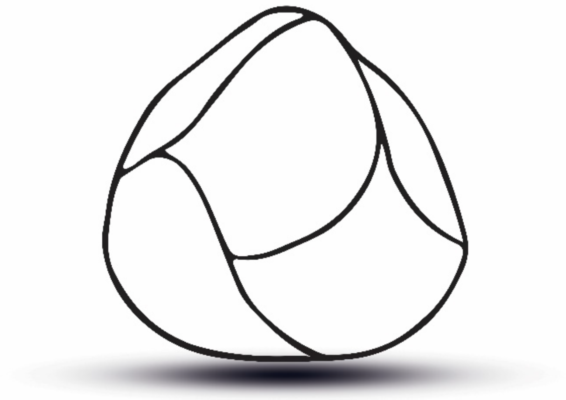
Gabriella Ambrus & Johann Sjuts & Éva Vásárhelyi
(Hrsg.)

Mathematikdidaktische Impulse aus Vergangenheit und Gegenwart



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Mathematiklehren und -lernen in Ungarn 6

Mathematiklehren und -lernen in Ungarn

Herausgegeben von
Éva Vásárhelyi und Johann Sjuts

Band 6

Gabriella Ambrus & Johann Sjuts & Éva Vásárhelyi (Hrsg.)

Mathematikdidaktische Impulse aus Vergangenheit und Gegenwart

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://www.dnb.de abrufbar.

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.winterwork.de/

Mit dem Gömböc fanden die ungarischen Mathematiker Gábor Domokos und Péter Várkonyi im Jahr 2006 eine Lösung für einen dreidimensionalen Körper mit der Eigenschaft, nur eine stabile und nur eine labile Gleichgewichtslage zu haben.

Gömböc-Abbildung auf der Buchvorderseite: Attila Daróci

Ferdinand-Freiligrath-Straße 26, 48147 Münster
Münster 2024

978-3-95987-327-7 Print
978-3-95987-328-4 E-Book
DOI E-Book: https://doi.org/10.37626/GA9783959873284.0

Anmerkung

Die Beiträge dieses Bandes wurden mittels eines von Gabriella Ambrus, Johann Sjuts und Éva Vásárhelyi organisierten Peer-Review-Verfahrens aufgenommen.

Die Verantwortung für Inhalt und Sprache liegt bei den Autorinnen und Autoren.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieser Band widmet sich traditionellen und aktuellen Themen mit Beiträgen, die einen Einblick in historische und heutige Entwicklungen der Mathematikdidaktik geben. Sie verdeutlichen den immerwährenden Wandel, der (zumeist) durch Fortschritt, aber auch (gelegentlich) durch Rückschritt geprägt ist.

Die jeweiligen Analysen sind bestimmt durch fokussierte und komparative Zugriffe sowie durch kritische und evaluative Betrachtungen. Im Zentrum stehen Fragen zur Tauglichkeit, zum Nutzen und zur Wirksamkeit dessen, was beim Lehren und Lernen von Mathematik geschieht: Was ist geeignet, was ist erprobt? Was ist verlässlich, was ist aussichtsreich? Was ist geprüft, was ist förderlich?

Gegliedert ist der Band wie folgt:

I. Didaktische Theorien und Konzepte

II. Lehrpläne, Schulbücher und Unterrichtsprinzipien

III. Medien und Technologien zum Lehren und Lernen von Mathematik

Mit mehreren aus einer Vielzahl sich anbietender Fragestellungen befassen sich die Beiträge in den einzelnen Kapiteln.

• So finden sich in Kapitel I Analysen aus Bezugswissenschaften der Mathematikdidaktik sowie Studien über Schultraditionen und Vorgehensweisen im Lehramtsstudium. Gezielte Maßnahmen können dazu beitragen, grundlegende Theorien und Konzepte für den Mathematikunterricht zu entwickeln und an aktuelle Bedürfnisse anzupassen, zugleich dürfte es aber vermehrt geboten sein, Qualität und Effektivität von Ansätzen im Lehramtsstudium empirisch zu untersuchen. Denn das, was zukünftige Lehrkräfte während ihres Studiums lernen, hat einen wesentlichen Einfluss auf ihre spätere Tätigkeit in Schule und Unterricht. Damit wird Entwicklungs- und Implementationsforschung über relevante berufliche Qualifikationen zu einem unverzichtbaren Bestandteil des Lehramtsstudiums.

• Vergleichende Studien zu Lehrplänen, Schulbüchern und Unterrichtsprinzipien enthält das Kapitel II. Untersuchungen dieser Art ermöglichen es, Gemeinsamkeiten, Unterschiede und Spannungsverhältnisse herauszuarbeiten. Um die Kluft zwischen Ansprüchen und Ergebnissen des Mathematikunterrichts zu überwinden, erscheint es angezeigt, die im Laufe der Zeit curricular etablierten Unterrichtsinhalte und praktizierten Vorgehensweisen kritisch zu reflektieren und so nutzbringende Einsichten zu gewinnen.

• Mit innovativen medialen und technologischen Entwicklungen, die das Lehren und Lernen im Fach Mathematik maßgeblich bereichern können, befassen sich die Beiträge im Kapitel III. Digitale Medien und Werkzeuge wie geometrische Software oder Computeralgebrasysteme bieten vielfältige Varianten zur Verwendung bei Lern- und Problemlöseprozessen im Mathematikunterricht. Durch den Einsatz digitaler Hilfsmittel wird der Umgang mit formalen, symbolischen und technischen Elementen der Mathematik gefördert. Rechenaufwand lässt sich auslagern, sodass der Fokus auf Verständnis und Reflexion liegt. Neuerdings bietet die Künstliche Intelligenz (KI) Möglichkeiten, Lehrpersonen bei der Unterrichtsplanung zu unterstützen. Die Vorteile sollten erkannt, ihre Einschränkungen aber nicht unbeachtet bleiben. KI liefert hilfreiche Impulse, die mit eigenen Ideen verknüpft werden müssen. Insbesondere kann die Analyse der von Chatbots erstellten Aufgabenbearbeitungen KI-Eigenheiten aufzeigen. Lehrende sollten sich also bewusst sein, dass der Einsatz von Sprachmodellen nicht voraussetzungsfrei ist. Chatbots können beim Lösen mathematischer Aufgaben helfen, aber die letztliche Entscheidung und Verantwortung liegt beim Menschen. Ein intelligentes Zusammenwirken von künstlicher und menschlicher Intelligenz ist essentiell.

Die vorliegenden Beiträge beinhalten also geschichtliche Analysen zum Mathematiklernen, vergleichende Untersuchungen von Schulbüchern im Fach Mathematik sowie auf ihre Zielsetzung hin betrachtete mathematikdidaktische Konzepte. Sie thematisieren aber auch jüngere Trends im Mathematikunterricht, die methodische, mediale und technologische Fragestellungen betreffen.

Insgesamt kommen sowohl Konzeptionen zur Ausbildung angehender Lehrkräfte in Mathematik als auch Innovationen zur Gestaltung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse von Kindern und Jugendlichen zur Sprache. Die Beiträge bieten Aufschlüsse, abgestützte Entscheidungen für die Zukunft zu treffen.

Mathematik ist in Ungarn traditionell von hoher kultureller und wissenschaftlicher Bedeutung. Intention der Buchreihe „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ ist es, die beispielgebende Rolle des Landes und den inspirativen Austausch über Grenzen hinweg zum Ausdruck zu bringen.

Ganz in diesem Sinne haben sich etliche Autorinnen und Autoren aus mehreren Ländern – und vielfach im Team – an diesem Band beteiligt.

Für die mathematikdidaktisch gehaltvollen und gewinnbringenden Artikel sei ihnen allen herzlich gedankt.

Gabriella Ambrus & Johann Sjuts & Éva Vásárhelyi

I. Didaktische Theorien und Konzepte

Vásárhelyi: Didaktische Theorien und Konzepte, Wordart 1

Barbara DROLLINGER-VETTER, Zürich

Verknüpfen, Verdichten und Auffalten als zentrale Prozesse des Verstehens und ihr Zusammenhang mit Verstehenselementen

Kurzfassung: In Aeblis Theorie des Strukturaufbaus sind die Prozesse des Verknüpfens, Verdichtens und Auffaltens zentral für das Verstehen. Während Verknüpfen im Zusammenhang mit Verstehensprozessen in der Mathematikdidaktik seit Langem ein wichtiges Thema darstellt, sind die anderen beiden Prozesse weniger bekannt. Im vorliegenden Beitrag werden diese drei Prozesse in einer neuen Visualisierung dargestellt, die Aeblis Grundgedanken zwar beibehält, aber größere Flexibilität ermöglicht als Aeblis ursprüngliche propositionale Schemata. Des Weiteren wird aufgezeigt, welche Funktion diesen Prozessen im Verstehensmodell von Drollinger-Vetter zukommt. Das Ziel des Beitrags besteht darin, die Bedeutung dieser Prozesse für das Nachdenken über Verstehensprozesse herauszuarbeiten und anschaulich aufzuzeigen, wie das Konzept der sogenannten „Verstehenselemente“ darauf aufbaut.

Title: Connecting, condensing, and unfolding as pivotal processes of understanding and their relation to core components of understanding

Abstract: In Aebli’s theory of cognitive structures, the processes of connecting, condensing, and unfolding are pivotal to understanding. While connecting has long been an important topic in mathematics education with regard to processes of understanding, the other two processes are less well known. In this article, these three processes are presented in a new visualisation that retains Aebli’s basic ideas but allows greater flexibility than Aebli’s original propositional schemata. Furthermore, the function of these processes in Drollinger-Vetter’s model of understanding is explained. The aim of the article is to point out the significance of these processes for thinking about processes of understanding and to illustrate how the concept of the so-called “core components of understanding” is based on them.

Classification: C30, C70

Keywords: Aebli’s theory of cognitive structures, core components of understanding, connecting, condensing, unfolding, levelling

Im Folgenden werden in Abschnitt 1 zuerst die zentralen Grundannahmen von Aeblis (1994) Strukturaufbautheorie[1] vorgestellt. Anhand von Aeblis (1978) Aufbauschema zum Begriff „Zeuge“ wird die propositionale Darstellung der in dieser Theorie grundlegenden Prozesse kurz illustriert. Anschließend wird eine vereinfachte, abstrahierte Darstellung der Prozesse vorgestellt. In

[1] Aebli (1994) spricht statt von „Strukturaufbau“ auch von „Begriffsaufbau“.

Abschnitt 2 wird diese vereinfachte Darstellung der Prozesse zusammen mit dem auf diesen Prozessen aufbauenden Begriff der Verstehenselemente verwendet, um das Verstehensmodell von Drollinger-Vetter (2011)[2] zu beschreiben. Dieses Modell kann als eine stark vereinfachte Version eines Aufbauschemas von Aebli aufgefasst werden und ebenfalls als Grundlage für das Nachdenken über Verstehensprozesse und ihre Unterstützung im Unterricht dienen.

1. Aeblis Theorie des Strukturaufbaus

Aus einer *kognitiv-konstruktivistischen Sicht* bedeuten Lernen und Verstehen das Aufbauen von kognitiven Strukturen (z.B. Aebli, 2001; Hiebert & Carpenter, 1992; Reusser, 1998, 2006; zurückgehend auf Piaget, 1973).[3] Neues Wissen wird aus dem bereits vorhandenen Wissen heraus konstruiert. Das heißt, wenn beispielsweise ein neuer Begriff gelernt werden soll, so muss dieser aus bereits verstandenen Begriffen entwickelt werden. Vereinfacht lässt sich dies im Sinne von Aebli (1994) so erklären, dass an bereits bestehenden kognitiven Strukturen, die als Netze zu denken sind, neue Netzteile angeknüpft werden. Diese neuen Netzteile bilden die Bedeutung des neuen zu verstehenden Begriffs. Der Begriffsname (z.B. „Zeuge“) wiederum fungiert vereinfachend dargestellt als Label zu diesem Netzteil. Damit ein neuer Begriff flexibel verwendet werden kann, ist gemäß Aebli (1994) neben den Prozessen des Verknüpfens, Verdichtens und Auffaltens auch noch der Prozess des Einebnens erforderlich.

Im Folgenden werden diese vier kognitiven Prozesse Bezug nehmend auf Aebli theoretisch beschrieben und anschließend in zwei Varianten dargestellt: Unter der Überschrift „Aeblis Darstellung“ wird der Prozess zuerst in Form der propositionalen Darstellung[4] von Aebli am Beispiel des Begriffs „Zeuge“ illustriert. Diese Darstellungen beziehen sich alle auf die folgende Erklärung:

---

[2] Drollinger-Vetter entwickelte das Modell im Rahmen der sogenannten „Pythagoras-Studie“ (Klieme et al., 2009).

[3] Mit kognitiven Strukturen sind nicht nur einzelne Begriffe wie „blau“ oder „Zeuge“ gemeint, sondern beispielsweise auch mathematische Sätze wie der Satz des Pythagoras. Deshalb werden die Termini „Begriff“ und „Konzept“ im Folgenden parallel und teilweise auch austauschbar verwendet, wobei ein Konzept in der Regel inhaltlich umfassender zu verstehen ist als ein Begriff. In der Mathematik werden Begriffe definiert und Sätze müssen bewiesen werden; dies ist die Art und Weise, wie die Disziplin ihre Strukturen und Inhalte deduktiv ordnet. In der Mathematikdidaktik wird deshalb mitunter zwischen dem Lernen von Begriffen und dem Lernen von mathematischen Sätzen unterschieden (z.B. Vollrath, 2001), was aus kognitionspsychologischer Sicht jedoch nicht nötig ist.

[4] Aebli verwendet eine propositionale Darstellung, die sich an der Aussagenlogik orientiert (Aebli, 1993). Eine Proposition ist gemäß Aebli eine Aussage.

Ein Auto und ein Motorrad stoßen zusammen. Peter, der zur Schule geht, beobachtet diesen Zusammenstoß. Er berichtet seine Beobachtung der Polizei. Dieser Peter ist ein Zeuge (vereinfacht nach Aebli, 1978, S. 619).

Unter der Überschrift „Vereinfachte Darstellung" wird anschließend jeweils eine neu konzipierte vereinfachte, abstrahierte „dreidimensionale" Darstellung vorgeschlagen, welche die Prozesse anschaulicher machen soll und für das in Abschnitt 2 zu erläuternde Verstehensmodell zentral ist.

1.1 Verknüpfen

Die Vorstellung, dass Mathematik zu verstehen bedeutet, Verknüpfungen zu machen und Sinn herzustellen, ist weit verbreitet (Aebli, 1994; Hiebert & Carpenter, 1992; Hiebert & Grouws, 2007). Aebli (1994, 1978) betrachtet jedoch eine sehr spezielle Art von Verknüpfungen, nämlich diejenigen zwischen Vorwissenselementen: Durch das Verknüpfen[5] von bestehenden Wissenselementen entstehen neue Netzteile. Wenn sich das Verständnis weiterentwickelt, verändern sich auch die Netze: Weitere Elemente und Verknüpfungen kommen hinzu, alte werden gelöscht und bisherige Netzteile werden umstrukturiert.

<u>Aeblis Darstellung</u>

In den Beispielen von Aebli werden Verknüpfungen meist durch Verben bezeichnet. So werden beispielsweise die Begriffe „Peter" und „Schule" durch das Verb „gehen" zu „Peter geht zur Schule" verknüpft. In propositionaler Darstellung wird dies als „GEHEN (peter, schule)" notiert.

<u>Vereinfachte Darstellung</u>

Die Ellipsen in Abbildung 1 stellen Elemente des Vorwissens dar, während die verbindenden Linien die Verknüpfungen zwischen diesen Elementen symbolisieren, wodurch ein einfaches Netz entsteht.

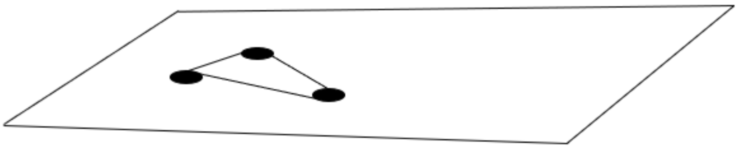


Abb. 1: Verknüpfung von Vorwissenselementen (eigene Darstellung)

Da die Netze kontinuierlich größer und „unübersichtlicher" werden, sind Verknüpfungen allein für den Aufbau von kognitiven Strukturen nicht hinreichend, sondern es sind weitere Prozesse erforderlich, die nachfolgend beschrieben werden.

[5] Aebli (1993) spricht von „Relationen", das heißt einer Beziehung, weshalb eine Verknüpfung als ein „In-Beziehung-Setzen" aufzufassen ist.

1.2 Verdichten

In Aeblis (1994) Begriffsanalysen entstehen aus vorhandenen Elementen und ihren Verknüpfungen durch Verdichten[6] neue Elemente höherer Ordnung. „Verdichten“ bedeutet in diesem Kontext „Vergegenständlichen in ein neues Objekt des Denkens“. Dies kann gemäß Aebli in verschiedenen Medien der Repräsentation erfolgen: verbalsprachlich, bildlich, handelnd oder formal. Verdichtungen stellen Aebli (1994, S. 104) zufolge „leicht faßbare und leicht behaltbare Konzentrate des bisher aufgebauten Netzes dar“. Sie sind gewissermaßen Stellvertreter, die das Gedächtnis entlasten (Aebli, 1994). Ergebnisse des bisherigen Aufbaus werden somit in eine Form gebracht, die eine weitere Verarbeitung ermöglicht (Aebli, 1994). Das neue verdichtete Element kann seinerseits mit anderen Elementen verknüpft und zu einem neuen Element „höherer Ordnung“ verdichtet werden. Die Bedeutung der Vorwissenselemente und ihrer Verknüpfungen wird während eines Verstehensprozesses durch das Verdichten sozusagen an das neue verdichtete Elemente „weitergereicht“, weshalb Aebli (1994) von „Sinnfluss“ spricht.

Der entscheidende Punkt beim Verdichten besteht darin, dass dieses *nicht* als Zusammensetzen von Einzelteilen aufzufassen ist in der Art, wie ein Möbelstück aus Einzelteilen zusammengesetzt wird. Bei einem verdichteten Element handelt es sich in der Regel auch nicht um einen Oberbegriff, der bestimmte Unterbegriffe zusammenfassen würde, so wie „Möbelstück“ den Oberbegriff zu „Stuhl“, „Schrank“ und „Bett“ bildet. Vielmehr geht es darum, dass im verdichteten Objekt das ganze bisherige Netz mit seinen Elementen *und* seinen Verknüpfungen enthalten ist und dass dieses verdichtete Objekt jederzeit wieder in seine Elemente und Verknüpfungen aufgefaltet werden kann, was in Abschnitt 1.4 beschrieben wird.

<u>Aeblis Darstellung</u>

Aus der Verknüpfung „GEHEN (peter, schule)“ wird das verdichtete Element „$\text{peter}_{\text{G, sch}}$“. Es bedeutet „Peter, der zur Schule geht“. Zur besseren Lesbarkeit wird dafür im Folgenden die weniger stark formalisierte Notation „$\text{peter}_{\text{der zur Schule geht}}$“ verwendet.

<u>Vereinfachte Darstellung</u>

Das ganze Netz aus Abbildung 1, das heißt die Elemente und ihre Verknüpfungen, wird in ein neues Element A verdichtet, wie dies Abbildung 2 entnommen werden kann. Element A ist auf einer neuen Ebene dargestellt, um anzuzeigen,

[6] Aebli selbst spricht meist nicht von „Verdichten“, sondern von „Objektivieren“.

dass es sich um ein Element höherer Ordnung handelt, in dem das ganze „darunterliegende“ Netz enthalten ist. Der Prozess verläuft in Pfeilrichtung nach oben.

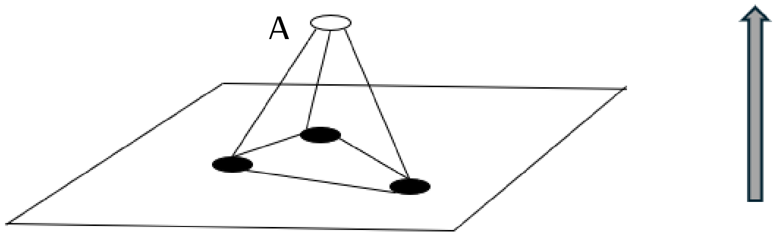


Abb. 2: Verdichten der Vorwissenselemente in ein neues Element A höherer Ordnung (eigene Darstellung)

1.3 Wechselspiel von Verknüpfen und Verdichten im Verstehensprozess

Die Prozesse des Verknüpfens und Verdichtens lassen sich grundsätzlich beliebig fortsetzen, da jedes verdichtete Element wiederum als Vorwissenselement aufgefasst werden kann, das durch Verknüpfen und Verdichten zu einem Element (noch) höherer Ordnung wird. Diese Prozesse wechseln sich in fortschreitenden Verstehensprozessen mehrfach ab (Aebli, 1994).

Aeblis Darstellung

Verdichten und Verknüpfen als sich abwechselnde Prozesse werden in Abbildung 3 in propositionaler Schreibweise illustriert, wobei die originale Darstellung von Aebli (1978, S. 621) jedoch vereinfacht wurde, um sie verständlicher zu machen. Schülerinnen und Schüler, die der Erklärung zum Begriff „Zeuge“ (siehe Abschnitt 1) folgen, bauen im gelingenden Fall das in Abbildung 3 aufgeführte Aufbauschema auf. In diesem Schema werden die Verknüpfungen in Großbuchstaben festgehalten, während die Vorwissenselemente klein geschrieben sind. Das jeweils verdichtete Element wird durch einen Pfeil gekennzeichnet. Die Bedeutung der verdichteten Verknüpfung schließlich wird in Indizes in sprachlicher Form notiert und nicht abgekürzt wie in Aeblis ursprünglicher Darstellung.[7]

---

[7] Lesebeispiel: Die verdichteten Elemente „peter$_{\text{der zur Schule geht}}$“ und „zusammenstoss$_{\text{des Autos und des Motorrads}}$“ aus dem ersten Schritt (1 und 1.1) werden im zweiten Schritt durch das Verb „beobachten“ miteinander verknüpft. Die daraus entstandene Verknüpfung „BEOBACHTEN (zusammenstoss 1.1, peter 1)“ wird ihrerseits wieder im Element „beobachtung$_{\text{des Zusammenstosses durch Peter}}$“ verdichtet. Anhand dieses Ausschnitts aus dem Aufbauschema lässt sich somit illustrieren, dass Ergebnisse von früheren Verknüpfungen in neue Verknüpfungen höherer Ordnung eingehen (für ausführliche Erläuterungen zum Aufbauschema siehe Steiner, 2001, S. 168–170).

1 GEHEN (peter, schule)

→peter der zur Schule geht

1.1 ZUSAMMENSTOSSEN (auto, motorrad)

→zusammenstoss des Autos und des Motorrads

2 BEOBACHTEN (zusammenstoss 1.1, peter 1)

→beobachtung des Zusammenstosses durch Peter

3 BERICHTEN (beobachtung 2, peter 1, polizei)

→peter der die Beobachtung der Polizei berichtet

4 Peter 3 = „Zeuge“

Abb. 3: Aufbauschema der Begriffserklärung zum Begriff „Zeuge“ nach Aebli (1978) in der weniger formalen Darstellung von Drollinger-Vetter (2011, S. 66)

Wie sich Abbildung 3 entnehmen lässt, sind Aeblis Darstellungen sehr präzise, aber auch vergleichsweise abstrakt, was ihren praktischen Nutzen für die Anleitung von Verstehensprozessen im Unterricht einschränkt. Für die Argumentation im vorliegenden Beitrag sind daher insbesondere die folgenden drei Aspekte von Aeblis Schemata wichtig: Aebli trennt zwischen dem Begriffsnamen („Zeuge“), der erst in der letzten Zeile auftritt, und der Bedeutung des Begriffs, die im ganzen Aufbauschema entwickelt wird. Der neue Begriff „Zeuge“ wird aus bereits als bekannt vorausgesetzten Vorwissenselementen aufgebaut. Diese Entwicklung erfolgt durch sich mehrfach abwechselnde Prozesse des Verknüpfens und Verdichtens, die ineinander verschachtelt sind.

<u>Vereinfachte Darstellung</u>

In einer vereinfachten Darstellung lässt sich dieses fortschreitende Verknüpfen und Verdichten wie folgt visualisieren (Abbildung 4): Das durch Verdichten neu entstandene Element A kann seinerseits mit weiteren Elementen B und C verknüpft werden, die ihrerseits aus der Verdichtung von anderen Vorwissenselementen entstanden sind.

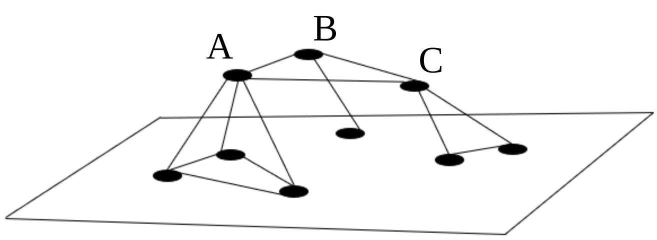


Abb. 4: Weiteres Verknüpfen (eigene Darstellung)

In einem nächsten Schritt können die Elemente A, B und C gemeinsam in ein neues Element D höherer Ordnung verdichtet werden (siehe Abbildung 5). In

Abbildung 5 wurde die im Zusammenhang mit Aeblis Aufbauschema erwähnte Trennung zwischen dem Begriffsnamen und der Bedeutung des Begriffs wie folgt visualisiert: Der oberste Knoten D steht für den Begriffsnamen, während die Bedeutung dieses Begriffs im Netz darunter enthalten ist, dargestellt durch die große graue Ellipse. Die Bedeutung des Begriffs liegt somit in den darunterliegenden zugehörigen Elementen und Verknüpfungen. Die Vorwissenselemente sind in der untersten Ebene abgebildet und die sich mehrfach abwechselnden Prozesse des Verknüpfens und Verdichtens werden auf verschiedenen Ebenen aufgeführt, wobei horizontale Linien Verknüpfungen und vertikale Linien Verdichtungen repräsentieren. In umgekehrter Richtung können diese vertikalen Verbindungen als Auffaltungen gelesen werden, auf die im nächsten Abschnitt eingegangen wird.

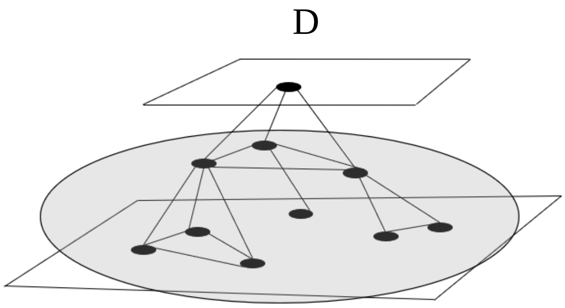


Abb. 5: Begriffsname (D) und Bedeutung des Begriffs (graue Ellipse) (eigene Darstellung)

Diese Darstellung ließe sich beliebig durch weitere Ellipsen und Ebenen erweitern, das heißt, es sind potenziell noch viel größere Netze und noch viel mehr Verdichtungsschritte denkbar.

1.4 Auffalten

Die Umkehrung des Prozesses des Verdichtens ist das *„Auffalten“* (Steiner, 2001) eines verdichteten Elements in das Netz seiner Teilelemente *und* seiner Verknüpfungen. Auffalten besteht somit nicht im Zerlegen in unzusammenhängende Einzelteile, sondern in der Zerlegung in das Netz von Beziehungen, aus dem das verdichtete Element gebildet wurde. Beim Auffalten wird die gesamte ursprüngliche Bedeutung des verdichteten Netzes wieder vollständig hergestellt. In der Darstellung in Abbildung 5 verläuft der Prozess entsprechend von oben nach unten.

1.5 Einebnen

Durch die Art und Weise, wie ein Begriff erworben respektive ein entsprechendes Netz aufgebaut wurde, ergibt sich gemäß Aebli (1994) in Letzterem eine bestimmte Hierarchie. Dieses hierarchische Netz kann in der Folge „eingeebnet“

werden, sodass die Hierarchie des anfänglichen Strukturaufbaus aufgehoben wird, die Bedeutung aber bestehen bleibt. Ein eingeebnetes Netz, wie es in Abbildung 6 dargestellt ist, kann in alle Richtungen durchlaufen werden, weil die Denkstrukturen beweglich sind. Es wird möglich, im Netz flexibel „hin- und herzuwandern“ und darin verschiedene Perspektiven einzunehmen. Das Verdichten mit seinem Gegenstück des Auffaltens macht zusammen mit dem Prozess des Einebnens wesentlich die Beweglichkeit des Denkens aus.

Aeblis Darstellung

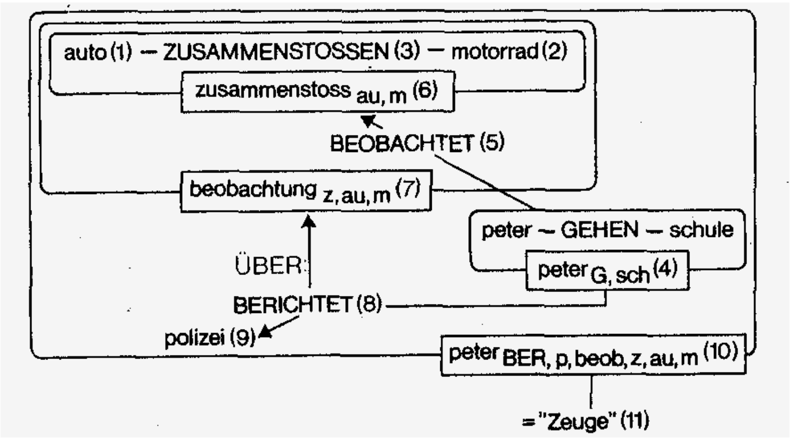


Abb. 6: Das (eingeebnete) semantische Netz zum Begriff „Zeuge“ (Aebli, 1978, S. 619)

Vereinfachte Darstellung

Auch das Einebnen lässt sich in der „dreidimensionalen“ Visualisierung zumindest annäherungsweise darstellen, wie in Abbildung 7 ersichtlich wird. In dieser Darstellung gibt es im Netz keine auf den Verlauf des Lernprozesses bezogene Hierarchie mehr, sondern es sind vielmehr verschiedene Perspektiven möglich.

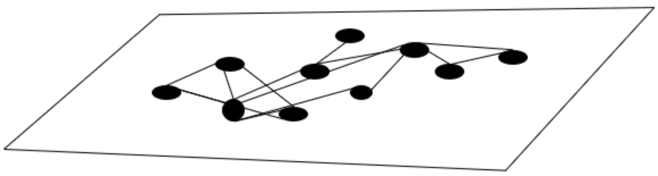


Abb. 7: Eingeebnetes Netz (eigene Darstellung)

Auf das Einebnen wird im vorliegenden Beitrag nicht weiter eingegangen, da der Fokus im Folgenden auf die Einführung in ein neues Konzept gelegt wird und das Einebnen erst später im Lernprozess eine Rolle spielt, und zwar insbesondere in der Phase des Durcharbeitens (Aebli, 2001), in der die Denkstrukturen beweglich gemacht werden sollen.

1.6 Fachliche Prägung von Denkstrukturen

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Aebli zwischen dem Begriffsnamen und der Bedeutung eines Begriffs trennt. Die Bedeutung liegt im aufgebauten Netz, während der Begriffsname nur die letzte Verdichtung repräsentiert. Dieses Netz wird durch die Prozesse des Verknüpfens, Verdichtens und Auffaltens aus Vorwissenselementen gebildet und schließlich durch Einebnen beweglich gemacht. Alle diese Prozesse wurden in den vorgeschlagenen vereinfachten Darstellungen übernommen. Aebli repräsentiert die Verknüpfungen respektive Verdichtungen durch ineinander verschachtelte formale Strukturen, während sie in den vereinfachten Darstellungen durch Linien visualisiert werden: horizontale für das Verknüpfen, vertikale für das Verdichten und das Auffalten. Unterricht, der das Verstehen unterstützen will, hat diese Prozesse gemäß Aebli zu unterstützen, wobei er der Lehrperson eine wichtige Rolle zuschreibt: „Aufbauprozesse geschehen nicht einfach. Sie bedürfen der Auslösung und Steuerung durch Menschen, welche das Endprodukt kennen und zu ihm hinzuführen wissen" (Aebli, 1969, S. 76–77).

Neben den grundlegenden Aufbauprozessen und der Begleitung durch die Lehrperson misst Aeblis Strukturaufbautheorie auch dem Fach eine wichtige Rolle bei: „Die Strukturen des Denkens müssen in *Begriffen der Sache* beschrieben werden" (Aebli, 2001, S. 387, Hervorhebung durch die Autorin). Das heißt, Analysen von Denkstrukturen sind auf fachliche Begriffe angewiesen, wenn sie fachlicher Art sind; sie können nicht abstrakt dargestellt werden. Aeblis Analysen sind fachlicher Art, wenngleich sie aus fachlicher Sicht im Detail teilweise kritisch betrachtet werden können. Dennoch macht diese explizite Berücksichtigung fachlicher Lern- und Verstehensprozesse Aeblis Theorien nicht nur für die Kognitionspsychologie ganz allgemein, sondern auch spezifischer für die Fachdidaktik fruchtbar.

2. Die Prozesse des Verknüpfens, Verdichtens und Auffaltens und ihre Beziehung zu Verstehenselementen

Die vereinfachte Darstellung der in Abschnitt 1 dargestellten Prozesse wird nachfolgend verwendet, um unter Einbeziehung des Konzepts „Verstehenselement" das Verstehensmodell von Drollinger-Vetter (2011) darzulegen.[8] Dabei wird insbesondere erläutert, welche Funktion den Prozessen des Verknüpfens, Verdichtens und Auffaltens im Verstehensmodell zukommt.

---

[8] Das Verstehensmodell wie auch der Begriff „Verstehenselement" beziehen sich neben Aeblis Ansatz auch noch auf weitere Theorien, auf die in diesem Beitrag jedoch nicht eingegangen wird.

Den Begriff „Verstehenselement“ hat Drollinger-Vetter (2011, S. 14) in Anlehnung an Aeblis (1994) Strukturaufbautheorie geprägt:

***Verstehenselemente** sind diejenigen Teilelemente eines Konzepts, die man verstanden haben muss, um durch Verknüpfen und Verdichten das Konzept als Ganzes verstehen zu können.*

In dieser Definition wird deutlich, dass das Konzept der Verstehenselemente untrennbar mit den Prozessen des Verknüpfens, Verdichtens und Auffaltens verbunden ist. Die Verstehenselemente zu einem konkreten Konzept bilden somit eine pragmatische „nächste Stufe“ der Auffaltung eines Begriffs, die bis zum angenommenen Vorwissen der adressierten Schülerinnen und Schüler zurückgeht. Verstehenselemente werden verbal und auf das fachliche Konzept bezogen formuliert, aber in einer für die adressierten Schülerinnen und Schüler verständlichen Sprache gehalten, und sie berücksichtigen deren Vorwissen. In der Regel sind Verstehenselemente keine einzelnen Wörter, sondern Sätze. Zur Aussage des Satz des Pythagoras, wie sie in der Schule typischerweise eingeführt wird, können beispielsweise die folgenden Verstehenselemente formuliert werden: *Die Grundfigur ist ein Dreieck. Es geht um ein rechtwinkliges Dreieck. Zwei Typen von Seiten müssen unterschieden werden. Der Satz macht eine Aussage über Seitenlängen. Der Satz macht eine Aussage über Flächeninhalte von Quadraten. Der Satz hat eine Voraussetzung und eine Behauptung.*[9]

Wer die Aussage des Satzes des Pythagoras verstanden hat, kann diese Verstehenselemente in den typischen fachlichen Repräsentationen (siehe Abbildung 8) erkennen (siehe Bruner, 1974).

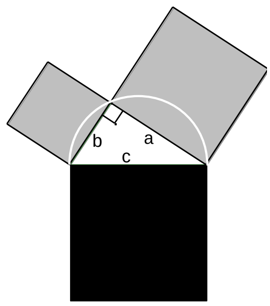
a, b, c sind die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\gamma = 90°$ $\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$	Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats.	
Formel	Verbale Sprache	Bild

Abb. 8: Unterschiedliche Repräsentationen des Satzes des Pythagoras (Drollinger-Vetter, 2011, S. 81)

[9] Zu einem umfassenden Verständnis des Satzes des Pythagoras gehören weitere Verstehenselemente und es sind noch andere Kompetenzen erforderlich, zum Beispiel das Verstehen von Beweisen, die Anwendung des Satzes usw. Aber bereits das Verstehen der Satzaussage an sich stellt eine Leistung und ein Lernziel dar.

Aus fachlicher Sicht gehört zu einem umfassenden Verständnis eines Konzepts zusätzlich Wissen zu Verknüpfungen, durch die es mit anderen Begriffen und Konzepten verbunden wird (zusammenfassend Drollinger-Vetter, 2011). Diese Verknüpfungen machen den Beziehungsreichtum des Konzepts aus. Beim Satz des Pythagoras ist dieser besonders groß (siehe z.B. Fraedrich, 1995) und umfasst beispielsweise Verknüpfungen mit verwandten Sätzen (z.B. Kathetensatz oder Verallgemeinerungen des Satzes des Pythagoras für ähnliche Figuren) und mit typischen Anwendungen (z.B. Seitenberechnungen oder grafisches Wurzelziehen).
Vor diesem Hintergrund bezieht sich das in Abbildung 9 dargestellte Verstehensmodell von Drollinger-Vetter (2011) auf ein konkretes mathematisches Konzept und verbindet die dazugehörenden Verstehenselemente, fachlichen Repräsentationen und Verknüpfungen zu weiteren Konzepten mittels der Prozesse des Verknüpfens, Verdichtens und Auffaltens. Die Prozesse des Verdichtens werden in Abbildung 9 durch schräg nach oben verlaufende Pfeile, die in ein verdichtetes Element münden, dargestellt. Gleichzeitig wird auf Aeblis Annahme zurückgegriffen, dass Verdichtungen in verschiedenen Medien der Repräsentation stattfinden können (siehe Abschnitt 1.2). In umgekehrter Pfeilrichtung ist der Prozess des Auffaltens eines Konzepts in seine unterrichtsrelevanten Repräsentationen und die dazugehörenden Verstehenselemente abgebildet. Die Verknüpfungen werden im Modell nicht explizit ausgeführt, sondern als horizontale, in der jeweiligen Ebene liegende Linien dargestellt.

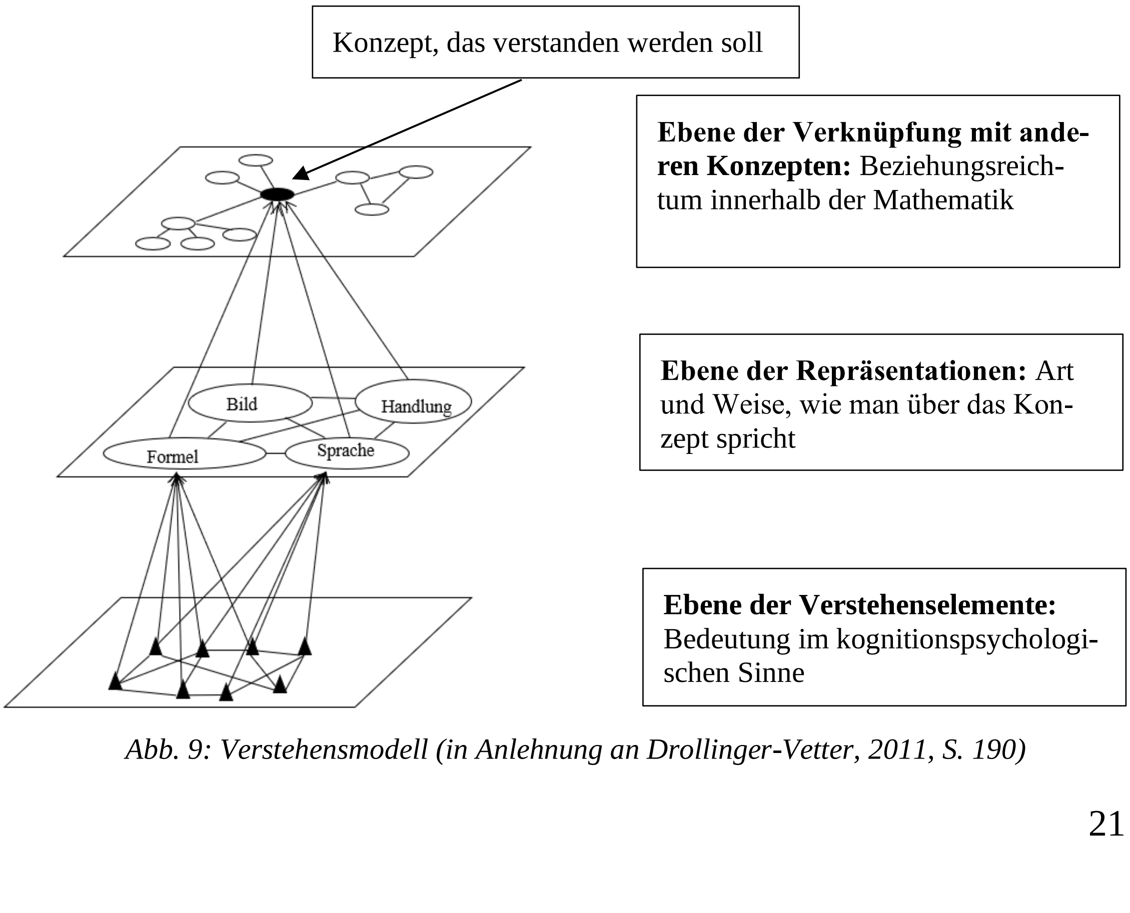


Abb. 9: Verstehensmodell (in Anlehnung an Drollinger-Vetter, 2011, S. 190)

In der Blickrichtung von unten nach oben kann Abbildung 9 wie folgt gelesen werden: Die Verstehenselemente und ihre Verknüpfungen (in Abbildung 9 als Netz von Dreiecken dargestellt) können in die verschiedenen fachlichen Repräsentationen verdichtet werden. Die Verknüpfungen der verschiedenen fachlichen Repräsentationen wiederum können zum Begriffsnamen des Konzepts (schwarze Ellipse) verdichtet werden. Die Bedeutung des Konzepts liegt deshalb im Netz, das über die Ebenen der Verstehenselemente und der Repräsentationen hinweg gebildet wird (analog zur grauen Ellipse in Abbildung 5).

In der umgekehrten Blickrichtung von oben nach unten lässt sich Abbildung 9 Folgendes entnehmen: Die schwarze Ellipse stellt den Begriffsnamen des zu verstehenden Konzepts dar. Wer das Konzept verstanden hat, kann es in die dazugehörenden fachlichen Repräsentationen und ihre Verknüpfungen auffalten. Die Repräsentationen wiederum können in ihre dazugehörenden Verstehenselemente und Verknüpfungen aufgefaltet werden. Das heißt, wer ein Konzept verstanden hat, sieht nicht nur die dazugehörenden fachlichen Repräsentationen und ihre Verknüpfungen, sondern kann in einer fachlichen Repräsentation die ganze Bedeutung (Netz der Verstehenselemente) erkennen. Die Verstehenselemente sind für Expertinnen und Experten somit aus den fachlichen Repräsentationen des Konzepts „herauslesbar“, während sie für Lernende noch „unsichtbar“ sind.

Dieses Verstehensmodell lässt sich als ein stark vereinfachtes Aufbauschema nach Aebli auffassen, das jedoch auf eine propositionale Darstellung verzichtet. Insbesondere werden fachliche Repräsentationen als Verdichtungen von Verstehenselementen aufgefasst. Im Vergleich zu Aeblis propositionaler Darstellung ist das Verstehensmodell weniger präzise, weil die Verknüpfungen und Verdichtungen nicht explizit aufgeführt, sondern als Linien dargestellt werden und weil Verdichtungen nur in den fachlichen Repräsentationen respektive als Verdichtungen in einen Begriffsnamen betrachtet werden. Das Modell hat aber den Vorteil, dass es einfacher und flexibler ist, sodass damit verschiedene Verstehensprozesse dargestellt werden können und Unterricht von unterschiedlicher Art unabhängig von bestimmten Methoden und Aufgaben beschrieben werden kann.

Gemäß Drollinger-Vetter (2011) dürfte davon auszugehen sein, dass die Verstehenselemente eines zu vermittelnden Konzepts im Unterricht mehrfach und kohärent vorkommen müssen, verständlich miteinander in Beziehung gesetzt und insbesondere in den fachlichen Repräsentationen explizit herausgearbeitet werden müssen, damit das Verstehen der Schülerinnen und Schüler gefördert werden kann. Für eine Einführung in den Satz des Pythagoras konnte diese Annahme empirisch untersucht werden: In Drollinger-Vetter (2011; siehe auch Drollinger-Vetter & Lipowsky, 2006) wurden aus dem Verstehensmodell drei Unterrichtsqualitätsmerkmale für eine Einführung in ein neues Konzept abgeleitet: 1) das Vorkommen von Verstehenselementen, 2) die Qualität der im

Unterricht vorkommenden fachlichen Repräsentationen (festgemacht unter anderem an den darin deutlich werdenden Verstehenselementen) sowie 3) eine auf 1) und 2) aufbauende inhaltliche strukturelle Klarheit des Unterrichts, zu der insbesondere die Klarheit und die Kohärenz der Verstehenselemente und der Repräsentationen im zeitlichen Verlauf gehören. Empirisch konnte gezeigt werden, dass diese Unterrichtsqualitätsmerkmale bei einer Einführung in den Satz des Pythagoras unter Kontrolle des Vorwissens einen positiven Effekt auf die Leistungen von Schülerinnen und Schülern hatten (Dollinger-Vetter, 2011; siehe auch Lipowsky et al., 2018). Das Modell scheint sich somit auch empirisch zu bewähren.

Zusammenfassend lässt sich hinsichtlich der Funktion und der Bedeutung der Prozesse des Verknüpfens, Verdichtens und Auffaltens festhalten, dass sie (gemeinsam mit dem Prozess des Einebnens) für Verstehensprozesse als zentral zu erachten sind. Der Grund dafür liegt darin, dass es sich dabei aus der kognitiv-konstruktivistischen Sicht von Aebli um diejenigen Prozesse handelt, die es Schülerinnen und Schülern ermöglichen, aus bereits erworbenen Vorwissenselementen neue Wissensstrukturen zu konstruieren. Diese Annahmen wurden im Verstehensmodell von Drollinger-Vetter (2011) übernommen und mithilfe des Konzepts „Verstehenselement“ in eine Form gebracht, die sich für verschiedene Fragestellungen und bei verschiedenen mathematischen Inhalten rund um das Verstehen sowie seiner Anleitung und Unterstützung als hilfreich erwiesen hat (z.B. Mathematik: Drollinger-Vetter et al., 2016; Dröse & Prediger, 2023; Korntreff & Prediger, 2022; Post & Prediger, 2022; Zindel, 2019; Deutsch: Heller & Morek, 2023).

Literatur

Aebli, H. (1969). Über den Aufbau kognitiver Strukturen. In M. Irle (Hrsg.), *Bericht über den 26. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie* (S. 72–78). Hogrefe.

Aebli, H. (1978). Von Piagets Entwicklungspsychologie zur Theorie der kognitiven Sozialisation. In G. Steiner (Hrsg.), *Die Psychologie des 20. Jahrhunderts* (S. 604–627). Kindler.

Aebli, H. (1993). *Denken. Das Ordnen des Tuns. Band I: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie*. Klett.

Aebli, H. (1994). *Denken. Das Ordnen des Tuns. Band II: Denkprozesse*. Klett.

Aebli, H. (2001). *Zwölf Grundformen des Lehrens*. Klett.

Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin Verlag.

Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit. Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht*. Waxmann.

Drollinger-Vetter, B. & Lipowsky, F. (2006). Fachdidaktische Qualität der Theoriephasen. In I. Hugener, C. Pauli & K. Reusser (Hrsg.), *Videoanalysen (= Teil 3 der Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“, hrsg. von E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser)* (S. 189–205). GFPF/DIPF.

Drollinger-Vetter, B., Philipp, K. & Buff, A. (2016). Fachdidaktisches Wissen und Motivation: Das Thema „Wahrscheinlichkeit“ in der Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern der Primarstufe. In Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. 1493–1494). WTM.

Dröse, J. & Prediger, S. (2023). Prospective teachers' diagnostic thinking on students' understanding of multi-digit multiplication: A content-related analysis on unpacking of knowledge elements. *Journal für Mathematik-Didaktik, 44(1),* 1–28.

Fraedrich, A. M. (1995). *Die Satzgruppe des Pythagoras*. Wissenschaftsverlag.

Heller, V. & Morek, M. (2023). *Von der Henne zum Ei und wieder zurück. Zur Wechselwirkung zwischen diskursiven Praktiken und anspruchsvollen fachlichen Lernprozessen in Unterrichtsgesprächen.* Vortrag Sommertagung nets21, Pädagogische Hochschule Zug, 21./22. August.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 65–97). Macmillan.

Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 371–404). Information Age Publishing/NCTM.

Klieme, E., Pauli, C. & Reusser, K. (2009). The Pythagoras study: Investigating effects of teaching and learning in Swiss and German mathematics classrooms. In T. Janik & T. Seidel (Hrsg.), *The power of video studies in investigating teaching and learning in the classroom* (S. 137–160). Waxmann.

Korntreff, S. & Prediger, S. (2022). Verstehensangebote von YouTube-Erklärvideos – Konzeptualisierung und Analyse am Beispiel algebraischer Konzepte. *Journal für Mathematik-Didaktik, 43*(2), 281–310.

Lipowsky, F., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., Pauli, C. & Reusser, K. (2018). Generische und fachdidaktische Dimensionen von Unterrichtsqualität. Zwei Seiten einer Medaille? In M. Martens, K. Rabenstein, K. Bräu, M. Fetzer, H. Gresch, I. Hardy & C. Schelle (Hrsg.), *Konstruktionen von Fachlichkeit: Ansätze, Erträge und Diskussionen in der empirischen Unterrichtsforschung* (S. 183–202). Klinkhardt.

Piaget, J. (1973). *Einführung in die genetische Erkenntnistheorie*. Suhrkamp.

Post, M. & Prediger, S. (2022). Teaching practices for unfolding information and connecting multiple representations: The case of conditional probability information. *Mathematics Education Research Journal, 34,* 1–33.

Reusser, K. (1998). Denkstrukturen und Wissenserwerb in der Ontogenese. In F. Klix & H. Spada (Hrsg.), *Enzyklopädie der Psychologie. Themenbereich C: Theorie und Forschung. Serie II: Kognition. Band G: Wissenspsychologie* (S. 115–166). Hogrefe.

Reusser, K. (2006). Konstruktivismus – vom epistemologischen Leitbegriff zur Erneuerung der didaktischen Kultur. In M. Baer, M. Fuchs, P. Füglister, K. Reusser & H. Wyss (Hrsg.), *Didaktik auf psychologischer Grundlage. Von Hans Aeblis kognitionspsychologischer Didaktik zur modernen Lehr-Lernforschung* (S. 151–168). hep.

Steiner, G. (2001). Lernen und Wissenserwerb. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 137–205). Beltz.

Vollrath, H.-J. (2001). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (2. Auflage). Spektrum Akademischer Verlag.

Zindel, C. (2019). *Den Kern des Funktionsbegriffs verstehen: Eine Entwicklungsforschungsstudie zur fach- und sprachintegrierten Förderung.* Springer Spektrum.

Karl Josef FUCHS, Ján GUNČAGA, Simon PLANGG & Wolfgang SCHÖPF,
Salzburg & Bratislava

Mathematikdidaktische Impulse im Kontext der Geschichte und Gegenwart

Kurzfassung: Im ersten Kapitel werden in Längsschnittanalysen die zahlreichen mathematikdidaktischen Impulse relevanter Bezugswissenschaften nach dem Bezugswissenschaftlichen Prinzip betrachtet. Im zweiten Kapitel werden die Impulse aus historischen mathematischen Lehrbüchern von verschiedenen Autoren wie Franz Močnik vorgestellt. Die rasche Informatisierung in der Gesellschaft und im Schulwesen legt die reflektierte Auseinandersetzung mit Algorithmen im Unterricht nahe. In einem dritten Kapitel wird der Fokus auf dieses Thema im Kontext der Mathematik- und Informatikdidaktik als eine wesentliche Bezugswissenschaft gelegt.

Title: Impulses of Mathematics Education in the Context of History and Nowadays

Abstract: In the first chapter, longitudinal analyses examine the numerous Mathematics Education impulses of relevant reference sciences according to the principle of reference science. In the second chapter, the impulses from historical mathematical textbooks by various authors such as Franz Močnik are presented. The rapid digitalization of society and the school system has led to an emphasis on algorithms and algorithmic thinking. In a third chapter, the focus is placed on this topic in the context of mathematics and computer science education as an essential reference science.

MSC Classification: MSC2020–00, –01, –68, –97

Keywords: Bezugswissenschaftliches Prinzip, Geschichtsforschung, Fundamentale Idee, Veranschaulichung / Visualisierung, Inhaltsanalyse, E-I-S-Systemstufen, Algorithmisieren

1. Mathematikdidaktischer Impuls aus der Gegenwart: Längsschnittanalysen der Impulse ausgewählter Bezugswissenschaften

Die Beiträge einzelner Disziplinen im Verhältnis zur Mathematik werden nachfolgend nach dem *Bezugswissenschaftlichen Prinzip* dargestellt, d.h. in Längsschnitten werden einzelne Meilensteine  angeführt, wobei die Namen der Persönlichkeiten zusammen mit den Beiträgen zur Mathematik genannt werden (Fuchs, 2024).

1.1 Bezugswissenschaft Philosophie

Die Philosophie ist eine Disziplin, die mit ihren Beiträgen zur Mathematik auch ein besonderes Nahverhältnis zur Mathematikdidaktik besitzt (Fuchs, 2022).