Christina Bierbrauer, Silke Ladel & Melanie Platz (Hrsg.)

Förderung prozessbezogener Kompetenzen mit digitalen Medien

Mit mathematischen Objekten und Werkzeugen arbeiten

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien 11

Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe

Herausgegeben von
Silke Ladel und Christof Schreiber

Band 11

CHRISTINA BIERBRAUER, SILKE LADEL & MELANIE PLATZ
(HRSG.)

Förderung prozessbezogener Kompetenzen mit digitalen Medien

Mit mathematischen Objekten und Werkzeugen arbeiten

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://www.dnb.de abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.winterwork.de

Gestaltung des Covers: Melanie Platz
Foto Cover: Lea Marie Müller

Ferdinand-Freiligrath-Str. 26, 48147 Münster
Münster 2024 – E-Book
ISBN 978-3-95987-324-6
https://doi.org/10.37626/GA9783959873246.0

Inhaltsverzeichnis

Christina BIERBRAUER, Saarbrücken, Silke LADEL, Schwäbisch Gmünd & Melanie PLATZ, Saarbrücken

Vorwort der Herausgeberinnen

1975 stellte Heinrich Winter die Frage nach allgemeinen Lernzielen für den Mathematikunterricht und identifizierte folgende mit dem Ziel die vielfältigen Aktivitäten beim Lernen von Mathematik zu bündeln und ihre genetischen Wurzeln freizulegen: schöpferisch tätig sein, rationale Argumentation üben, die praktische Nutzbarkeit der Mathematik erfahren und formale Fertigkeiten erwerben. Teilweise finden sich diese in den allgemeinen Kompetenzen der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (2004) wieder: Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren und Darstellen. In der überarbeiteten Version der Bildungsstandards (2022) wurde eine prozessbezogene Kompetenz ergänzt: mit mathematischen Objekten und Werkzeugen arbeiten. Diese Kompetenz umfasst „den adäquaten Einsatz mathematischer Werkzeuge" (KMK, 2022, S. 12) – hier werden explizit Apps genannt – sowie „den fachlich sicheren Umgang mit den im Mathematikunterricht der Primarstufe relevanten mathematischen Objekten" (KMK, 2022, S. 12). Schülerinnen und Schüler sollen unter anderem Möglichkeiten kennenlernen, mathematikspezifische digitale Werkzeuge zu nutzen, mit denen sie mathematische Sachverhalte veranschaulichen können (KMK, 2022, S. 8). Folgende Teilkompetenzen werden genannt:

„Die Schülerinnen und Schüler

- übersetzen symbolische und formale Sprache in Alltagssprache und umgekehrt,
- verwenden mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht,
- verwenden mathematische Objekte (z. B. Zahldarstellungen, Terme, Ecken, Kanten, Tabellen, Diagramme) bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben- und Problemstellungen sicher und flexibel,
- setzen mathematische Werkzeuge (z. B. Zeichenwerkzeuge, digitale Werkzeuge) sachgerecht ein." (KMK, 2022, S. 12)

In diesem Rahmen kann durch passende Lehr-Lern-Arrangements ein Beitrag zur Vermittlung von Kenntnissen und der Entwicklung von Fertigkeiten und Fähigkeiten für die Orientierung in digital geprägten Lern-, Lehr- und Arbeitswelten geleistet werden. Dadurch können Kinder dazu befähigt werden aktiv und selbstbestimmt an der digitalen Welt teilhaben zu können (KMK, 2022, S. 8). Es stellt sich allerdings die Frage, wie solche Lehr-Lern-Arrangements aussehen können.

Ziel des Bandes ist es, Projekte aus der Forschung, der Schulpraxis und der Lehrerbildung darzustellen, die explizit die Förderung prozessbezogener Kompetenzen und insbesondere die Kompetenz „mit mathematischen Objekten und Werkzeugen arbeiten" im Kontext des Einsatzes digitaler Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe und/oder den entsprechenden Übergängen adressieren.

Gleich mehrere Beiträge dieses Bandes stellen die prozessbezogene Kompetenz mathematisch Argumentieren in den Vordergrund ihrer Arbeit. Den Anfang macht *Lukas Wachter* mit seinem Beitrag zu „Beweise(n) in der Primarstufe: Entwicklung und Pilotierung zweier Ansätze für den Geometrieunterricht“. Darin geht er der Frage nach, in welcher Form der Einsatz von 3D-Druck Schülerinnen und Schülern der Primarstufe bei der Bearbeitung von Beweisen, z. B. in Form von action proofs, in der Geometrie unterstützen kann. *Jenny Knöppel* und *Felicitias Pielsticker* stellen in ihrem Beitrag „Argumentationsprozesse einer Grundschülerin mit Rechenschwierigkeiten – Fallstudie zur Zahlzerlegung mit der App Rechentablett“ Ergebnisse ihrer Studie vor, die darauf hindeuten, dass es Kindern gelingen kann einen Bezug zwischen den auf dem Tablet dargestellten virtuellen Plättchen und ihren Fingern herzustellen, und diese entsprechend als Argumentationsbasis bzw. -hilfe in ihrem Argumentationsprozess zu verwenden. Im Beitrag „‚Die App hat aber gesagt, dass…‘ – Mathematische Kommunikations- und Argumentationsanlässe draußen schaffen“ gehen *Martina Geisen* und *Joerg Zender* der Frage nach, wie mathematische Wanderpfade mit der MathCityMap-App gestaltet sein müssen, um das Kommunizieren und Argumentieren von Lernenden beim Ablaufen von dieser und der Bearbeitung von deren Aufgaben anzuregen. Die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen, insbesondere des Argumentierens, durch die Produktion mathematischer Erklärvideos zu Muster und Strukturen am Rechenformat der Zahlenmauer thematisieren *Heike Hagelgans* und *Jaqueline Simon* im Beitrag „Förderung prozessbezogener Kompetenzen der Lernenden durch die Eigenproduktion von Erklärvideos“ und präsentieren zu dem Unterrichtsentwicklungsprojekt erste Ergebnisse der Begleitforschung. Im Beitrag „Mathematisches Argumentieren mit der Lernplattform divomath fördern“ von *Meike Böttcher, Yannick Becker, Anaïs Franke, Katrin Gruhn, Janina Kehnen, Hannah Vonstein, Daniel Walter, Daniela Götze* und *Christoph Selter* wird das Konzept der browserbasierten Lernplattform divomath exemplarisch anhand einer Unterrichtseinheit zu Entdeckungen von Zusammenhängen mehrstelliger Zahlen im Zahlenraum bis 1000 vorgestellt und vor dem Hintergrund der prozessbezogenen Kompetenz des mathematischen Argumentierens analysiert. Die prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen mathematisch Darstellen und mathematisch Kommunizieren stellen *Birgit Brandt* und *Christoph Schäfer* im Beitrag „Einsatz der App Book Creator im Lehramtsstudium für die Grundschule – Mathematisches Darstellen und Kommunizieren im Fokus“ in den Mittelpunkt. Sie präsentieren das BMBF-Projekt DigiLeG und thematisieren explizit die Implementierung einer zyklischen Nutzung der App Book Creator während des Studiums, um zukünftige Lehrpersonen auf den Einsatz im Mathematikunterricht vorzubereiten. Probleme mathematisch lösen als prozessbezogene mathematische Kompetenz steht in zwei Beiträgen im Mittelpunkt. *Mona Selzer* stellt in „Entwicklung der Problemlösekompetenz im Mathematikunterricht – eine Lernumgebung mit dem Blue-Bot“ eine Untersuchung zur Entwicklung der Problemlösekompetenz im Umgang mit dem Roboter Blue-Bot dar, wobei das heuristische Prinzip Zerlegen in

Teilprobleme und der Problemlöseprozess fokussiert werden. Im Beitrag „Mit hybriden Arbeitsblättern das Verstehen und Lösen problemhaltiger Sachaufgaben digital und analog unterstützen“ präsentiert *Roland Rink* ein Konzept zur Unterstützung des Bearbeitungsprozesses anspruchsvoller Sachaufgaben durch hybride Arbeitsblätter und beleuchtet Potentiale hybrider Arbeitsblätter beim Sachrechnen.

Die folgenden Beiträge haben zwar auch die prozessbezogenen Kompetenzen im Blick, stellen jedoch eher inhaltsbezogene Kompetenzen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten und Werkzeugen in den Vordergrund. So stellen *Katja Lenz* und *Tim Lutz* in ihrem Beitrag „Mit Augmented Reality enaktive Materialhandlungen und digitale Darstellungen im Mathematikunterricht der Primarstufe vernetzen“ erste Überlegungen zu einem Entwicklungs- und Forschungsprojekt vor, das versucht das Stellenwertverständnis durch die Kombination von analogen und digitalen Arbeitsmitteln zu fördern. *Andrea Dettelbach* und *Uta Häsel-Weide* erarbeiteten Gestaltungskriterien für eine digitalgestützte Lernumgebung zur Förderung des Verständnisses der Addition und zeigen diese, sowie erste Erkenntnisse in Bezug auf die von Kindern erkannten operativen Beziehungen in ihrem Beitrag zu „Operative Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen – Initiierung von Lernprozessen unter Einbeziehung der App ‚Rechenfeld‘“ auf. Eine Online-Lernumgebung zur Kombinatorik wird im Beitrag „Problemlösestrategien für Kombinatorikaufgaben – eine Online-Lernumgebung für Primarschulstudierende“ von *Andreas Schulz* und *Johannes Voermanek* präsentiert und durch Evaluationsbefunde mit Drittsemesterstudierenden ergänzt. *Lea Marie Müller, Anton Ferenc Domonkos, Alexander Steinmaurer* und *Melanie Platz* gehen in ihrem Beitrag auf die App MessbAR ein, eine Augmented Reality App im Größenbereich Längen, die sie entwickelt und evaluiert haben. Erste Ergebnisse zu Anwendungsbereichen sowie zur Benutzerfreundlichkeit werden im Beitrag dargestellt. Dabei zeigte sich auch das Potenzial der App zur Anregung des mathematischen Kommunizierens auf. Der Bereich Geometrie (bzw. die Kompetenz Raum und Form) wird von *Marei Fetzer* und *Julia Bräuer* adressiert. Sie stellen im Beitrag „Zusammen arbeiten und lernen: Kinder und Tablet in Inter-Aktion“ bezogen auf den Arbeitsprozess von zwei Grundschulkindern mit der App Klötzchen die Frage, welche Rolle das Tablet im Prozess des Aushandelns und Verstehens spielt und inwiefern sich in diesen Lernprozessen ein Bezug zur ‚neuen‘ Kompetenz herstellen lässt. *David Stadler* und *Monika Musilek* stellen in ihrem Beitrag „STEAM in der Primarstufe. Kunst, digitale Medien und Mathematik – eine ideale Kombination!“ ein GeoGebra-Applet vor, das entwickelt wurde, um den Lernenden das eigenständige Konstruieren eines Tangrams und dessen Übertragung auf einen Lasercutter zu ermöglichen. *Antonia Käppler* und *Assmar Sediq* gehen in ihrem Beitrag auf die „Analyse medienspezifischer Möglichkeiten bei der Arbeit von Würfelgebäuden“ ein. Sie untersuchten den Einfluss einer Wahlmöglichkeit zwischen analogen Würfeln und der Klötzchen-App auf die prozessbezogenen Kompetenzen des mathematischen Argumentierens und des mathematischen Kommunizierens.

Saarbrücken und Schwäbisch Gmünd im August 2024

Christina Bierbrauer, Silke Ladel und Melanie Platz

Lukas WACHTER, Saarbrücken

Beweise(n) in der Primarstufe: Entwicklung und Pilotierung eines Ansatzes für den Geometrieunterricht

Im Rahmen der Kompetenz des mathematischen Argumentierens sind Lernumgebungen zur Auseinandersetzung mit Beweisen im Grundschulunterricht eher eine Seltenheit. Dabei ist die moderne Wissenschaft Mathematik durch sie geprägt und hat eine bis in die Antike reichende Geschichte des Beweisens hinter sich, auch ohne Formelsprache. Unter Bezug auf die Historie wird eine Lernumgebung im Rahmen des Konzepts des action proofs zu figurierten Zahlen vorgestellt. Zur Unterstützung der Begründungsprozesse der Schülerinnen und Schüler kommt der 3D-Druck als Schnittstelle zwischen digital erstellten Modellen und deren anfassbaren Realisaten zum Einsatz.

In the context of the competence of mathematical reasoning learning environments aiming at getting in touch with proofs in the elementary classroom are more of a rarity. And yet the modern science of mathematics is shaped by them and has a history of proving that reaches back to ancient times, even without formal notation. With respect to history a learning environment following the concept of action proof on the topic of figurated numbers is developed. For the support of reasoning processes by the students, 3D printing is used as an interface between digitally created models and their haptical realisations.

1 Einleitung

Die Disziplin des Beweisens ist Grundfeste des modernen Verständnisses von Mathematik und disziplinübergreifend ein wesentlicher Bestandteil dieser facettenreichen Wissenschaft. So ist es nicht allzu verwunderlich, dass auch für den Unterricht der Primarstufe zur Ausbildung eines diversen Bildes dessen, was Mathematik ist, sowohl offensichtlich in der Kompetenz des mathematischen Argumentierens als auch – wie sich im weiteren Verlauf des vorliegenden Artikels zeigen wird – versteckt in weiteren der prozessbezogenen Kompetenzen der KMK (2022) erste Kontakte mit dem Beweisen empfohlen werden. Im Beitrag wird zunächst aufgezeigt, dass die Idee der beweisenden Mathematik trotz ihrer modernen Bedeutung keineswegs jung ist. Einblicke in die Geschichte zeigen, dass Beweise in Formen, die heute eher in die Kategorie der im darauffolgenden Beitragsteil beleuchteten didaktischen Beweisformen fallen würden, einen traditionsreichen Entwicklungsprozess hinter sich haben. Die Idee für den Unterricht adaptierter Beweisformen wird nach einer

Wachter, L. (2024). Beweise(n) in der Primarstufe: Entwicklung und Pilotierung eines Ansatzes für den Geometrieunterricht. In C. Bierbrauer, S. Ladel & M. Platz (Hrsg.), *Förderung prozessbezogener Kompetenzen mit digitalen Medien. Mit mathematischen Objekten und Werkzeugen arbeiten. Band 11 der Reihe „Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe“* (S. 9-25). WTM-Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959873246.0

knappen Beleuchtung des aktuellen Stands von Beweisen in der Primarstufe durch den Einsatz des 3D-Druckers als digitales Werkzeug und Instrument zur Übertragung digitaler Modelle in die reale Welt auf die Entwicklung einer Lernumgebung zum Themenkomplex der figurierten Zahlen übertragen. Ergebnisse einer Pilot-Erprobung lassen vorsichtige erste Schlussfolgerungen zu.

Das Beweisen von Aussagen über mathematische Zusammenhänge hat in der Geschichte der Mathematik eine bis in die Antike reichende Tradition. Heute ist es der wissenschaftliche Standard, aufgestellte Theoreme durch Berufung auf Axiome oder aus ihnen abgeleitete, bereits bewiesene Sätze zurückzuführen und dadurch primär deren Gültigkeit zu *beweisen*. Für das Beweisen im Unterricht wurden im Laufe der Zeit didaktisch-orientierte Beweisformen entwickelt, die Schülerinnen und Schüler die angemessene, aber dennoch ehrliche Auseinandersetzung mit dem zumeist als schwer, kompliziert und lästig empfundenen Beweisen ermöglichen sollen.

1.1 Von der Antike in die Moderne: Beweise und figurierte Zahlen

Die Mathematik prägende Entdeckungen der antiken Griechen, unter anderem durch Euklid, sind weithin bekannt. Sein wohl bekanntestes Werk, die *Elemente*, zeigt, dass von ihm, wie von seinen ‚Mitstreitern' Pythagoras, Thales u. a. in dieser Zeit bereits ein axiomatischer und von realen Objekten und Größen losgelöster, abstrakter Aufbau der Mathematik angestrebt wurde – ohne die uns heute so geläufige Formelsprache. Auf verbal-begriffliche und konstruktiv-geometrische Art und Weise führt Euklid zunächst Definitionen der mathematischen Objekte an und formuliert Sätze über deren Zusammenhänge, die im Anschluss bewiesen werden (Scriba & Schreiber, 2005). Zumeist wählt er in seinen Argumenten einen Weg über die Geometrie. So auch beim Beweisen von Aussagen, die eigentlich der Arithmetik entstammen, beispielsweise der Irrationalität von $\sqrt{2}$, die er in pythagoräischer Manier auf die Inkommensurabilität der Seiten und der Diagonale eines Quadrats zurückführt. Als Beweistechnik wird neben direkten Beweisen oft auch der indirekte Beweis durch *reductio ad absurdum* verwendet.

Teilweise werden zur Lösung von Problemen konstruktive Algorithmen angegeben, die im Anschluss auf ihre Korrektheit geprüft werden. Hierdurch werden gleichermaßen Beweise für die zugrundeliegenden Konstruktionen geliefert. Dieses Vorgehen findet sich auch in der Mathematik anderer früher Hochkulturen wieder. Im alten Ägypten und Babylonien wurden bereits – wiederum auf informelle Weise – Algorithmen zur Lösung von Problemen beschrieben. Von einem heutigen Standpunkt aus betrachtet ist dieses Vorgehen als Vorläufer des Prinzips der vollständigen Induktion zu verstehen (Scriba & Schreiber, 2005).

Einige Jahrhunderte später wird die Vorläuferidee zur vollständigen Induktion unter anderem von Maurolico (1575) in seinem Werk *Arithmeticorum libri duo* wieder aufgegriffen. Er beweist neben vielen weiteren Sätzen aus der Arithmetik die im weiteren Verlauf dieses Beitrags wieder aufgegriffene Aussage über figurierte Zahlen: ‚Alle Dreieckszahlen bilden zusammen mit der vorhergehenden Dreieckszahl ein danebenliegendes Quadrat‘. Dieser Satz über die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ist in der Mathematik nicht neu und lässt sich bis zu Theon von Smyrna ins erste bis zweite Jahrhundert v. Chr. zurückverfolgen (Lambert, 2016). Figurierte Zahlen waren schon den Griechen der Antike bekannt. Mit unterschiedlich gefärbten Steinchen verdeutlichten sie Gesetzmäßigkeiten der Arithmetik bzw. Algebra auf geometrische Art und Weise (Strick, 2019). Dreieckszahlen sind dementsprechend solche Zahlen, die sich in ihrer ‚Steinchenrepräsentation‘ in Form eines (rechtwinkligen) Dreiecks anordnen lassen. Analoges gilt für Quadratzahlen, Kubikzahlen etc. Setzt man exemplarisch zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen zusammen, so entsteht eine Quadratzahl, deren Seitenlänge so lang ist, wie die Grundseite der größeren der beiden Dreieckszahlen (siehe Abbildung 1).

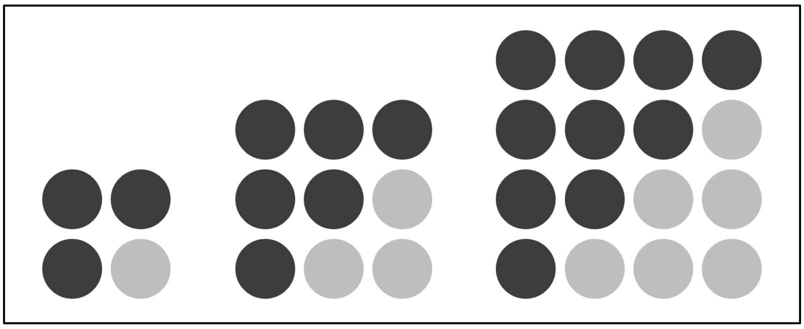

Abbildung 1: Summen zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen als Steinchenmuster.

Maurolico verwendet diese Darstellung für seinen Beweis der Aussage und geht folgendermaßen vor: Er definiert die Dreiecks- und Quadratzahlen zunächst induktiv anhand prototypischer Beispiele und formuliert basierend darauf die Proposition. Exemplarisch verdeutlicht er, wie sich 10 und 15 zu 25 zusammensetzen. 15, die fünfte Dreieckszahl, entsteht aus der vorangegangenen Dreieckszahl durch Addieren der ‚Ordnungszahl‘[1] 5. Damit ist die Summe der beiden aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen gleich der Summe des Doppelten der kleineren der beiden Dreieckszahlen und der Ordnungszahl der größeren, also aus dem Doppelten von 10 und der Grundzahl 5. Bewiesen wurde bereits, dass sich zwei gleiche Dreieckszahlen zu einem Rechteck zusammensetzen lassen, das gerade mit der um eins größeren Ordnungszahl der Dreieckszahl zu einem Quadrat ergänzt werden kann (Figuren dieser Art werden von Maurolico als ‚Vorgängerfiguren‘ bezeichnet). Damit folgt sofort, dass die Summe dieser Rechteckzahl, hier 20, und der Ordnungszahl der größeren Zahl, hier 5, der Quadratzahl mit eben dieser Ordnungszahl entspricht, also 25.

Der Beweis zeigt gleich zwei Besonderheiten. Zum einen bedient sich auch Maurolico ausschließlich verbal-begrifflicher sowie konstruktiv-geometrischer Darstellungen, formale Darstellungen solcher Argumentationen waren auch zu dieser Zeit noch nicht etabliert. Dennoch ist die Allgemeingültigkeit der Argumentation ohne

[1] Im lateinischen Original verwendet Maurolico den Begriff *radix*, was sich wörtlich mit *Wurzel* übersetzen lässt. Gemeint ist hier jedoch wohl nicht die Wurzel als Umkehroperation der Potenz, sondern vielmehr eine Wurzel im Sinne einer Grund- oder Ordnungszahl.

Zweifel klar ersichtlich. Der Beweis startet mit einem konkreten Beispiel, anhand dessen ein allgemeines Muster herausgearbeitet wird. Dieses Muster lässt sich auf alle Instanzen des Problems verallgemeinern. Damit hat Maurolico – hier, und an weiteren Stellen seines Werkes noch expliziter – nicht nur einen korrekten Beweis geliefert, sondern auch ein Beispiel für Vorläufer der Idee der vollständigen Induktion (Felgner, 2012), die in ihrer heutigen Form erst durch den axiomatischen Aufbau der natürlichen Zahlen durch seinen Landsmann Giuseppe Peano rund 200 Jahre später kalkülhaft hergeleitet werden konnte.

In der Moderne würde sich ein Mathematikgelehrter wohl in der Regel eben jener vollständigen Induktion sowie der allgemein anerkannten formalen Mathematiksprache bedienen und damit axiomatisch-deduktiv *beweisen*, dass dieser über 2000 Jahre alte Satz unanfechtbar korrekt ist. Ein alternativer Zugang erfolgt über die geschlossene Form der Dreieckszahlen $n \cdot (n - 1) / 2$, die ebenfalls bereits von Maurolico durch ‚Induktion' nachgewiesen wurde, und einem direkten Beweis.

1.2 Didaktisch-orientierte Beweisformen: der *action proof*

Im letzten Abschnitt wurde der Bezeichner ‚Beweis' in verschiedenen Kontexten verwendet. Die Frage nach einem Begriff dessen, was den Beweis nun zu einem *echten* Beweis macht, ist altbekannt und wird kontrovers diskutiert. An dieser Stelle kann jene Frage weder endgültig geklärt werden, noch erhebt der Beitrag den Anspruch darauf. Nach Meinung verschiedener Autoren ist anzuzweifeln, ob es überhaupt ein eindeutiges Konzept davon geben kann, was ein vollständiger Beweis ist. Wittmann & Müller (1988) liefern hierzu eine Gegenüberstellung verschiedener Ansichten und stellen fest, dass das, was als Beweis bezeichnet werden kann, intersubjektiv verhandelt wird und in verschiedenen sozialen Kontexten – Unterricht, Wissenschaft, etc. – unterschiedliche Kriterien zu erfüllen hat. „Was für eine soziale Gruppe ein Beweis ist, braucht es für eine andere Gruppe nicht auch unbedingt zu sein." (Wittmann & Müller, 1988, S. 240). Für das Umfeld ‚Schule' rangieren Anschaulichkeit und Bedeutsamkeit für das *Verstehen* der Gültigkeit einer Aussage weit vor formalen Deduktionen und deren Strenge. Diese inhaltlich statt formal geprägte Auffassung von ‚Beweis' wird auch im Rahmen dieses Beitrags vertreten. Um diesem Anspruch gerecht zu werden, wurden im Laufe des letzten Jahrhunderts ausgehend von den Beweisstufen nach Branford (1913) verschiedene Beweisformen entwickelt bzw. als solche (an-)erkannt, die im Rahmen eines didaktischen Begriffs von *Beweisen* Anwendung finden. Ausführliche Übersichten und Vergleiche der verschiedenen Beweisformen sind z. B. bei Krumsdorf (2015) oder Biehler & Kempen (2016) zu finden. Charakteristisch ist die Loslösung von Formalia und die Hervorhebung anschaulicher, ggf. auf Intuitionen und Sinneserfahrungen basierender Argumentationen, die in aller Regel am Ende des Beweisprozesses den klaren Anspruch erheben, eine gewisse Art der Allgemeingültigkeit zu besitzen.

Zum Einsatz im Unterricht ist unter anderem das Konzept des inhaltlich-anschaulichen Beweises im Sinne von Blum & Kirsch (1979) bzw. Wittmann & Müller (1988) etabliert, welches z. B. auch bei Wachter et al. (2022) Anwendung findet. In diesem Beitrag liegt der Fokus auf einer alternativen, chronologisch früheren Form des didaktisch geprägten Beweisens, dem *action proof* nach Semadeni (1984), der explizit auf den Unterricht der Primarstufe und die Ausbildung von Lehrkräften ausgelegt ist. Semadeni selbst beschreibt das Konzept folgendermaßen:

> Action proofs sollen nicht als fertige Beweise für den Einsatz im Klassenraum dienen, sondern viel mehr als Leitideen für die Lehrperson. Man kann sich einen action proof vorstellen als eine idealisierte und simplifizierte Variante eines empfohlenen Ansatzes, durch den Kinder sich selbst von der Gültigkeit einer Aussage überzeugen können. In der Praxis benötigt ein action proof einige vorangestellte oder zusätzliche Phasen der Exploration. […] Ein action proof ist eher das Ergebnis der Verinnerlichung einer Handlung als eine logische Ableitung aus gegebenen Voraussetzungen. […] Die Grundidee eines action proofs ist, dass wir nicht nur einzelne Konzepte aus einer Aussage heraus abstrahieren, sondern auch sichere Beweise. (Semadeni, 1984, S. 32, Übersetzung durch den Autor)

Es lassen sich nun Funktionen bzw. Absichten erkennen, die diese Form des Beweisens ausmachen. Die Unterscheidung von Funktionen von Beweisen wurde von verschiedenen Autoren angegangen. Hanna (2000) liefert neben der grundlegenden Unterscheidung zwischen explorativer und demonstrativer Funktion die folgende Auflistung aus verschiedenen Quellen zusammengetragener Funktionen des Beweisens: Verifizieren, Erklären, Systematisieren, Entdecken, Kommunizieren, Konstruieren, Explorieren und Eingliedern (engl.: ‚incorporation'). Bei der Auseinandersetzung mit dem Thema Beweisen im Rahmen von Unterricht, ist auf die durch entsprechende Lernumgebungen fokussierte Funktion zu achten. Ein durch Entdeckungen geprägter Zugang zum Beweisen ist inhärent motivierend für Schülerinnen und Schüler, die bis dato noch wenig Kontakt zur Disziplin des Beweisens hatten (Krumsdorf, 2015). Sind diese Entdeckungen für die Schülerinnen und Schüler bedeutsam situiert, können auch Kinder jüngeren Alters durchaus, entgegen der Annahme sie seien nicht in der Lage logisch zu begründen, wichtige Erfahrungen und Erfolgserlebnisse in dieser die Mathematik so prägenden Disziplin sammeln (De Villiers, 1990).

Die Hauptfunktion des action proof ist es der vorangegangenen Beschreibung nach, Entdeckungen an den mathematischen Objekten zu machen, um sich auf diese Weise durch die Internalisierung von Handlungen selbst (als Schülerin oder Schüler) davon zu überzeugen, dass eine Gesetzmäßigkeit zu jenen Objekten gültig ist. In diesen Funktionen der Beweisform wird deren Prozesscharakter deutlich. Im Gegensatz zur Funktion der Verifikation von Forschungsergebnissen als Verteidigung in der wissenschaftlichen Welt, geht es hier um die Erlangung intrinsischer Überzeugung – ein Faktor, der oft der Verifikation einer Aussage aus motivationalen Gründen vorausgehen muss. Dass dieser Prozess von sozialen und subjektiven Komponenten geprägt wird, und insbesondere bei Nicht-Experten nicht oder zumindest nicht nur durch formale Strenge, ist unübersehbar (De Villiers, 1990). Dennoch führen die durch einen action proof erlangten Begründungsstränge als Produkt zu einem ‚sicheren', wenn auch nicht formal aufgeschriebenen, Beweis („certain proof"). Der

Beweisprozess selbst, der für die praktische Durchführung als Leitidee dienen soll, ist in vier Schritte unterteilt. Die Schülerinnen und Schüler explorieren zu Beginn eine reale und manipulierbare generische Situation. Diese kann in enaktiver oder bildhafter Darstellung vorliegen. Anhand dieses Beispiels erkunden die Lernenden aktiv den Sachverhalt und verifizieren einen Zusammenhang. Im nächsten Schritt wenden die Schülerinnen und Schüler das Schema, das im vorigen Schritt verwendet wurde, um Beziehungen zu verifizieren, an, um diese an weiteren Beispielen zu untersuchen. Wurden genügend Beispiele untersucht, gehen die Schülerinnen und Schüler dazu über die Handlungen an den Objekten mental durchzuführen, bis sie überzeugt sind, wie die Aussage für viele weitere Beispiele begründet werden kann. Der Beweisprozess schließt mit dem Finden einer Klasse von Beispielen, in denen die Aussage gültig ist. Begründungsprozesse laufen dabei insbesondere in den ersten beiden Schritten ab (Semanedi, 1984). Die Korrektheit eines action proofs liegt in drei Anforderungen an die durchgeführten Operationen begründet:

> 1° Die in einem action proof enthaltenen physischen und mentalen Aktivitäten müssen semantisch korrekt sein.
>
> 2° Die konkreten Handlungen müssen Konkretisierungen eines formalen mathematischen Beweises zur gegebenen Aussage sein.
>
> 3° Die Methode muss in allen spezifizierten Fällen der Aussage gültig sein.
>
> (Semadeni, 1984, S. 32f., Übersetzung durch den Autor)

Die Argumentationsbasis eines action proofs, also das Gefüge von gültigen Aussagen und geltenden Schlussregeln (Fischer & Malle, 1985), besteht im Wesentlichen aus den (internalisierten) Handlungen an den konkretisierten mathematischen Objekten sowie deren Anwendbarkeit auf eine verallgemeinerte Klasse von Objekten ähnlicher Art. Die Konkretisierungen können (und sollen) dabei in verschiedenen Darstellungsformen dargeboten werden (Semanedi, 1984). Die zweite Anforderung, dass die Handlungen als Konkretisierungen eines formalen Beweises auftreten müssen, ist im Sinne Blum & Kirschs (1979) Anforderung an eine „intellektuell-ehrliche" Auseinandersetzung mit Beweisen in nicht-formaler Art: Ein korrekter nicht-formaler Beweis ist daran zu erkennen, dass er prinzipiell das Potenzial birgt, ohne Weiteres formalisiert werden zu können und so konstruktiv für einen fachwissenschaftlich anerkannten Beweis ist – und damit auch Anforderung 3 erfüllt, im Rahmen der spezifizierten Fälle allgemeingültig zu sein. Die Kontextualisierung von Beweisen im Rahmen der Primarstufe in der Welt der figurierten Zahlen ist daher nur natürlich. Nicht nur zwischen Arithmetik und Geometrie, sondern auch zwischen konstruktiv-geometrischen sowie verbal-begrifflichen Argumenten – geschichtlich wie auch in diesem Szenario von besonderer Bedeutung – und deren formal-algebraischer Darstellungsform vermittelt die Figurierung (Lambert, 2020). Handlungsbasierte Argumente sind damit (fast) immer auch direkt formalisier- und damit algebraisch verifizierbar. Diese Aufgabe obliegt im Unterricht in der Regel der Lehrperson, die nur als „kompetenter Mathematiker" (Semanedi, 1984, S. 33) angemessen beurteilen kann, ob ein action proof vollständig ist. Einer Studie von

Wittmann & Müller (1988) unter Studierenden des Lehramts zufolge tendieren Lehrpersonen eher dazu, eine formalistische Perspektive einzunehmen und nicht-formale (hier inhaltlich-anschauliche) Beweise als unvollständig oder ungenau abzulehnen. Damit zeigt die bereits oben angeführte Aussage „Was für eine soziale Gruppe ein Beweis ist, braucht es für eine andere Gruppe nicht auch unbedingt zu sein.“ (Wittmann & Müller, 1988, S. 240) noch einmal mehr ihre Relevanz für die Schulpraxis.

1.3 Status Quo: Beweisen in der Primarstufe

Dass das eigenständige Beweisen oder Begründen von Aussagen als charakteristische Tätigkeit der Wissenschaft Mathematik eine Rolle auch für den Unterricht der Primarstufe spielt, ist bereits seit mehreren Jahrzehnten in den Bildungsplänen für die Grundschule festgehalten (Wachter et al., 2022). Die derzeit gültigen Bildungsstandards lassen den Unterricht des Begründens bereits in den drei Grunderfahrungen erahnen (stark angelehnt an die bereits von Winter (1995) formulierten Grunderfahrungen). Schülerinnen und Schüler sollen die Mathematik auf folgende Arten erfahren:

> Mathematik als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt aus Natur, Gesellschaft, Kultur, Beruf und Arbeit in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen,
>
> Mathematik als geistige Schöpfung und auch deduktiv geordnete Welt eigener Art,
>
> Mathematik als Mittel zum Erwerb von auch über die Mathematik hinausgehenden insbesondere heuristischen Fähigkeiten.
>
> (KMK, 2022, S. 6)

Im Besonderen wird im zweiten Punkt formuliert, dass Schülerinnen und Schüler die Welt ‚Mathematik‘ als deduktiv geordnet wahrnehmen können sollen. Logisch korrekt geführte Beweise sind das Werkzeug in einer solchen Welt und darum den Schülerinnen und Schülern zugänglich zu machen. Dabei lernen die Schülerinnen und Schüler unweigerlich verschiedene Heuristiken kennen (siehe Punkt 3), die sie in ihrer Arbeit mit mathematischen Objekten unterstützen. Ganz konkret werden die normativen Forderungen nach einem Mathematikunterricht, der sich auch dem Begründen und Beweisen widmet, in der Formulierung der prozessbezogenen Kompetenzen:

> Für die Gestaltung des Mathematikunterrichts ist es daher bedeutsam, dass den Schülerinnen und Schülern Gelegenheit gegeben wird, selbst **Probleme zu lösen**, über **Mathematik zu kommunizieren**, **mathematische Inhalte** darzustellen und zu **begründen**, mathematische Sachverhalte zu modellieren und mit mathematischen Objekten und **Werkzeugen** zu arbeiten. (KMK, 2022, S. 7, Hervorhebungen durch den Autor)

Mathematische Inhalte zu begründen ist in der Kompetenz ‚mathematisch Argumentieren‘ enthalten und bildet den größten Teil der Aspekte des Beweisens ab. Zum Argumentieren gehört demnach das Auffinden von Beziehungen zwischen mathematischen Objekten sowie deren Verifizierung durch eigene oder auch die Begründungen der Mitschülerinnen und Mitschüler. Beweise sind aber auch, wie oben bereits beschrieben, ein Mittel zur Kommunikation, sind Werkzeug zur Erkundung neuer Sachverhalte und sind zudem als für Schülerinnen und Schüler ungewohntes Aufgabenformat auch als Form des Problemlösens auslegbar (Bruder, 2006).

Dennoch ist die in der Regel negative Konnotation von Beweisen als ‚zu schwierig' oder ‚zu komplex' hartnäckig und sie finden in der Realität eher selten ihren Weg in den Mathematikunterricht der Primarstufe (z. B. Stylianides, 2022; Stylianides & Stylianides, 2017). Schon bei Studierenden des Lehramts lässt sich feststellen, dass die Behandlung von Beweisen, insbesondere auch im oben beschriebenen didaktischen Sinn, zu Verständnisproblemen führt, die sich in weiterer Folge verschiedenartig negativ auf den Unterricht auswirken können (Götze, 2019). Diese Einstellungen finden sich auch in den Lehrbüchern wieder. Exemplarisch zeigt eine Analyse von Schmid (2016), dass über zehn gängige Schulbücher verteilt nur 25 bzw. 49 Aufgaben im Bereich der Geometrie der Klassenstufen 3 und 4 einen Bezug zum Begründen herstellen.

2 Relevanz der 3D-Druck-Technologie für den Unterricht

Berichte aus Schule und Wissenschaft (u. a. Dilling, 2022, Pielsticker, 2020; Witzke & Heitzer, 2019) zeigen in gleichem Maße wie die Zahl der Online-Materialien zum Thema 3D-Druck, dass jene Technologie seit dem Auslauf wichtiger Patente und dem Start der ‚RepRap'-Bewegung in den 2000er-Jahren nicht nur in der Industrie, sondern auch als Hobby und inzwischen auf Ebene der Didaktik und Schulpraxis immer größeres Interesse erlangt.

> Die 3D-Druck-Technologie ist ein Fertigungsverfahren, mit dem sich schnell und verhältnismäßig preisgünstig Modelle und Prototypen, aber auch Werkzeuge und Endprodukte herstellen lassen. Die Technologie wird zu den additiven Fertigungsverfahren gezählt, da das Material Schicht für Schicht zu einem Objekt aufgebaut wird – im Gegensatz zu subtraktiven Herstellungsverfahren, bei denen nicht zu dem Objekt gehörende Teile aus Material entfernt werden (z. B. Fräsen) (vgl. Fastermann, 2016). Die 3D-Druck-Technologie findet Anwendung in verschiedenen Bereichen der Industrie, im Hobbybereich und auch der Forschung. Trotz vermehrter fachdidaktischer Forschungsarbeiten in den letzten Jahren, handelt es sich im Bildungsbereich weiterhin um ein relativ neues digitales Medium. (Dilling, 2022, S. 270)

3D-gedruckte Modelle – und auch deren Design – offenbaren diverse Vorteile und Lernchancen als Unterrichtsmaterial und -gegenstand. Ein digitales Modell, z. B. erzeugt in einem Dynamischen Geometriesystem, wie GeoGebra, wird durch die Technologie anfassbar gemacht. Schülerinnen und Schüler können anhand des realen Modells Erfahrungen sammeln, die die Entdeckung von Zusammenhängen, die Wissensorganisation und die Erklärung von Phänomenen unterstützen. Software zum 3D-Design kann auch von den Schülerinnen und Schülern selbst zur Erstellung neuer Objekte verwendet werden. „Gerade die Möglichkeit, Schülerinnen und Schüler in Teamarbeit eigenständig taktile „mathematische Objekte" erstellen zu lassen, hat großes Potenzial für einen problemorientierten Mathematikunterricht" (Witzke & Heitzer, 2019, S. 3). Dabei lernen die Schülerinnen und Schüler auch Schlüsselkompetenzen, die im Berufsleben wieder von großer Bedeutung sein können: Umgang mit digitalen Medien, insbesondere auch Computer bzw. Tablet, Bedienung von CAD-Software, etc. (Witzke & Heitzer, 2019).

Ein entdeckender Unterricht ist zum Erlangen erster grundlegender Erfahrungen mit Beweisen bestens geeignet. Bereits Winter (1989) formuliert die begründete Auffassung, dass ein entdeckender Zugang zum Lernen allgemein betrachtet im Gegensatz zur Position des Lernens durch Belehrung eine größere Wirkung bei Schülerinnen und Schülern hervorbringt. Insbesondere im Kontext des Beweisens ist das eigenständige Handeln von höchster Bedeutung: „Beweisen wird nicht gelehrt, sondern gelernt, und zwar durch Selbsttätigkeit.“, so formuliert es Freudenthal (1979, S. 197), dessen Position auch rund 45 Jahre später noch vielfach vertreten und zitiert wird. Nicht zuletzt hat ein entdeckender, induktiv geprägter Ansatz zum Beweisen eine inhärente motivationsförderliche Wirkung (Krumsdorf, 2015).

Die realen Modelle abstrakter mathematischer Begriffe bzw. Objekte ermöglichen weiterhin eine enaktive Auseinandersetzung mit dem Sachverhalt. „Ein Mathematikunterricht mit empirischen Objekten (z. B. 3D-gedruckten Objekten) gibt dabei Anlass zu beispielgebundenen Begründungen und zu einer Reduzierung kalkülhaften Arbeitens.“ (Dilling et al., 2022, S. 39f.) Das Ziel ist die Einsicht, dass die konkreten in den Modellen einsehbaren Zusammenhänge zum Symbol für die Schülerinnen und Schüler werden, also ‚(Spiel-)Regeln‘ offenbart werden, denen mathematische Begriffe unterliegen. Wie genau sich das Symbolische in den Schülerinnen und Schülern manifestiert, kann intersubjektiv verschieden sein. Gemeint ist mit Erreichen der symbolischen Repräsentationsstufe ein verständiger Umgang mit Zeichen, die insbesondere im Rahmen der Primarstufe durchaus objekthaft geprägt sein können und nicht in formal-algebraischer Form vorliegen müssen (Lotz, 2020). Dabei ist unbedingt zu beachten, dass nur solche Darstellungen, hier also Modelle, verwendet werden, „die im angedachten Sinn zu Symbolen werden können“ (Lotz, 2020, S. 18). Diese Forderung steht im direkten Zusammenhang mit der oben beschriebenen Prämisse, dass ein action proof nur dann als ‚Beweis‘ anzusehen ist, wenn die informelle Darstellung *ohne Weiteres* (hierin manifestiert sich der Grundsatz von Lotz) in eine formale überführt werden kann.

Ableitung einer übergeordneten Forschungsfrage

Historisch gesehen spielen Beweise seit mehreren tausenden Jahren eine wesentliche Rolle in der Mathematik. Als fundamentale Idee der Mathematik (Wittmann, 2014) bzw. zur Vermittlung eines diversen Bildes dessen, was Mathematik ist, sollten Beweise daher eine größere Rolle in der Primarstufe spielen. Die normativen Voraussetzungen dafür sind gegeben. Durch die Berufung auf didaktisch orientierte Beweisformen, wie den action proof, und die Situierung des Beweiskontexts in für Schülerinnen und Schüler interessanten Szenarien, wird diesen der Zugang zum Beweisen erleichtert bzw. ermöglicht. Die Technologie des 3D-Drucks als Manifestation eines digitalen Werkzeugs bietet die Möglichkeit, mathematische Begriffe für

Schülerinnen und Schüler anfassbar zu machen und in der realen Welt mathematische Zusammenhänge zu entdecken. Damit ergibt sich die Leitfrage:

In welcher Form kann der Einsatz von 3D-Druck Schülerinnen und Schüler der Primarstufe bei der Bearbeitung von Beweisen, z. B. in Form von action proofs, in der Geometrie unterstützen?

3 Zahlen wie bei den alten Griechen – Pilotierung einer Lernumgebung zur Summe aufeinanderfolgender Dreieckszahlen

3.1 Entwicklung des Materials

An der Schnittstelle zwischen Arithmetik und Geometrie wurde der Satz „Die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ist eine Quadratzahl“ als Basis für eine Lernumgebung zum Beweis dieses Satzes (s. o.) gewählt. Eingebettet ist die Lernumgebung in einen historischen Kontext: Schon die alten Griechen haben mit Zählsteinen gerechnet, die sie zu Formen zusammengelegt haben, unter anderem zu Dreieckszahlen. Anhand dieser figurierten Zahlen haben sie Zusammenhänge zwischen solchen Zahlen entdeckt und begründet. Die Schülerinnen und Schüler verwenden in der Einheit 3D-gedruckte Dreieckszahlen als ‚moderne Form‘ der Zählsteine. Die Einbettung in historische Kontexte schlägt u. a. Krauthausen vor:

> Bei fachsprachlichen Termini – z. B. Dreieckszahlen oder Quadratzahlen oder Stellenwerttafel – böten sich Möglichkeiten für kurze Ausflüge in die Geschichte der Mathematik: Es kann sehr motivationsfördernd sein, wenn Kinder auch einmal erfahren, wie und wann und von wem denn dieses oder jenes Konzept, das heutzutage in den Schulen gelernt wird, historisch gefunden oder entwickelt wurde (vgl. die Rechensteinchen in Abschn. 4.7.6) oder woher z. B. ein bestimmter Begriff überhaupt stammt. (Krauthausen, 2018, S. 21)

Wird eine solche Einbettung nicht vorgenommen, kann es vermehrt vorkommen, dass Schülerinnen und Schüler das Material ablehnen, und stattdessen versuchen, das Problem auf ‚formal-algebraischem‘ Weg zu lösen (Platz, 2019). Die Situierung ist damit ein wesentlicher motivationaler Faktor. Gegenüber „klassischen“ Materialien zur Auseinandersetzung mit figurierten Zahlen – Wendeplättchen oder anderen den Zählsteinen ähnliche unstrukturierte Legematerialien zur Repräsentation von Zahlen kommen wohl als erstes in den Sinn – bieten Dreieckszahlen aus dem 3D-Drucker verschiedene Vorteile mit sich, die sie aus der Masse hervorstechen lassen. Zunächst sind 3D-gedruckte Materialien hochgradig individuell gestaltbar. Für den praktischen Unterricht ermöglicht das der Lehrperson auf die Lernvoraussetzungen der Lerngruppe gezielt durch bestimmte Designentscheidungen (farbige Kategorisierung, Markierungen auf Materialien, u. Ä.) einzugehen. Aus Sicht der Forschung können während der Entwicklung von Lernsettings, wie beispielsweise hier einer Lernumgebung, verschiedene Varianten mit unterschiedlichen Features in vergleichsweise kurzer Zeit kostengünstig hergestellt und evaluiert werden. Im hier beschriebenen Stand der Lernumgebung wurden die Dreieckszahlen bereits auf die übliche Art und Weise vorstrukturiert und die einzelnen Einheiten fest miteinander verbunden (siehe Abbildung 2). Damit können sich die Schülerinnen und Schüler bei ihren Auseinandersetzungen mit dem Lerngegenstand gänzlich auf Untersuchungen des Zusammenspiels verschiedener Dreieckszahlen mit dem Ziel der Entdeckung des beschriebenen Theorems konzentrieren. Vorüberlegungen, wie nun eine bestimmte Dreieckszahl aussieht werden in den Hintergrund gerückt.

Um ein möglichst vielschichtiges Bild zu den Chancen des Einsatzes von 3D-Druck im dargestellten Kontext zu erhalten, werden im Anschluss auch Erprobungen durchgeführt, in denen Schülerinnen und Schüler die mathematischen Objekte selbst designen und drucken können. Bei dieser Tätigkeit sind nach Dilling et al. (2022) die größten Einflüsse auf die Lernprozesse der Lernenden, hier bezogen auf das Objekt „Dreieckszahl“, zu erwarten. Der Einfluss wiederum auf Kompetenzen, die für Beweistätigkeiten der Schülerinnen und Schüler relevant sind, ist zu untersuchen. Ebenso bietet 3D-Druck die neue Möglichkeit im Gegensatz zu zweidimensionalen Materialien auch figurierte Zahlen im Raum zu untersuchen – entweder durch Druck der entsprechenden fertigen Figuren oder aber auch durch Konstruktion aus den bereits gedruckten Dreieckszahlen. Insgesamt bietet sich durch die Technologie und dem daraus entstehenden Material ein hohes Maß an Flexibilität für Forschungsvorhaben und für den praktischen Unterricht. Nicht zu unterschätzen ist für Letzteren die Haltbarkeit der Modelle, die einen wiederholten Einsatz im Unterricht über lange Zeit möglich macht.

3.2 Entwicklung der Lernumgebung

Nach einem gemeinsamen Einstieg, in dem die Schülerinnen und Schüler Dreieckszahlen kennenlernen, arbeiten diese in einem Forscherheft. Darin halten sie zunächst noch einmal ihr neues Wissen über figurierte Zahlen fest und geben weitere Beispiele für solche Zahlen an. Im Anschluss erhalten sie die Aufgabe, ein Quadrat aus zwei der 3D-gedruckten Zählsteine zu legen. Dabei soll begründet werden, warum in der konkreten Situation ein Quadrat entsteht. In Bezug auf die Schritte des action proof ist damit der erste Schritt implementiert, die Erkundung einer konkreten manipulierbaren Situation. Daraufhin erarbeiten die Schülerinnen und Schüler mit Ihrem Nachbarkind ein weiteres Paar von Dreieckszahlen, das beim Zusammenlegen ein Quadrat formt, und finden so, adäquat zum zweiten Beweisschritt, weitere Beispiele, in denen der gegebene Satz – der zu diesem Zeitpunkt noch nicht explizit formuliert wurde, sondern entdeckt werden soll – gilt. Das ‚Entdeckenlassen‘ des intendierten Zusammenhangs ist im Gegensatz zum Vorgehen ‚Definition – Satz – Beweis‘ ein Ansatz zur Auseinandersetzung mit Beweisen, der eine intrinsische Motivation zur Begründung der gefundenen Vermutung bewirkt:

> Es gibt eine Tätigkeit, die noch höher steht – und zu der das Schulbuch, wie es heute ist, nicht anzuspornen versteht: Das ist das Selber-auf-die-Suche-Gehen ... neugierig werden ... hoffen, dass man zu etwas kommt ... mit dem Weggefährten sich verbunden wissen ... einer Vermutung folgen und Ausdauer haben ... Vermutetes mit eigener Kraft aufklären ... die Freude gemeinsam genießen. (Röhrl, 1980, zitiert nach Führer, 2009)

Für den action proof wichtig ist an dieser Stelle, dass die Schülerinnen und Schüler erneut begründen, warum tatsächlich ein Quadrat entsteht. Diese Begründung muss gleichsam derer im ersten Schritt sein, um zum Ende hin verallgemeinert werden zu können. Gegebenenfalls müssen die Lernenden ihre Begründungen aus dem Eingangsbeispiel verändern, abstrahieren oder auch enger fassen, sodass sie weiter tragfähig bleiben.

Der Übergang zur Internalisierung der Handlung des Zusammenlegens wird möglichst natürlich erzeugt. Im zur Verfügung stehenden Material fehlt eine Figur, sodass nicht alle Dreieckszahlen einen ‚Partner' bekommen können. Die fehlende Figur wird von den Schülerinnen und Schülern gezeichnet. Dazu ist es notwendig, dass die Regelmäßigkeit der zueinander gehörenden Dreieckszahlen von den Schülerinnen und Schülern verinnerlicht und auf ein nicht real vorliegendes Beispiel übertragen wird. Diese Regelmäßigkeit wird von den Lernenden schließlich in einem letzten Schritt schriftlich in einer Regel (Ideal: „Beim Zusammenlegen zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen entsteht eine Quadratzahl") festgehalten, die anschließend anhand der Verallgemeinerung der bisher angewandten Begründungen im beschriebenen Sinne bewiesen wird. Der letzte Schritt ist zur Sicherung des Verständnisses für die Allgemeingültigkeit der Aussage notwendig. Ein inhaltlich-anschaulicher Beweis wird erst dann vollständig, „wenn sprachlich expliziert wird, wie die Voraussetzungen und die Beweisideen in der Darstellung wiederzufinden sind." (Götze, 2019, S. 122). Angewendet auf den action proof muss also für einen vollständigen Beweis anhand einer schriftlichen Erklärung die Übertragung der Begründungen für die Einzelfälle in die Allgemeinheit deutlich werden.

3.3 Erprobung und erste Ableitungen

Um einen ersten Eindruck über die Eignung der Lernumgebung in der Praxis zu erhalten, wurde eine pilothafte Erprobung mit 21 Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 4 außerhalb des Regelunterrichts durchgeführt. Nach dem gemeinsamen Einstieg bearbeiteten die Lernenden die Aufgabenstellungen im Forscherheft in Partnerarbeit. Eine Lehrperson der Klasse sowie eine studentische Hilfskraft leisteten bei Bedarf Hilfestellung.

Zunächst erkunden die Schülerinnen und Schüler das hinter den Dreieckszahlen steckende Muster sowohl in konstruktiv-geometrischer Darstellung als auch formal-algebraisch durch die Angabe der in der n-ten Dreieckszahl enthaltenen Steine sowie der Differenz zur nachfolgenden Dreieckszahl. Die Aufgabe, die sechste Dreieckszahl zu zeichnen und den Unterschied in der Anzahl der Steine zur vorigen Dreieckszahl anzugeben, können bis auf wenige Ausnahmen alle Lernenden in kurzer Zeit lösen.

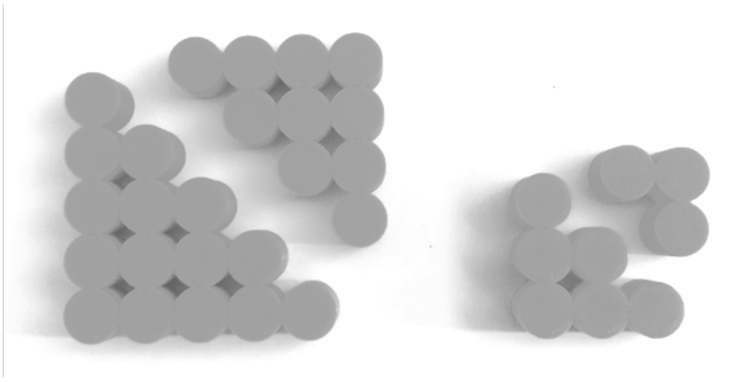

Abbildung 2: 3D-gedruckte Dreieckszahlen

Im Anschluss arbeiten die Lernenden mit dem 3D-gedruckten Material. Sie erhalten – im Sinne der Schritte des action proofs – zunächst die Aufgabe, ein Paar von Dreieckszahlen zu finden, die zusammengelegt ein Quadrat bilden, um so ein erstes Beispiel für die Situation von Interesse zu finden. Auch diese Aufgabe kann wieder von nahezu allen Kindern problemfrei gelöst werden, während die Erklärung, *warum* in der konkreten Situation ein Quadrat entsteht, die ersten Schwierigkeiten mit sich bringt. *Beim Zusammenlegen der Dreieckszahlen entsteht ein Quadrat, weil ...*

„ … überall 5 kleine Quadraten sind wen es zusammengelegt."

„ … jedes Quadrat hat gleich lange Seiten."

„ … die Kanten gleich lang sind."

In dieser Auswahl von Schülerantworten ist der Fokus der Lernenden auf den Nachweis, dass es sich bei der Figur tatsächlich um ein Quadrat handelt, zu erkennen. Sie berufen sich dabei auf ihnen bekannte definierende Eigenschaften von Quadraten, insbesondere, dass jede Seite eines Quadrats gleich lang ist. Der Einfluss der Struktur der Dreieckzahlen wird in der Erklärung nicht beleuchtet. Andere Schülerinnen und Schüler versuchen die Aussage darüber zu begründen, dass die Dreieckszahlen aufeinanderfolgen:

„ … die eine Dreieckszahl ist 1 kleiner als das andache."

„ … sie immer nur zu den Dreieckszahlen passen zu den Plus oder Minus 1 rechnen kann."

„ … es muss immer bei einem Quadrat eins weniger sein"

Damit nähern sich die Lernenden bereits dem eigentlichen Satz über die Summe *aufeinanderfolgender* Dreieckszahlen, lassen jedoch aus, warum ein Quadrat und nicht ein anderes Rechteck entsteht. Zwei Antworten stechen aus der Menge heraus:

„ … das große Quadrat hat oben 3 flächen und das kleine auch oben." (S1)

„ … die 1 zum Beispiel passt zu der 2 weil die 2 eine Partnerin für die 1 ist." (S2)

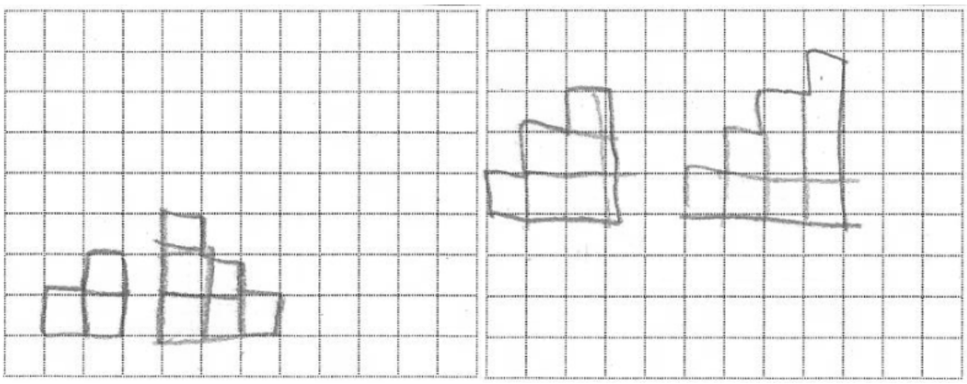

Abbildung 3: Zeichnungen von S1 (links) und S2 (rechts)

S1 und S2 zeigen in ihrer Antwort eine gewisse Art eines Ergänzungsverständnisses. S1 bezieht sich mit etwas Interpretationsspielraum auf die Anzahl der Stufen, die in der größeren Figur „nach oben“ frei sind und mit der passenden Anzahl an Stufen der kleineren Figur belegt werden können. S2 erkennt „Partner“. Es kann vermutet werden, dass für ihn Partner solche Zahlen sind, die sich zur Kantenlänge des Quadrats, in diesem Beispiel also drei, aufaddieren.

Im nächsten Schritt finden die Schülerinnen und Schüler weitere Paare von Dreieckszahlen, die sich zu Quadraten zusammensetzen lassen. Wieder ist die Aufgabe, zu begründen, warum als neue Figur ein Quadrat entsteht. An dieser Stelle ist aufgefallen, dass die Schülerinnen und Schüler weitestgehend an ihren Begründungen aus der ersten Phase der Exploration festhalten. Lernende, die zu Beginn noch zur ersten oben beschriebenen Gruppe gehörten, erkennen nun teilweise den Zusammenhang ‚aufeinanderfolgende Dreieckszahlen‘. Wie schon im Schritt zuvor bedürfen die schriftlichen Begründungen aufgrund der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit der Schülerinnen und Schüler einiger Interpretation. In Bezug auf die beiden oben zuletzt genannten Lernenden lässt sich feststellen, dass die Mutmaßung, einer der Schüler habe Partner erkannt, die sich zur Seitenlänge des Quadrats zusammensetzen – was zu einer vielversprechenden Grundlage für eine allgemeine Begründung geführt hätte – nicht korrekt war. In diesem Aufgabenteil begründet er für die vierte und fünfte Dreieckszahl, dass diese zusammenpassen, weil die vier Partnerin zur fünf ist. Er bezieht sich also – zumindest in seiner schriftlichen Aufzeichnung – nur auf die Eigenschaft ‚aufeinanderfolgend‘ der beiden Dreieckszahlen.

Im abschließenden Schritt können nur ein Drittel der Schülerinnen und Schüler eine Regel, die sie im Verlauf der Einheit erarbeitet haben, verschriftlichen und zumindest in Ansätzen schriftlich begründen. Ein zunächst ernüchterndes Ergebnis! … das nicht dem Eindruck entsprach, den die anwesenden Lehrpersonen und auch der Autor während der Durchführung der Lerneinheit bekommen konnten. Im persönlichen Gespräch mit den Schülerinnen und Schülern zeigten diese sehr wohl ein Verständnis für die allgemeine Regel, die hinter den konkreten Beispielen steckt. Es fiel jedoch auch hier auf, dass es den Lernenden schwerfiel, ihre Überlegungen zu versprachlichen. Ein Problem, das selbst bei Studierenden noch zu Schwierigkeiten in der Auseinandersetzung mit didaktischen Beweisformen führt (Götze, 2019). Als Konsequenz wird aus Forschungssicht der nächste Schritt eine Überarbeitung der Lernumgebung sein, die die sprachliche Komponente erleichtert, in erster Linie durch Ablösung der schriftlichen Antwortform durch mündliche Interviewsituationen, die im durchgeführten Szenario jedoch aus verschiedenen, unter anderem auch organisatorischen Gründen, nicht realisierbar gewesen wäre. Das Material im Kontext der historischen Mathematikwerkzeuge wurde von den Schülerinnen und Schülern gut angenommen und hat den Entdeckungs- sowie Begründungsprozess augenscheinlich unterstützt. Eine systematische Untersuchung soll in Zukunft folgen.

3.4 Anmerkungen zur Datenerhebung und weiteren Schritten

Ziel der Erprobung war es, einen ersten Eindruck zu bekommen, wie Schülerinnen und Schüler einerseits auf das weitestgehend unberührte Thema des Beweisens sowie auf das zu diesem Zeitpunkt bereits vorbereitete Material reagieren. Als Erhebungsinstrument dienten die ausgefüllten Forscherhefte der Lernenden. Außerdem flossen eigene Eindrücke aus der Veranstaltung ein. Die qualitative Auswertung der Schülerantworten erfolgte zu diesem Zeitpunkt nach keinem bekannten Standardverfahren. Die bis zur Piloterprobung durchgeführten Entwicklungsschritte können als erster Durchlauf in einer Folge von Überarbeitungszyklen im Sinne der Design Science Research (DSR) gesehen werden. Mit Bezug auf den Four Cycle View of DSR nach Drechsler & Hevner (2016) kann der Forschungsstand derzeit im Relevance Cycle mit dem Ziel der Erörterung von Anforderungen an eine Lernumgebung zum genannten Thema durch erste Feldversuche verortet werden.

4 Fazit & Ausblick

Beweise in der vorgestellten oder ähnlichen Form sollten als fundamentale Idee eine größere Rolle im Unterricht der Primarstufe spielen. Versuche, wie beispielsweise hier beschrieben, zeigen, dass Lernende unter den richtigen Umständen, entgegen weitläufigen Annahmen, sehr wohl in der Lage sind, Aussagen und zugehörige Beweise zu finden und lassen vorsichtigen Optimismus hinsichtlich des Einsatzes von 3D-Druck zur Unterstützung von Beweisprozessen von Schülerinnen und Schülern der Primarstufe zu. Wie beschrieben muss die Lernumgebung zu figurierten Zahlen zunächst hinsichtlich sprachlicher Komponenten überarbeitet werden. Außerdem sollten die Materialien hinsichtlich der Flexibilität der Begründungsansätze geöffnet werden, z. B. durch die Möglichkeit, „Diagonalen“ von den Dreieckszahlen abzuspalten. Der Einsatz von 3D-Druck erlaubt prospektiv auch die Thematisierung von Aussagen über räumliche figurierte Zahlen, z. B. „Die Summe der ersten aufeinanderfolgenden Kubikzahlen ist eine Quadratzahl“. Eine Auswahl weiterer solcher Beispiele findet sich z. B. in den *Proofs without words* (Nelsen, 1997). Die Auseinandersetzung mit räumlichen figurierten Zahlen bringt das Potenzial zur Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens als zentrale Aufgabe des Geometrieunterrichts mit sich. Wie bereits eingangs erwähnt, scheint es auch vielversprechend die

Schülerinnen und Schüler selbst Dreieckszahlen oder andere figurierte Zahlen – auch im 3D – selbst digital konstruieren zu lassen. Die dadurch entstehenden Theorien über die mathematischen Objekte könnten zu einem flexibleren Umgang mit diesen beitragen.

Literatur

Biehler, R., & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. Journal für Mathematik-Didaktik, 37(1), 141–179. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0097-1

Blum, W., & Kirsch, A. (1979). Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. Der Mathematikunterricht, 25(1), 6–24.

Branford, B. (1913). Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität. B. G. Teubner.

Bruder, R. (2006). Erläuterungen zu Modul 1: Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht. http://www.sinus-transfer.de/fileadmin/MaterialienBT/Bruder_Modul1.pdf

De Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. Pythagoras, 24, 17–24.

Dilling, F. (2022). Begründungsprozesse im Kontext von (digitalen) Medien im Mathematikunterricht: Wissensentwicklung auf der Grundlage empirischer Settings. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-36636-0

Dilling, F., Pielsticker, F., Schneider, R., & Vogler, A. (2022). 3D-Druck im empirisch-gegenständlichen Mathematikunterricht. MNU-Journal, 01.2022, 37–45.

Drechsler, A., & Hevner, A. (2016). A Four-Cycle Model of IS Design Science Research: Capturing the Dynamic Nature of IS Artifact Design.

Felgner, U. (2012). Das Induktions-Prinzip. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 114(1), 23–45. https://doi.org/10.1365/s13291-011-0032-9

Fischer, R., & Malle, G. (1985). Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. Mannheim Bibliograph. Institut.

Freudenthal, H. (1979). Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht. In W. Dörfler (Hrsg.), Beweisen im Mathematikunterricht: Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik“ von 26.9. Bis 29.9. 1978 in Klagenfurt (S. 183–200). Teubner.

Führer, L. (2009). Vom Begründensollen zum Vermutenwollen – Heinrich Winter zum 80. Geburtstag –. In M. Ludwig, R. Oldenburg, & J. Roth (Hrsg.), Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht – AK Geometrie 2007/08 (S. 167–188). Franzbecker.

Götze, D. (2019). Arithmetisches Verständnis bei Grundschulstudierenden fördern – Konzeptionelles und Beispiele aus dem Projekt „Arithmetik digital“. In D. Walter & R. Rink (Hrsg.), Digitale Medien in der Lehrerbildung Mathematik– Konzeptionelles und Beispiele für die Primarstufe (S. 115–132). WTM-Verlag.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. Educational Studies in Mathematics, 44(1/2), 5–23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465

KMK. (2022). Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Primarbereich. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004, i.d.F. vom 23.06.2022). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf

Krauthausen, G. (2018). Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5

Krumsdorf, J. (2015). Beispielgebundenes Beweisen. Inaugural-Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades des Doktors in den Erziehungswissenschaften an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster. Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Lambert, A. (2020). Mathematik und/oder Mathe (in der Schule) – ein Vorschlag zur Unterscheidung. Der Mathematikunterricht, 66(2), 3–15.

Lambert, A. (2016). Figurierte Argumente. AK Geometrie 2016, Saarbrücken.

Lotz, J. (2020). Einsichten ins Symbolische anbahnen. mathematik lehren, 223, 17–21.

Maurolico, F. (1575). Arithmeticorum libri duo.

Nelsen, R. B. (1997). Proofs without words: Exercises in visual thinking. Mathematical Assoc. of America.

Pielsticker, F. (2020). Mathematische Wissensentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern: Fallstudien zu empirisch-orientiertem Mathematikunterricht mit 3D-Druck. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-29949-1

Platz, M. (2019). Learning environments applying digital learning tools to support argumentation skills in primary school: First insights into the project. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Hrsg.), Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (Bd. TWG16, Nummer 25). Freudenthal Group. https://hal.science/hal-02428759

Schmid, S. (2016). Begründen als Anforderung in Geometrieaufgaben der Grundschule. Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 50. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 07.03.2016 bis 11.03.2016 in Heidelberg, 867–870.

Scriba, C. J., & Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen (3. Aufl). Springer.

Semadeni, Z. (1984). Action Proofs in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training. For the Learning of Mathematics, 4(1), 32–34. JSTOR.

Strick, H. K. (2019). Mathematik Ist Schön: Anregungen Zum Anschauen und Erforschen Für Menschen Zwischen 9 und 99 Jahren (2nd ed). Springer.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2022). Introducing students and prospective teachers to the notion of proof in mathematics. The Journal of Mathematical Behavior, 66, 100957. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100957

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Research-based interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. Educational Studies in Mathematics, 96(2), 119–127. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9782-3

Winter, H. (1989). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik (E. C. Wittmann, Hrsg.). Vieweg.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61, 37–46.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter. (S. 237–257). Cornelsen.

Witzke, I., & Heitzer, J. (2019). 3D-Druck: Chance für den Mathematikunterricht? mathematik lehren, 217, 2–9.

Jenny KNÖPPEL & Felicitas PIELSTICKER, Siegen

Argumentationsprozesse einer Grundschülerin mit Rechenschwierigkeiten – Fallstudie zur Zahlzerlegung mit der App *Rechentablett*

Im Rahmen dieses Beitrags wird eine Untersuchung zum Einsatz der App ‚Rechentablett' durchgeführt. Dabei werden insbesondere die Argumentationsprozesse zu Zahlzerlegungen einer Grundschülerin mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen in den Blick genommen. Im Zusammenhang mit der Analyse von Interviewsituationen stellt sich heraus, dass der Kontext der App für die Schülerin eine Möglichkeit eröffnet, einen Bezug zwischen den auf dem Tablet dargestellten virtuellen Plättchen und ihren Fingern herzustellen und diese entsprechend als Argumentationsbasis bzw. -hilfe in ihrem Argumentationsprozess zu verwenden.

In the following article, we have conducted a study on the use of the app 'Rechentablett'. In this context, we examine the argumentation processes on number decompositions of a primary school student with special difficulties in learning mathematics. In connection with the analysis of interview situations, it turns out that the context of the app opens up a possibility for the student to establish a connection between the virtual tiles displayed on the tablet and her fingers. This enables her to use them as a basis or aid for argumentation in her argumentation process.

1 Einleitung und Motivation

Mathematisches Argumentieren zählt zu einer der zentralen prozessbezogenen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht entwickeln sollen (KMK, 2022) und wird von Seiten der Lernenden häufig als herausfordernd empfunden (Winter 1983; Meyer & Prediger, 2009). Auch in Diagnose- und Fördersituationen mit Schülerinnen und Schülern mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen (kurz: Rechenschwierigkeiten) sollten mögliche Schwierigkeiten beim „Verbalisieren ihrer Vorstellungen, Lösungswege und Gedanken" (Gaidoschik et al., 2021, S. 12) keinen Anlass darstellen, um „auf das Kommunizieren oder Argumentieren [in Förder- und Lernsituationen] zu verzichten" (ebd., S. 12). Dabei spielt die Verbalisierung der Lern- und Denkprozesse z. B. in Form des *lauten Denkens* eine wichtige Rolle.

Im Rahmen des Projektes *Diagnose-Sprechstunde bei besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen* (kurz: *Diagnose-Sprechstunde*; siehe Kapitel 3), legen wir unter anderem einen Fokus darauf, die Kompetenzen der Lernenden mit Rechenschwierigkeiten im Bereich des mathematischen Argumentierens in diagnostischen

Knöppel, J. & Pielsticker, F. (2024). Argumentationsprozesse einer Grundschülerin mit Rechenschwierigkeiten – Fallstudie zur Zahlzerlegung mit der App Rechentablett. In C. Bierbrauer, S. Ladel & M. Platz (Hrsg.), *Förderung prozessbezogener Kompetenzen mit digitalen Medien. Mit mathematischen Objekten und Werkzeugen arbeiten. Band 11 der Reihe „Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe"* (S. 26-46). WTM-Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959873246.0

Gesprächen und in Fördereinheiten zu analysieren. Dementsprechend wird im Interaktionsprozess in den Gesprächssituationen zwischen der Interviewerin[1] und der Schülerin oder dem Schüler nach Argumenten[2] zu ihren bzw. seinen Lösungen und Lösungswegen gefragt (siehe Kapitel 3.1).

In diesem Beitrag gehen wir der übergeordneten Forschungsfrage nach, inwiefern Argumentationsprozesse im Kontext der App *Rechentablett* (Urff, 2017) bei einer Grundschülerin mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen angeregt werden können. Daraus lässt sich folgende konkrete Forschungsfrage ableiten:

‚Welche Argumente formuliert die beobachtete Grundschülerin für ihre Vermutungen über Zahlzerlegungen, die sie im Kontext der App Rechentablett aufstellt und welche Argumentationshilfen verwendet sie dabei?‘

2 Theoretischer Hintergrund

2.1 Mathematisch Argumentieren

Mit der zweiten mathematischen Grunderfahrung nach Winter (1995), „mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen“ (S. 37) werden unter anderem Fähigkeiten zum Argumentieren für den allgemeinbildenden Mathematikunterricht gefordert (Heymann, 2013). Nach den Bildungsstandards für den Mathematikunterricht der Primarstufe zählt zur prozessbezogenen Kompetenz des Argumentierens, dass Lernende mathematische Aussagen hinterfragen und diese prüfen, „Vermutungen zu mathematischen Zusammenhängen [aufstellen]“, eigene Begründungen formulieren und die Begründungen von Mitschülerinnen und Mitschülern nachvollziehen können (KMK, 2022, S. 10). Im Kernlehrplan für das Fach Mathematik in der Grundschule in Nordrhein-Westfalen (NRW) wird die Kompetenz des Argumentierens – ‚Vermuten, Begründen, Überprüfen‘ wie folgt definiert:

> Die Schülerinnen und Schüler stellen begründet Vermutungen über mathematische Zusammenhänge unterschiedlicher Komplexität an und erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten (sprachlich, handelnd, zeichnerisch). Sie hinterfragen Vermutungen, Aussagen oder Begründungen. (Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2021, S. 78)

„Dass genau dies [mathematische Argumentationen entwickeln (z. B. Vermutungen und Begründungen formulieren)] […] ein bedeutendes Ziel von Mathematikunterricht sein sollte, scheint aus normativer Sicht weitgehend Konsens zu sein“ (Jahnke & Ufer, 2015, S. 349). „So ist das Argumentieren ein Bestandteil eines adäquaten Bildes von Mathematik […]“ (Bersch, 2023, S. 6) – darüber besteht Einigkeit.

[1] Die in diesem Beitrag aufgeführten Interviews werden von der Erstautorin geführt.

[2] Dieser Begriff wird im theoretischen Hintergrund spezifiziert.

Für den Begriff ‚Argumentation' zeichnet sich in der mathematikdidaktischen Literatur ein vielfältiges Bild ab, denn in „mathematics education there is no shared definition for argumentation, even if this is one of the most recurrent activities in the class" (Pedemonte, 2007, S. 26). Krummheuer (1991) versteht Argumentieren aus der Interaktionstheorie heraus als Kommunikation im Unterricht, bei der kooperativ gehandelt wird (Aushandlungsprozesse). Bruder und Pinkernell (2011) geben mit dem Folgenden einen recht offenen Zugang zu einem (mathematischen) Argumentieren, wenn sie festhalten, dass es sich um „[…] jegliche Aktivitäten des Suchens, Auswählens, Verwendens und des Beurteilens von Argumenten und deren Verknüpfungen in vielfältigen inner- und außermathematischen Zusammenhängen" (Bruder & Pinkernell, 2011, S. 2) handelt. Nach Meyer (2007) und Schwarzkopf (2000) kann Argumentation als Prozess verstanden werden. Schwarzkopf (2000) hält fest:

> Der im Unterricht stattfindende soziale Prozess, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch diesen Begründungsbedarf zu befriedigen, wird als Argumentation bezeichnet. Die in diesem Prozess hervorgebrachten Begründungsangebote werden mathematikspezifisch als Argumente analysiert. (S. 240)

Weiterhin scheint es sich im Mathematikunterricht „um eine spezielle Form, ein ‚mathematisches' Argumentieren zu handeln. Diese Sicht auf Art und Funktion des Argumentierens unterscheidet sich jedoch grundlegend von denen in anderen wissenschaftlichen Disziplinen" (Schmidt-Thieme, 2006, S. 78). Wird Argumentieren im Mathematikunterricht auf eine alltägliche Praxis erweitert, scheinen neben einer logischen auch eine semantische und pragmatische Form nötig (Lueken, 2000). Lueken (2000) unterscheidet in „Paradigmen einer Philosophie des Argumentierens" drei unterschiedliche Grundsätze: Erstens logische Folgerungen, zweitens geregelte Entscheidungsverfahren anstelle logisch-formaler Schlussweisen, z. B. bei der Rechtsprechung und drittens offene Dialoge als Argumentieren in realer Lebenspraxis. Schmidt-Thieme gibt weitere „Denkanstöße zu einer Neuinterpretation von Formen und Funktionen des Argumentierens im Mathematikunterricht" (Schmidt-Thieme, 2006, S. 79). Darunter, ein „unmathematisches/offenes Argumentieren" (ebd., 2006, S. 80).

> Unmathematisches/offenes Argumentieren als verständigungsorientiertes Handeln steht für einen dialogischen Forschungsprozess. […] Somit hat diese Form des Argumentierens sicherlich einen Nutzen über den Mathematikunterricht hinaus als authentisches Beispiel für im Deutschunterricht erarbeitete Muster. (Schmidt-Thieme, 2006, S. 81)

Nicht nur im Mathematikunterricht, sondern auch im Kontext von (individuellen) Lern- und Fördereinheiten sollen Lehrkräfte die Lernenden „zum inhaltsbezogenen Kommunizieren und Argumentieren über ihr mathematisches Tun [anregen]" (Gaidoschik et al., 2021, S. 12). Im Sinne des Kernlehrplans für NRW kann der Prozess neben einer sprachlichen Ebene, auch eine handelnde bzw. zeichnerische Ebene annehmen. Um die sprachlichen Äußerungen, Handlungen sowie deren Verknüpfungen als Argumente einer Grundschülerin mit Rechenschwierigkeiten zu beschreiben, verwenden wir im Rahmen dieses Beitrages das Konzept der subjektiven Erfahrungsbereiche nach Bauersfeld (1983).

2.2 Das Konzept der subjektiven Erfahrungsbereiche

Zu Beginn seiner Ausführungen beschreibt Bauersfeld (1983), dass Lernende sich im Mathematikunterricht häufig so verhalten, „als seien ihr verfügbares Wissen, ihre Handlungsmöglichkeiten, ihr Sprachverstehen, ihre Sinnzuschreibungen usw. in getrennte Bereiche gegliedert, zwischen denen es keinen selbstverständlichen Austausch gibt“ (S. 1). Diese voneinander getrennten Bereiche werden als subjektive Erfahrungsbereiche (kurz: SEB) bezeichnet. Im Sinne dieses Konzeptes ist die Bereichsspezifität und die Kontextgebundenheit von Wissen eine bedeutende Eigenschaft des Lernens von Schülerinnen und Schülern (Bauersfeld, 1983, S. 2; Rathgeb-Schnierer et al., 2023, S. 38). Wissen, so wie z. B. Handlungsmöglichkeiten, werden in spezifischen Kontexten erworben und lassen sich nicht automatisch auf neue Kontexte und Situationen übertragen. Lernen wird in diesem Sinne als der Erwerb neuer SEB interpretiert (Bauersfeld, 1983; Rathgeb-Schnierer et al., 2023, S. 40). Dabei kann ein neuer SEB auch durch die Verknüpfung von Perspektiven bereits bestehender SEB entstehen (Bauersfeld, 1985, S. 15).

Für den Mathematikunterricht bedeutet dies z. B., dass jedes Darstellungs- und Arbeitsmittel zunächst einen eigenen SEB eröffnet, welcher nicht notwendigerweise unmittelbar mit bereits erworbenen Kenntnissen über Strukturen und mathematische Symbole in Verbindung gebracht werden kann (Bauersfeld, 1985, S. 15; Rathgeb-Schnierer et al., 2023, S. 40). Eine Verbindung, ein Vergleich oder „ein In-Beziehung-Setzen“ (Bauersfeld, 1983, S. 7) der spezifischen Elemente eines SEBs (z. B. Sprache, Handlungsmuster und Logik) lässt sich erst über einen „dritten Bereich“ (ebd., S. 7), in diesem Fall einen neu gebildeten SEB, realisieren. Für die Bezeichnung eines in diesem Sinne „neu konstruierten SEB“ (Stoffels, 2020, S. 98) verwenden wir den Begriff des „übergeordneten SEB“ (Bauersfeld, 1985, S. 19). Dieser Konstruktionsprozess erfordert „eigene konstruktive Tätigkeiten“ (Bauersfeld, 1983, S. 7) durch die Lernenden. Dazu spielt u. a. die *Sprache*, bzw. die *Versprachlichung* des Prozesses eine wichtige Rolle. Im Kontext von individuellen Diagnose- und Fördereinheiten erfolgt dies in sozialer Interaktion mit einer Lehrkraft (in unserem Fall einer Interviewerin), die die Lernenden zur Versprachlichung ihrer Denk- und Lösungswege anregt (Gaidoschik et al., 2021, S. 12).

Um Argumentationsprozesse von Lernenden zu beschreiben, spielt im Sinne des Konzeptes der SEB die Beschreibung des Erfahrungskontextes, in dem diese agieren, eine wichtige Rolle. Dazu zählt die Beschreibung der entsprechend verwendeten „Begriffe, Objekte und Handlungen“ (Pielsticker, 2020, S. 98). In diesem Beitrag verwenden wir den Begriff des *empirischen Objektes*. Dazu zählen „Gegenstände und Objekte der Realität […], die für Schülerinnen und Schüler unmittelbar, insbesondere taktil oder visuell zugänglich sind“ (ebd., S. 40), wie z. B. analoge sowie auch digitale Arbeits- und Darstellungsmittel. Situationen, in denen empirische Objekte eine zentrale Rolle spielen, bezeichnen wir im Folgenden als „Sachsituationen“ (ebd., S. 91). Auch im Sinne des Kernlehrplanes für das Fach Mathematik in NRW