Aufgabe der Grundschule besteht in der Erziehung zur Selbstständigkeit und Eigenverantwortlichkeit. Die Lernenden sollen in zunehmendem Maße in die Lage versetzt werden, verantwortlich am Leben teilzuhaben und es zu gestalten. Sie sollen lernen, eigene Sichtweisen zu artikulieren und Sichtweisen der anderen zu berücksichtigen, Herausforderungen aktiv anzugehen usw. – und das nicht nur im Kontext mathematikbezogener Lebenssituationen. Lernen findet jedoch wesentlich in den Fächern statt.
- **Lernpsychologischer Begründungsstrang:** Lernen wird heutzutage nicht mehr als Bau einer Mauer nach einem vorgegebenen Plan, sondern als fortlaufendes Knüpfen eines Netzes von Wissenselementen, Fertigkeiten und Fähigkeiten verstanden. Lernen bedeutet al-

Prozessbezogene Kompetenzen – eine Übersicht

Problemlösen Problemlösen ist zunehmend zielgerichtetes Denken und Handeln in Situationen, in denen eine *Diskrepanz* zwischen den *vorhandenen Fähigkeiten* und den *Aufgabenanforderungen* wahrgenommen wird. Für deren Bewältigung stehen den Lernenden keine routinierten Verfahren zur Verfügung. In der Auseinandersetzung mit den Aufgabenanforderungen können die Lernenden aber Vorgehensweisen entwickeln, die es ihnen auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen, das Problem oder Teile des Problems zu lösen.	**Modellieren** Modellieren heißt, komplexere Aufgaben, die einen Realitätsbezug aufweisen und für deren Bewältigung eine nähere Auseinandersetzung mit dem Kontext erforderlich ist, mit Hilfe von Mathematik zu lösen. Hier muss modelliert werden, also ein Modell, eine vereinfachte Darstellung des Sachverhalts erstellt werden, das sich auf die Informationen beschränkt, die zur mathematischen Bearbeitung notwendig sind. Anschließend muss ein Rückbezug zur Ausgangsfragestellung vorgenommen, also „de-modelliert" werden.
Argumentieren In der Mathematik wird das Beweisen häufig als der Aufbau einer strengen, formal notierten Kette von Schlussfolgerungen verstanden. Spricht man von Argumentieren, so will man andeuten, dass auch weniger strenge, für die Grundschule geeignete Formen zur Erklärung von Zusammenhängen geeignet sind (zum Beispiel verbale oder zeichnerisch bzw. durch Material gestützte, auch exemplarisch angelegte). Eine Argumentation erfolgt einerseits, um sich selbst zu überzeugen. Im Klassenzimmer geht es aber immer auch darum, andere zu überzeugen. Argumentieren hat also immer auch eine soziale und kommunikative Funktion.	**Darstellen** Unter Darstellen wird in der Mathematik die Fähigkeit verstanden, mathematische Sachverhalte durch ■ materiale (z. B. Wendeplättchen), ■ bildliche (z. B. Punktefelder) ■ verbalsprachliche (z. B. Beschreibung eines Rechenweges) oder ■ symbolsprachliche (z. B. Zahlensätze wie 4 + 7 = 11) Repräsentationen wiederzugeben. Beim Darstellen geht es also um die Veräußerung von inneren Überlegungen. Dieses kann mündlich oder schriftlich passieren. Zudem gibt es eine Vielzahl von Mischformen.

so, bereits existierende Zusammenhänge zu nutzen, um weitere Zusammenhänge aufzubauen.

Wie bereits erwähnt, wäre es nun verfehlt, die Forderung nach einer stärkeren Berücksichtigung prozessbezogener Kompetenzen so zu verstehen, dass der Erwerb von Basiskompetenzen, der bisweilen auch ein anschauungs- und verständnisbasiertes Rechentraining erfordert, nachgeordnet erfolgen oder gar vernachlässigt werden könnte.

Andererseits hilft das Erkennen von Zusammenhängen Basiskompetenzen zu erwerben: Es wäre ineffektiv und aufwendig, alle 100 Aufgaben des sogenannten kleinen Einspluseins auswendig zu lernen; daher behandelt man die Strategien, um sich unter Ausnutzung von sogenannten Hilfsaufgaben damit zusammenhängende Aufgaben zu erarbeiten. (Wenn man weiß, dass 4 + 4 = 8 ist, kann man davon zum Beispiel auch 5 + 4, 4 + 5, 3 + 4 oder 4 + 3 ableiten; vgl. S. 58ff.).

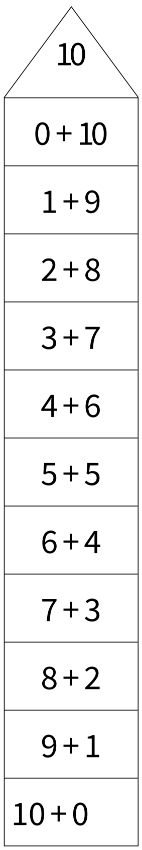
Abschließend: Die Fähigkeiten, zu entdecken, zu beschreiben und zu argumentieren, entwickeln sich häufig nicht von selbst. Die Entwicklung der prozessbezogenen Kompetenzen muss daher – wie der Erwerb der Aufgaben des Einmaleins – von der Lehrperson durch unterrichtliche Anregungen sowie durch entsprechende Aufgabenstellungen und Hilfen aktiv unterstützt werden (vgl. hierzu pikas.dzlm.de/161).

3.1 Problemlösen

Problemlösen ist kurz gesagt dadurch gekennzeichnet, dass die vorhandenen oder aktivierbaren Kenntnisse und Fähigkeiten zur Bearbeitung einer Aufgabenstellung nicht ausreichen. Eine prinzipiell überwindbare Barriere verhindert zum gegenwärtigen Zeitpunkt die Lösung.

Aufgaben, die mit Routineverfahren gelöst werden können, sind keine Aufgaben, die das Problemlösen anregen. Sie sind „zu leicht“. Auch Aufgaben, die zu schwierig sind, weil die vorhandenen Kenntnisse und Fähigkeiten keinen geeigneten Ausgangspunkt darstellen oder weil die zur Aufgabenlösung benötigten Kenntnisse nicht aktiviert werden können, sind keine Problemlöseaufgaben. Sie ermöglichen der/dem Lernenden dauerhaft bestenfalls unsystematisches Probieren.

Das bedeutet natürlich auch: Ob eine Aufgabe eine Aufgabe zum Problemlösen ist, hängt von den individuellen Kenntnissen und Fertigkeiten der/des potenziellen Problemlösenden ab. Hierzu ein Beispiel. Im 1. Schuljahr erhalten die Lernenden die Aufgabe, möglichst geschickt alle Zerlegungen der Zahl 10 in 2 Summanden zu finden.



Manche Kinder werden von Anfang an systematisch vorgehen, also zum Beispiel mit 0 + 10 beginnend jeweils den ersten Summanden um 1 erhöhen und den zweiten jeweils um 1 vermindern. Für diese Kinder existiert vermutlich die Barriere nicht; man könnte ihnen aber eine verwandte Aufgabe stellen, etwa die Frage nach dem (begründeten) Zusammenhang der Anzahl der Möglichkeiten und der zu zerlegenden Zahl (Es gibt immer 1 Stockwerk mehr als es die Zahl selbst angibt; also 4 Stockwerke für die 3, 5 Stockwerke für die 4 usw.). Andere Lernende werden eher unsystematisch einzelne Zerlegungen notieren und beispielsweise durch diese den Vergleich mit den von anderen gefundenen Möglichkeiten in zunehmender Weise ordnen und dabei den Einblick auf die Zusammenhänge richten und systematischer vorgehen.

Problemlösen ist also allgemein gesprochen zielgerichtetes Denken und Handeln in Situationen, in denen eine Diskrepanz zwischen den vorhandenen Mitteln und den Aufgabenanforderungen wahrgenommen wird. In der Auseinandersetzung mit den Aufgabenanforderungen können die Lernenden aber im Problemlöseprozess Vorgehensweisen entwickeln, die ihnen auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen, das Problem oder Teile des Problems zu lösen.

Selbstverständlich sind auch sogenannte Knobelaufgaben wie „In einem Stall sind 22 Beine – wie viele Hühner und wie viele Schafe könnten es sein?“ typische Problemlöseaufgaben. Aber wie das obige Beispiel andeutet, weisen viele Aufgaben, die im Unterricht ohnehin eingesetzt werden, das Potenzial zu einer Problemlöseaufgabe auf. Problemlösen sollte nicht nur in Knobelstunden stattfinden, wie die folgenden Beispiele aus den vier Inhaltsbereichen aufzeigen sollen.

Websites

http://primakom.dzlm.de/111 (Grundlageninformationen zum Problemlösen)

http://kira.dzlm.de/016 (prozessbezogene Kompetenzen – dort Hinweise auf Aufgaben zum Problemlösen)

http://sinus-transfer-grundschule.de/fileadmin/MaterialienIPN/Pfeng_Zahlentreppen.pdf

http://pikas.dzlm.de/008 (die Beispiele aus Haus 7 enthalten zahlreiche Aufgaben zum Problemlösen)

https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_ma_themenheft_problemloesen_2013-05-16.pdf

http://www.faechernet.erz.be.ch/faechernet_erz/de/index/mathematik/mathematik/unterricht/planungshilfe_prim/problemloeseaufgaben.html

Literatur

Heinrich, F./Bruder, R./Bauer, C. (2015). Problemlösen lernen. In: R. Bruder/L. Hefendehl-Hebeker/B. Schmidt-Thieme/H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 277–299). Berlin, Heidelberg: Springer.

Rasch, R. (2003). *42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren.* Seelze: Klett/Kallmeyer.

Kompetenzerwartungen Problemlösen

Erschließen: Fragen zu mathematischen Sachverhalten stellen; Problemstellungen die für die Lösung relevanten Informationen entnehmen; Problemstellungen in eigenen Worten wiedergeben

Lösen: Daten durch Zählen, Messen oder Schätzen gewinnen und verarbeiten; problemhaltige Aufgaben eigenständig bearbeiten; zunehmend systematisch und zielorientiert vorgehen; Lösungsstrategien anwenden; Einsichten in Zusammenhänge zur Problemlösung nutzen

Reflektieren und Überprüfen: Ergebnisse auf Angemessenheit überprüfen; Fehler finden und korrigieren; verschiedene Lösungswege vergleichen und bewerten

Übertragen: Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung nutzen; Vorgehensweisen auf ähnliche oder weiterführende Problemstellungen übertragen

Erfinden: Aufgaben (in Anlehnung an vorgegebene) erfinden; eigene Lösungsstrategien entwickeln und nutzen

Zahlen und Operationen

Verschiedene Lösungswege vergleichen und bewerten

7 + 8 = ____
Paul rechnet so: 7 + 7 = 14 und 1 dazu ist 15.
Lisa rechnet so: 7 + 3 = 10 und dann plus 5 ist 15.
Schaue dir Pauls und Lisas Rechenweg genau an: a) Was ist gleich, was ist verschieden? b) Wie rechnest du 7 + 8, 8 + 9, 9 + 3, 4 + 8? c) Bei welchen Aufgaben eignet sich Pauls Rechenweg gut, bei welchen nicht?

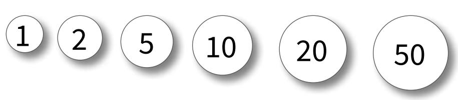
Raum und Form

Aufgaben (in Anlehnung an vorgegebene) erfinden

Wie musst du den Spiegel hinstellen?
Erfinde eigene Aufgaben. Zeichne die Zielfiguren auf.

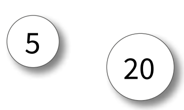
Größen und Messen

Zunehmend systematisch und zielorientiert vorgehen



Alex hat *genau* zwei *verschiedene* Cent-Münzen in seiner Hand. Wie viel Geld könnte das sein? Überlege dir, wie du geschickt alle Möglichkeiten findest.

Überlege dir, wie du geschickt alle Möglichkeiten findest.



Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten

Fragen zu mathematischen Sachverhalten stellen

Welche Fragen kannst du zu den Zahlen in der Tabelle stellen?

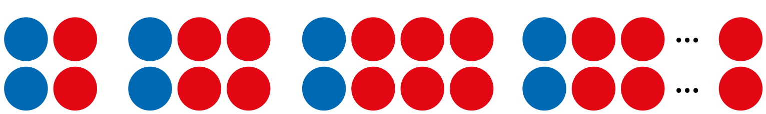
Klasse	Mädchen	Jungen
1a	12	16
1b	13	15
2a	16	10
2b	12	14
3a	13	13
3b	12	12

3.2 Argumentieren

In der Mathematik wird das *Beweisen* häufig als der Aufbau einer strengen, formal notierten Kette von Schlussfolgerungen verstanden. Spricht man von *Argumentieren*, so will man andeuten, dass weniger strenge, auch für die Grundschule geeignete Formen (zum Beispiel verbale oder zeichnerisch oder materialgestützte) zur Erklärung von Zusammenhängen geeignet sind. Eine Argumentation erfolgt einerseits, um *sich selbst* zu überzeugen. Im Klassenzimmer geht es aber immer auch darum, *andere* zu überzeugen. Argumentieren hat also immer auch eine soziale und kommunikative Funktion.

Möglich ist dabei, dass man *miteinander* argumentiert („Wir überlegen gemeinsam, warum das so ist") oder *gegeneinander* („Wer von uns beiden hat warum Recht?"). Mit dem Argumentieren ist nicht nur die Intention verbunden nachzuweisen, *dass* etwas so ist, wie es ist, sondern auch aufzuzeigen, *warum* es so ist.

Wichtig ist dabei noch Folgendes: Um zu zeigen, dass eine Vermutung nicht stimmt, reicht ein einziges *Gegenbeispiel*. Die Summe zweier gerader Zahlen ist nicht immer durch 4 teilbar. Es gibt mindestens ein Beispiel, bei dem dies nicht der Fall ist (6 + 8 = 14) – und noch viele andere, aber ein Gegenbeispiel reicht. Um zu zeigen, dass eine Vermutung stimmt („Die Summe zweier gerader Zahlen ist immer durch 2 teilbar"), reicht das *Beispiel* 6 + 8 = 14 nicht aus, auch nicht, wenn man es um zehn weitere Beispiele ergänzen würde.



2 + 2 2 + 4 2 + 6 2 + gerade Zahl

Das ist kein Plädoyer gegen Beispiele – ganz im Gegenteil. Beispiele sind zum Erkennen von Zusammenhängen und zum Aufstellen von Vermutungen von eminenter Bedeutung. Allerdings muss man Ordnung in die Beispiele bringen, sodass man deren Zusammenhänge erkennen kann. Man könnte systematisch Summen notieren, zum Beispiel 2 + 2, 2 + 4, 2 + 6, 2 + 8, 2 + 10 usw., und ihre Ergebnisse untersuchen. Anschließend könnte man Summen wie 4 + 2, 4 + 4, 4 + 6 usw. bilden und sie zu den vorangehenden Aufgaben und Ergebnissen in Beziehung setzen: Was ist gleich, was ist verschieden? Ausgehend von einer geraden Summe (2 + 2) kommen stets 2 hinzu. Das ändert nichts daran, dass die Summe stets gerade ist.

Für das Argumentieren sind vier Teilkompetenzbereiche von Bedeutung, die nicht notwendigerweise der Reihe nach durchlaufen werden: *Beschreiben, Vermuten, Begründen, Überprüfen.* Auch müssen nicht bei jeder Aufgabe alle vier Bereiche realisiert werden.

Manche Kinder *beschreiben* für einige Beispiele oder für eine Klasse von Beispielen wie 2 · 1, 2 · 2, 2 · 3, 2 · 4, dass ihnen auffällt, dass bei allen vier Produkten eine gerade Ergebniszahl herauskommt. Andere Kinder setzen die Serie der Aufgaben um einige weitere fort und *vermuten*, dass das immer so weitergehe. Auch ist es möglich, mithilfe von Plättchen zumindest ansatzweise zu *begründen*, warum die Vermutung stimmt. Die vierte Komponente, *Überprüfen*, besteht darin, über die Lösung zu reflektieren, etwa indem gefragt wird, warum man sich sicher sein kann, dass die Argumentation auch dann gilt, wenn die 2 nicht der erste, sondern der zweite Faktor ist.

Websites

http://primakom.dzlm.de/115 (Grundlageninformationen zum Argumentieren)

http://kira.dzlm.de/016 (Prozessbezogene Kompetenzen – dort Hinweise auf Aufgaben zum Argumentieren)

http://sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Mathe_Bezold.pdf

Literatur

Bezold, A. (2009): *Förderung der Argumentationskompetenz durch selbstdifferenzierende Lernangebote*. Hamburg: Dr. Kovac.

Hengartner, E./Hirt, U./Wälti, B. (2006): *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Zug: Klett/Balmer.

Kompetenzerwartungen Argumentieren

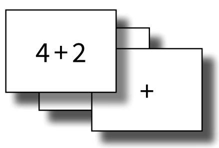
Beschreiben: Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen ansatzweise aufgrund allgemeiner Überlegungen erklären; eigene Vorgehensweisen und Lösungswege verständlich angeben

Vermuten: Vermutungen über mathematische Zusammenhänge und Auffälligkeiten anstellen; Vermutungen anhand von Beispielen testen

Begründen: eigene Vorgehensweisen und Lösungswege begründen; Begründungen anderer nachvollziehen; Vermutungen anhand von Beispielen bestätigen oder widerlegen; allgemeine Überlegungen nachvollziehen und entwickeln

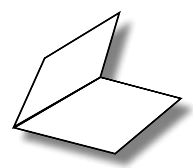
Überprüfen: Vermutungen, Lösungen sowie eigene und Aussagen anderer hinterfragen

Zahlen und Operationen
Eigene Vorgehensweisen und Lösungswege begründen



Finde alle Zweiersummen
mit dem Ergebnis 6.
Begründe, warum du alle gefunden hast.

Raum und Form
Vermutungen über mathematische Zusammenhänge und Auffälligkeiten anstellen



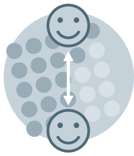
Vermute, wie du schneiden
musst, damit ein Herzchen entsteht.
Zeichne deine Lösung ein.

Größen und Messen
Vermutungen, Lösungen sowie eigene und Aussagen anderer hinterfragen

Lea sagt: „Das kostet mehr als 10 Euro." Hat sie recht?

Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten
Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen ansatzweise aufgrund allgemeiner Überlegungen erklären

Wirf eine Münze 100 Mal. Notiere, wie häufig Kopf und wie häufig Zahl geworfen wird.
Was fällt dir auf, wenn du die beiden Anzahlen vergleichst?
Stell dir vor, du wirfst noch 100 Mal: Wie häufig könnte Kopf und wie häufig Zahl geworfen werden?



3.3 Darstellen

Unter Darstellen wird in der Mathematik die Fähigkeit verstanden, mathematische Sachverhalte durch

- materiale (z B. Wendeplättchen),
- bildliche (z. B. Punktefelder)
- verbalsprachliche (z. B. Beschreibung eines Rechenweges) oder
- symbolsprachliche Repräsentationen (z. B. Zahlensätze wie 4 + 7 = 11)

wiederzugeben. Beim Darstellen geht es also um die Veräußerlichung von inneren Überlegungen. Dieses kann mündlich oder schriftlich passieren. Zudem gibt es eine Vielzahl von Mischformen: Skizzen und Diagramme sind häufig eine Mischung aus bildlichen und symbolsprachlichen Darstellungen.

Dabei ist zu beachten, dass die Objekte der Mathematik theoretischer Natur sind. Sie selbst kommen in der Realität nicht vor, „nur“ ihre Darstellungen. Die Zahl 5 kann durch 5 Bonbons, Plättchen, Personen, Bälle, Striche oder Spielzeugautos repräsentiert werden. In all diesen Situationen ist die 5 um 1 mehr als 4 und jeweils die Hälfte von 10; sie kann stets in 3 und 2 untergliedert werden usw. Zudem gibt es auch Repräsentationen der 5, die nicht im Alltag vorkommen, etwa die 5 am Zahlenstrahl oder 5 Rechenplättchen.

Aber die 5 als solche ist nicht fassbar. Insofern ist das Darstellen im Sinne des Repräsentierens des Nicht-Existenten eine fundamentale mathematische Tätigkeit, der allerdings eine gewisse Ambivalenz anhaftet.

Denn einerseits sind die verwendeten Darstellungen Lern*hilfen*, da sie es den Lernenden erleichtern, allgemeine mathematische Begriffe zu verstehen. Sie sind andererseits aber stets auch Lern*stoff*. Denn es gibt keine simple 1:1-Zuordnung zwischen Darstellungsmittel und mathematischem Begriff: Der abstrakte mathematische Begriff muss durch einen geistigen Akt in die Darstellung hineingelesen werden. Haben Sie zum Beispiel eine Vermutung, welche Aufgabe durch das Bild dargestellt werden soll? Die Antwort finden Sie auf kira.dzlm.de/145. Die jeweiligen Bedeutungen sowie die Formen des Umgangs mit der Darstellung müssen von den Kindern erst erlernt werden. Und sie werden von ihnen nach längerer Zeit des Nichtgebrauchs auch wieder vergessen.

Da die Lernenden im Mathematikunterricht verstehen lernen sollen, hat die geeignete *Auswahl* und insbesondere auch die *Vernetzung* der verschiedenen Darstellungen (vgl. S. 68) eine zentrale Bedeutung. Darstellungen fungieren aber nicht nur als Erkenntnismittel, sondern auch als Kommunikationshilfe. Damit Lernende und Lehrperson im Austausch mit anderen *kommunizieren und kooperieren* können, müssen sie die *Unterrichtssprache* (als Gegenbegriff zur Alltagssprache) *verwenden* und *Darstellungen nutzen.*