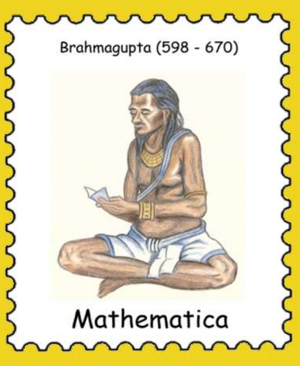
ERICH CH. WITTMANN

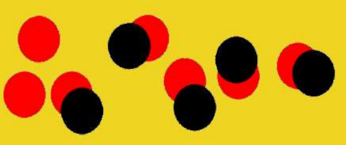
Mathe 2000



Brahmagupta
(598 – 670)

Michael Stifel
(1548–1620)

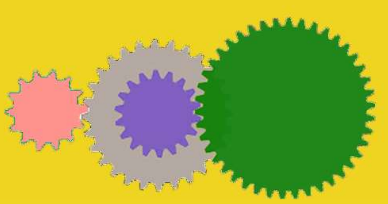
Hans Freudenthal
(1905 – 1990)



$5 + (-7) = -2$
$(-7) + 5 = -2$
$-2 - 5 = -7$
$-2 - (-7) = 5$

$U = R \cdot I$
$U = I \cdot R$
$U : R = I$
$U : I = R$

$10^5 \cdot 10^{-7} = 10^{-2}$
$10^{-7} \cdot 10^5 = 10^{-2}$
$10^{-2} : 10^5 = 10^{-7}$
$10^{-2} : 10^{-7} = 10^5$



$$\frac{28}{14} \cdot \frac{42}{18} = \frac{2}{1} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

Mathematik fachlich-aufbauend und schülerorientiert unterrichten

Ein Handbuch für die Sekundarstufe

Band II: Vom Rechenunterricht der Grundschule
zu den ganzen Zahlen und den Brüchen
mit einer Einführung in die elementare Algebra

ERICH CH. WITTMANN

Mathematik fachlich-aufbauend und schülerorientiert unterrichten

Ein Handbuch für die Sekundarstufe

Band II: Vom Rechenunterricht der Grundschule zu den ganzen Zahlen und zu den Brüchen mit einer Einführung in die elementare Algebra

In memoriam Heinrich Winter

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnb.de abrufbar.

Druck durch / Printed by
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.winterwork.de

Umschlaggestaltung: 4H digital (https://4h-digital.de/)

Münster 2024 – E-Book
ISBN 978-3-95987-282-9
https://doi.org/10.37626/GA9783959872829.0

Bildnachweise Band 2

Cover
Brahmagupta: Mit freundlicher Erlaubnis von Andreas Strick
Michael Stifel: Mit freundlicher Erlaubnis des Adam Ries-Museum Annaberg-Buchholz
Portrait Hans Freudenthal: Mit freundlicher Erlaubnis von Dr. Miriam Freudenthal
Zahnradgetriebe: Mit freundlicher Erlaubnis von Andreas Hoefler

Kap. III
Abb. 1: Mit freundlicher Erlaubnis von Wolfgang Donath, Verein für Heimatgeschichte und Denkmalpflege Annaburg
Abb. 2: Sächsische Landes- und Universitätsbibliothek, Digitale Sammlungen
S. 67: Portrait Hermann Hankel: Wikipedia (gemeinfrei)

Kap. IV
Abb. 27, 28: Mit freundlicher Erlaubnis von Andreas Hoefler

Download der Arbeitsblätter
https://www.wtm-verlag.de/download-ECHW2024BD2/Arbeitsblaetter.pdf

Hinweise und Empfehlungen zur Nutzung des Bandes 2

1. Im Band 1 wurde an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass der Lehrberuf aus gutem Grund Ähnlichkeit mit dem Bergführerberuf hat: Beide Gruppen führen Klienten, die ihnen anvertraut sind bzw. sich ihnen anvertrauen, durch eine mathematische Lernumgebung bzw. durch ein gebirgiges Gelände mit dem Ziel, die geistigen bzw. körperlichen Kräfte ihrer Klienten zu stärken und deren Horizont zu erweitern.
Ein wichtiger Unterschied besteht allerdings: Zu einer Bergtour meldet man sich in aller Regel *freiwillig* an. Lehrerinnen und Lehrer haben hingegen oft auch Schülerinnen und Schüler vor sich, die sich *unfreiwillig* auf "mathematische Touren" begeben, insbesondere wenn sie schlechte Erfahrungen mit dem Fach gemacht haben und Lücken mitbringen.
Im Vorwort von Band 1 wurde folgender Satz zitiert, den der Lernpsychologe David Ausubel einem Buch vorausgestellt hat:

> *Wenn ich die Lernpsychologie auf einen Satz reduzieren müsste, würde ich sagen:*
> *Ermittle die Vorkenntnisse der Lernenden und richte deinen Unterricht danach aus.*

In diesem Sinn wird in beiden Bänden professionelles Wissen nicht nur darüber vermittelt, wie man Vorkenntnisse nutzt, sondern auch darüber, wo man ansetzen muss, um Lücken gezielt aufzuarbeiten. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Blitzrechenkurs, der den Leserinnen und Lesern besonders ans Herz gelegt sei.

2. Vom Bergwandern weiß man, dass es ein Unterschied ist, ob eine Bergführerin oder ein Bergführer selbst Freude an der Landschaft hat, durch die sie oder er Wanderer führt, oder dies nur pflichtgemäß tut. Genauso spüren es die Schülerinnen und Schüler, ob eine Lehrperson eine aktive Beziehung zu ihrem Fach hat und echt daran interessiert ist, ihnen die Mathematik auf ihre jeweiligen Voraussetzungen zugeschnitten zu erschließen.
Der aktive Zugang zur Mathematik wird dadurch unterstützt, dass jedes Kapitel mit einer Aufgabe zum spielerischen "Forschen und Finden" endet. Einige der Aufgaben sind zum Teil auch für mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler zugänglich.

3. Der Name "Mathematik" ist vom griechischen Wort μαθαίνω (matheino) abgeleitet, das "Lernen" bedeutet. Für die Griechen war die in diesem Fach dominierende Ordnung offenbar ein Musterbeispiel dafür, wie man sich einen neuen Lernstoff aneignet. Den Leserinnen und Lesern wird empfohlen, bewusst darauf zu achten, wie in diesem Buch mathematische Strukturen als Lernhilfen genutzt werden.

4. Die Erfolgschancen für Schülerinnen und Schüler, die sich mit der Mathematik schwertun, werden dadurch vergrößert, dass die Lernumgebungen in diesen beiden Bänden eine *natürliche Differenzierung vom Fach aus* ermöglichen, ohne dass seitens der Lehrperson spezielle Maßnahmen zur Differenzierung getroffen werden müssen. Gleichzeitig erhalten dadurch auch Schülerinnen und Schüler, die mathematisch besonders interessiert sind, Möglichkeiten ihre Fähigkeiten zu entfalten. Bei der Durcharbeitung der beiden Bände sollte bewusst auf diese Besonderheit des Ansatzes geachtet werden.

5. Die Wurzeln der Arithmetik und Algebra liegen, wie in den verschiedenen Kapiteln erklärt wird, im chinesischen, indischen und arabischen Kulturkreis. Das muss im Unterricht zur Motivation von Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund genutzt werden.

Vorwort

Two roads diverged in a wood, and I —
I took the one less traveled by,
And that has made all the difference.
Robert Frost, The road not taken

Erklärtes Ziel der beiden Bände dieses Werkes ist es aufzuzeigen, wie man den Mathematikunterricht der Sekundarstufe an die Vorkenntnisse der Schüler aus der Grundschule *nahtlos* anschließen und gleichzeitig Vorwissen für den späteren Unterricht schaffen kann.

Im Band 1 dieses *Handbuchs S* wurde in diesem Sinn gezeigt, wie sich ausgehend von der Stellenwerttafel und den schriftlichen Rechenverfahren das Rechnen mit *Dezimalzahlen* und die *Prozentrechnung* schlüssig entwickeln lassen (*algorithmischer Strang* des Rechenunterrichts). Im vorliegenden Band 2 wird jetzt analog an das halbschriftliche Rechnen in der Grundschule angeknüpft, um die natürlichen Zahlen zu den *ganzen und rationalen Zahlen* zu erweitern und die *elementare Algebra* zu begründen *(algebraischer Strang*).

Eine Schlüsselrolle spielt in diesem Konzept einer *"neuen Stoffdidaktik"* der Begriff des *operativen Beweises.* Beweise gelten zurecht als "Herz der Mathematik" (Günter Ziegler). Ein Mathematikunterricht ohne Beweise ist also "herzlos". Gute Beweise erklären, *warum* ein bestimmter Satz gilt oder ein bestimmtes Verfahren funktioniert. Für einen auf Verständnis ausgerichteten Unterricht sind Beweise daher *unverzichtbar.*
In der Vergangenheit war das Thema "Beweisen" dadurch belastet, dass man sich zu sehr an den formalen Beweisen der höheren Mathematik orientiert hat, was verständlicher Weise über die Köpfe der großen Mehrheit der Schülerinnen und Schüler hinwegging. Die Elimination solcher Beweise bei den Bildungsreformen der letzten Jahrzehnte war die zwangsläufige Folge. Diese Entwicklung wurde zusätzlich dadurch verstärkt, dass bei diesen Reformen der Fokus auf "Anwendungen" gelegt wurde, in denen Beweise naturgemäß nicht vorkommen.

Es ist bezeichnend für das Niveau der heutigen bildungspolitische Diskussion, dass dieser für den Bildungswert der Mathematik zentrale Punkt kaum wahrgenommen und thematisiert wird. Hier gilt es radikal umzudenken.[1] Die Geschichte der Mathematik zeigt, dass formale Beweise das Ergebnis einer langen Entwicklung sind. Euklid, der um 300 v.Ch. die erste systematisch-deduktive Darstellung der Mathematik vorgelegt und damit zeitlose Maßstäbe gesetzt hat, konnte sich auf reichhaltige mathematische Erkenntnisse stützen, die *vor ihm* mit anderen Beweismitteln begründet worden waren. Die Pythagoreer z.B. gewannen im 6. Jhdt. v. Ch. Erkenntnisse durch das Operieren mit "Steinchen". Diese Beweise sind Prototypen für eine Beweisform, die ich als "operativ" bezeichnet habe[2]. Bei operativen Beweisen spielen, wie die Bezeichnung verdeutlicht, Operationen an inhaltlich dargestellten und mit Bedeutung gefüllten "Objekten" die wesentliche Rolle. Aus den "Wirkungen" der Operationen auf Eigen-

---

[1] s. den Artikel "Was ist in der deutschen Bildungspolitik seit 50 Jahren im Bereich MINT falsch gelaufen und wie kann das korrigiert werden? Eine kritische Analyse". (https://www.mathe2000.de/sites/default/files/bildungspolitik-mint.pdf).

[2] Wittmann, E.Ch. (2014): Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. mathematica didactica 37, H. 2, 213 - 232. Vgl. auch Dörfler, W. (2006): Diagramme und Mathematikunterricht. JDM 27, 200-219

schaften und Beziehungen der Objekte ergeben sich beweiskräftige Folgerungen. Der große Vorteil ist, dass dabei auf das Vorverständnis der Schüler zurückgegriffen werden kann.

Operative Beweise durchziehen bereits das *Handbuch G* [3] für die Grundschule und den Band 1 dieses *Handbuchs S*. Im Band 2 treten sie jetzt markant in den Vordergrund. Das Kapitel **I** zur Zahlentheorie, in dem operative Beweise flächendeckend benutzt werden, hat daher grundsätzliche Bedeutung über diesen Inhaltsbereich hinaus. Von operativen zu formalen Beweisen ist ein nahtloser Übergang möglich, wie das Kapitel **VII** zur Algebra zeigt.

Bei der Erweiterung der natürlichen zu den ganzen Zahlen und Bruchzahlen ist es Standard, die Begriffsbildung und die Begründung der Rechenregeln auf Sachsituationen und Zahldarstellungen zu stützen, bei den ganzen Zahlen auf die Zahlengerade, bei den Bruchzahlen auf Kreis- und Rechteckdiagramme sowie Strecken bzw. Balkendiagramme. Im vorliegenden Band werden die Rechenregeln anders hergeleitet, nämlich mithilfe der Rechengesetze, des Permanenzprinzips und des Gleichheitsprinzips, allerdings nicht "von oben nach unten", sondern "von unten nach oben". Dieser *prä-algebraische Weg,* wie ich ihn nennen möchte, kann beschritten werden, weil die Rechengesetze bereits im *Handbuch G* durchgehend thematisiert und im Band 1 systematisch weiterentwickelt wurden, sodass für diesen Weg eine solide Grundlage vorhanden ist. Die strukturelle Analogie zwischen Addition/Subtraktion einerseits und Multiplikation/Division andererseits wird deutlich herausgestellt, weil damit das Lernen erleichtert wird.

Ich bin fest davon überzeugt, dass der *prä-algebraische Weg* nicht nur zu einem besseren Verständnis von negativen Zahlen und Bruchzahlen führt als die Standardwege, sondern auch zu einem besseren Verständnis von Mathematik überhaupt. Da mathematische Strukturen im Vordergrund stehen, kommt dabei auch die Schönheit dieses Faches zur Geltung.

Die Abschnitte "Mathematische und didaktische Grundlagen" bieten wieder Material für praxisorientierte fachwissenschaftliche Vorlesungen, wobei auf dieser Ebene die operativen Beweise natürlich durch formale Beweise ergänzt werden müssen.

In den beiden Bänden dieses Werkes scheinen bei oberflächlicher Betrachtung Anwendungen nur eine untergeordnete Rolle zu spielen, als wenn ich sie für unwichtig erachten würde. Das Gegenteil ist der Fall. Die Anwendungen werden aber von einem anderen Blickwinkel aus betrachtet: Die elementare Mathematik hat sich historisch in engster Verbindung mit den Naturwissenschaften und der Technik entwickelt und liefert daher ***per se*** die Bausteine für Modellierungen. Die Schüler sind mit einer ***anwendbaren Mathematik***, die von Strukturen zusammengehalten wird, für ihr späteres Berufsfeld, besonders im Bereich MINT, weit besser gerüstet als mit dem Sammelsurium vielfach gekünstelter "Anwendungen", das heute den Unterricht dominiert.
Vom Taschenrechner wird in beiden Bänden Gebrauch gemacht, aber das Kopfrechnen wird bewusst weiter geübt. Das ist auch deshalb nötig, weil sich dabei Zahlbeziehungen einprägen, die für das Verständnis und für Beweise wichtig sind. Ergebnisse, die lediglich auf Knopfdruck mit dem Taschenrechner gewonnen werden, sind in dieser Hinsicht nutzlos.

---

[3] Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Band 2: Halbschriftliches und schriftliches Rechnen. Seelze: Friedrich 2016 bzw. 2017

Es wird höchste Zeit, dass wieder begriffen wird, wie wichtig es für nachhaltiges Lernen ist, elementare Rechenfertigkeiten von der Grundschule an **fortgesetzt z**u üben. Bereits das *Handbuch G* durchzieht ein systematischer Blitzrechenkurs, der im Band 1 des *Handbuchs S* mit „Blitzrechen **D**“ für Dezimalzahlen fortgesetzt wird. Im Band 2 wird der Kurs erweitert zu "Blitzrechnen **B**" für Dezimal**b**rüche und gemeine **B**rüche.

In den 1990er Jahren hat die erste Fassung des *Handbuchs G* nicht nur Fachkolleginnen und Fachkollegen, sondern vor allem auch zahlreiche Lehrerinnen und Lehrer angeregt, sich mit neuen Ideen zu befassen und sie im Unterricht auszuprobieren. Die Erfahrungen waren so gut, dass *aus der Praxis heraus* der starke Wunsch nach einem entsprechenden Unterrichtswerk geäußert wurde. Damals bildete der "Winter-Lehrplan" für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen, dem die Lehrpläne in anderen Bundesländern folgten, den Nährboden für das Unterrichtswerk DAS ZAHLENBUCH. Auf eine solche Entwicklung kann man in der Sekundarstufe I freilich erst hoffen, wenn in der Lehrplanentwicklung wieder Inhalte in den Vordergrund gerückt werden, was dringend nötig ist, um den momentanen Abwärtstrend zu stoppen und umzukehren. Überschaubare Unterrichtsversuche mit einzelnen Themen sind aber auch unter den heutigen Verhältnissen möglich. Ich hoffe daher, dass sich Lehrerinnen und Lehrer von den Bänden 1 und 2 anregen lassen und z.B. die negativen Zahlen und die Bruchzahlen auf dem prä-algebraischen Weg und das Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen aus dem *Malkreuz* entwickeln. Wenn die Erfahrungen gut sind, woran ich genauso wenig zweifle wie seinerzeit bei den Vorschlägen im *Handbuch G*, könnte das *Handbuch S* einen Anstoß zu besseren bildungspolitischen Rahmenbedingungen geben.

Veränderungen sind nicht nur dringend nötig, um die mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung zu stärken, die Grundlage unserer Wirtschaft ist, sondern auch um den Bildungswert des Faches wieder zur Geltung zu bringen und damit den professionellen Status von Lehrerinnen und Lehrern zu stärken, nicht zuletzt gegenüber den Eltern.

Peter Rasfeld hat bei der Durchsicht der Erstfassung wieder jeden Stein umgedreht, was zu einer wesentlichen Verbesserung des Manuskripts geführt hat. Ihm kann ich nicht genug danken. Zu Dank verpflichtet bin ich auch Lisa Hefendehl-Hebeker, Andreas Filler, Wolfgang Kühnel, Gerhard Rosenberger, Annika Schürenberg und Jochen Ziegenbalg für wertvolle Hinweise zur Ausarbeitung des prä-algebraischen Zugangs zu den ganzen Zahlen, Jochen Ziegenbalg zusätzlich auch für Hinweise zum Kap. **I**. Mein Dank gilt natürlich auch wieder Gerhard Müller für zahlreiche fruchtbare Diskussionen über die Fortsetzbarkeit unseres im *Handbuch G* ausgearbeiteten Konzepts in die Sekundarstufe.

Den Band 2 widme ich in memoriam Hans Freudenthal, der nicht nur die prä-algebraischen Zugänge zu den ganzen Zahlen und den Brüchen in den Kapiteln **III** und **IV** angeregt, sondern viel umfassender den Blick auf die *in der Mathematik selbst liegenden Bildungswerte* gelenkt hat. Ich habe ihm auch für meine eigene Entwicklung sehr viel zu verdanken.

Dortmund, im Frühjahr 2024

Erich Ch. Wittmann
Projekt Mathe 2000
wittmann@math.tu-dortmund.de

Kapitel I Elemente der Zahlentheorie

Kapitel II Übersicht über die Rechengesetze

Kapitel III Der prä-algebraische Zugang zu den ganzen Zahlen

Kapitel IV Der prä-algebraische Zugang zu den Brüchen

Kapitel V Produktive Übungen mit Brüchen

Kapitel I Elemente der Zahlentheorie

Das Unheil, das der Glaube, nur formale Beweise seien strenge Beweise, auf allen Stufen angerichtet hat, ist, glaube ich, ganz unberechenbar.
Benchara Branford, Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität, 1913

Mit der Wiederholung und Vertiefung von Grundkenntnissen aus der Grundschule wird in diesem Kapitel ein Einblick in eine mathematische Theorie gegeben, die für die Entwicklung der Mathematik als Fach grundlegend war: die Zahlentheorie. In den „Elementen“ von Euklid, verfasst um 300 v.Chr., wurde dieses Gebiet zusammen mit der Elementargeometrie erstmals systematisch dargestellt und war über Jahrtausende fester Bestandteil der mathematischen Bildung. Erstaunlicher Weise reichen die Rechenkenntnisse der Grundschule aus, um die Elemente dieser Theorie ein Stück weit zu entwickeln.

Im Mathematikunterricht des Gymnasiums gehörte die Zahlentheorie früher zum eisernen Kern des Unterrichts. Erst im Zuge der „Kompetenzorientierung“ wurde sie in den Lehrplänen stark reduziert oder sogar eliminiert. Man kann nur hoffen, dass es bei einer Neubesinnung zu einer Korrektur dieser gravierenden Fehlentscheidung kommen wird.

Die Zahlentheorie wird heute bei der Datenverarbeitung, der Datensicherheit und der Telekommunikation vielfach angewandt und ist ein Musterbeispiel für die Verzahnung von Struktur- und Anwendungsorientierung. Dieses Gebiet verkörpert also beide Aspekte der Mathematik und ist daher bestens geeignet, um Verständnis für dieses Fach zu wecken.

Die Zeit im Unterricht ist beschränkt. Daher streben wir in diesem Kapitel eine schlanke Behandlung des Themas an, die aber immerhin ausreicht, um den Schülern einen gewissen Eindruck vom Fundamentalsatz der Zahlentheorie und den Werkzeugen zu geben, die für einen operativen Beweis dieses Satzes nötig sind. Die dabei im Mittelpunkt stehenden Begriffe *Vielfache* und *Teiler* sind später für die Bruchrechnung und die Algebra wichtig.

Die Schüler erhalten bei diesem Thema einen ersten *authentischen* Eindruck von einer mathematischen Theorie, in der es „Theoreme“ („Lehrsätze“) gibt, die mathematisch bewiesen werden. Das klingt zunächst einmal sehr anspruchsvoll. Da aber alle Überlegungen durch Rechnungen mit z.T. selbst wählbaren Zahlenbeispielen gestützt werden und auf Kenntnisse der Grundschule zurückgegriffen wird, können *alle* Schüler aktiv an der Erarbeitung der Theorie mitwirken. Die Lernumgebungen dieses Kapitels ermöglichen in idealer Weise eine natürliche Differenzierung, mit der man den unterschiedlichen Vorkenntnissen und Interessen gerecht werden kann. Es bleibt der einzelnen Lehrperson überlassen zu entscheiden, wie weit sie mit ihrer Klasse jeweils gehen kann.

Besonders wichtig auf dem Weg zur Algebra sind *operative Beweise*, die in diesem Kapitel ausführlich thematisiert werden. Wie im Vorwort (S. 5) erklärt wurde, sind sie auf dieser Stufe die angemessene Beweisform.

1. Mathematische und didaktische Grundlagen

Dieser Abschnitt ist relativ lang, da es auch um grundsätzliche mathematische Fragen über die Zahlentheorie hinaus geht. Ein operativer Beweis des Fundmentalsatzes der Zahlentheorie ist eingeschlossen.

1.1 Grundbegriffe

Bei der Division einer natürlichen Zahl durch eine natürliche Zahl treten zwei Fälle auf: *entweder* die Division „geht auf“ *oder* es bleibt ein Rest.
Diese beiden Fälle führen zu zwei grundlegenden Begriffen.

Bei einer *„aufgehenden“* Division $a : b = c$ mit natürlichen Zahlen a, b, c bildet diese Aufgabe zusammen mit den Aufgaben $a = c \cdot b$, $a = b \cdot c$ und $a : c = b$ ein *Punktrechenquartett.* Das Ergebnis jeder Aufgabe bestimmt die Ergebnisse der anderen Aufgaben.
b und c heißen *Teiler* von a, und a heißt *Vielfaches* von b und von c.

Wenn eine Division $a : b$ *„nicht aufgeht“,* sich also $a : b = c$ Rest d mit einem Rest $d \neq 0$ ergibt, ist die Division mit der Multiplikation durch die Beziehung $a = b \cdot c + d$ verbunden. Inhaltlich bedeutet dies, dass zwischen zwei Vielfachen von b Zahlen liegen, die bei der Division durch b die Reste $1, 2, \ldots, b - 1$ liefern.

Mit einem Rest verbindet man im täglichen Leben in der Regel oft etwas, das wertlos ist und weggeworfen wird. In der Zahlentheorie ist das anders. Das Rechnen mit Resten hat eine große Bedeutung und bildet die Vorstufe algebraischer Strukturen, die weit über die natürlichen Zahlen hinausreichen.
Zwei Zahlen, die bei der Division durch b den gleichen *Rest* ergeben, nennt man *„kongruent modulo b“.* Der junge Gauß hat mit diesem Begriff bahnbrechende Sätze bewiesen, u.A. dass sich jede natürliche Zahl als Summe von höchstens drei Dreieckszahlen darstellen lässt.

Bereits in der Grundschule erfahren die Kinder, dass es Zahlen gibt, die in mehreren Einmaleinsreihen, *die Einerreihe ausgenommen* (!), auftreten, und Zahlen, die nur in einer einzigen Reihe vorkommen. Beispiele für den ersten Typ sind 4 (Zweierreihe und Viererreihe), 6 (Zweier-, Dreier- und Sechserreihe), 9 (Dreier- und Neunerreihe). Beispiele für den zweiten Typ sind 3 (nur in Dreierreihe vertreten), 5 (nur in Fünferreihe), 7 (nur in Siebenerreihe).

Die Zahlen des ersten Typs lassen sich als *Vielfache kleinerer Zahlen* darstellen, sie sind m.a.W. *zerlegbar* in ein Produkt zweier *kleinerer* Zahlen. Bei den Zahlen des zweiten Typs ist das nicht der Fall: Sie sind *Primzahlen.*

Ein wichtiger Punkt darf hier nicht übersehen werden: Auch die Zahl 1 lässt sich nicht in ein Produkt zweier kleinerer Zahlen zerlegen. Trotzdem wird sie *nicht* zu den Primzahlen gerechnet, und die Einerreihe wurde aus diesem Grund oben ausgeschlossen.

Die Griechen lösten dieses Problem auf ihre Weise. Für sie war die 1 die Einheit und keine Zahl. Zu den Zahlen rechneten sie nur Zahlen, die aus der Einheit zusammengesetzt sind.
Der entscheidende *mathematische* Grund, warum die 1 nicht als Primzahl betrachtet wird, liegt darin, dass die 1 die eindeutige Primfaktorzerlegung stören würde.

In der Schule kann man die 1 als Primzahl mit dem Argument ausschließen, dass die Unmöglichkeit einer Zerlegung in ein Produkt kleinerer Zahlen für die Zahl 1 nichts Besonders ist, bei Zahlen > 1 aber schon.
Eine gute Definition des Begriffs Primzahl ist also: Eine Zahl > 1 heißt *Primzahl,* wenn sie sich nicht in ein Produkt kleinerer Zahlen zerlegen lässt.

Dass die Darstellung jeder Zahl > 1 als Produkt von Primzahlen bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist, ist für die Zahlentheorie grundlegend und heißt zurecht *Fundamentalsatz der Zahlentheorie (oder der Arithmetik).*

Wenn man die Primfaktoren der Größe nach ordnet, erhält man eine eindeutige Darstellung.
Beispiel: $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Eine Zahl, die in den Vielfachenreihen *zweier* Zahlen vorkommt, heißt *gemeinsames Vielfaches* (gV) dieser beiden Zahlen. Eine Zahl, die Teiler zweier Zahlen ist, heißt *gemeinsamer Teiler* (gT) der beiden Zahlen.
Als Teiler wird 1 nicht ausgeschlossen. 1 ist daher Teiler jeder Zahl.

Unter den gemeinsamen Vielfachen zweier Zahlen *a, b* gibt es eine kleinste Zahl, *das kleinste gemeinsame Vielfache*, bezeichnet mit kgV(*a, b*). Unter den gemeinsamen Teilern von *a* und *b* gibt es eine größte Zahl, *den größten gemeinsamen Teiler*, bezeichnet mit ggT(*a, b*).

Mit Punktfeldern operativ zu beweisen sind folgende Sätze (s. weiter unten Abschnitt 1.2):
- *Jedes gemeinsame Vielfache zweier Zahlen a, b ist Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der beiden Zahlen.*
- *Das Produkt des ggT und des kgV zweier Zahlen ist das Produkt der beiden Zahlen.*

Der Beweis des Fundamentalsatzes stellt höhere Anforderungen, aber auch er kann mit Punktfeldern operativ bewiesen werden (s. weiter unten). Der Satz vom kgV spielt dabei die entscheidende Rolle. Leistungsstarke Schüler können den Beweis verstehen.

Zur Bestimmung des ggT(*a,b*) hat Euklid ein Verfahren beschrieben, das als *Euklidischer Algorithmus* bezeichnet wird. Im Band 1, Kap. **I**.2.2.4 wurde es bereits angetippt.
In seiner ausführlichen Fassung erscheint der Algorithmus wegen seiner Komplexität für die Unterstufe zu schwierig. Für den ersten Durchgang durch die Zahlentheorie reicht die Vorform aus Band 1 jedoch aus. Wenig Aufwand erfordert die direkte Bestimmung des ggT aus den Teilermengen, der ein eigener Abschnitt gewidmet wird.

1.2 Operative Beweise mit Punktfeldern

In den Lehrbüchern der Zahlentheorie werden die in Abschnitt 1 genannten Sätze mithilfe der Algebra formal bewiesen. Am Beginn der weiterführenden Schulen stehen diese formalen Mittel nicht zur Verfügung. Daraus wird leider vielfach der Schluss gezogen, dass man im Unterricht auf Beweise verzichten oder sich mit Plausibilitätsargumenten begnügen müsse. Das Konzept des operativen Beweises eröffnet, wie schon in Band 1 beschrieben, einen anderen Weg: An die Stelle formaler Operationen an symbolischen Darstellungen von Zahlen treten Operationen an anschaulichen Darstellungen von Zahlen, welche die „Bauart“ (Struktur) der jeweils benutzten Zahlen verdeutlichen.

Diese operativen Beweise haben volle Beweiskraft, da ersichtlich ist, dass die Operationen bei allen Zahlen dieser Bauart ausführbar sind.

Punktfelder sind die bedeutungsvollste Darstellung von *Produkten* natürlicher Zahlen und können im Unterricht von der Grundschule an durchgehend herangezogen werden. Wenn die Faktoren größer werden, beschreibt man Punktfelder schematisch durch Rechtecke, die als Umrandungen von Punktfeldern gedeutet werden, behält aber die Bezeichnung „Punktfeld" bei (Band 1, Kap. **I**.1.2).

Aus Band 1, Kap. **I**.2.2.3 ist bereits bekannt, dass die Summe und die Differenz zweier Vielfachen einer Zahl wieder Vielfache dieser Zahl sind. In Abb. 1 wird daran erinnert, wie diese Beziehung mit Hilfe von Punktfeldern begründet werden kann. Stellvertretend für beliebige Zahlen werden aus den Punktfeldern $38 \cdot 7$ und $25 \cdot 7$ durch Aneinanderfügen deren Summe $63 \cdot 7$ und durch Wegnahme ihre Differenz $13 \cdot 7$ gebildet.

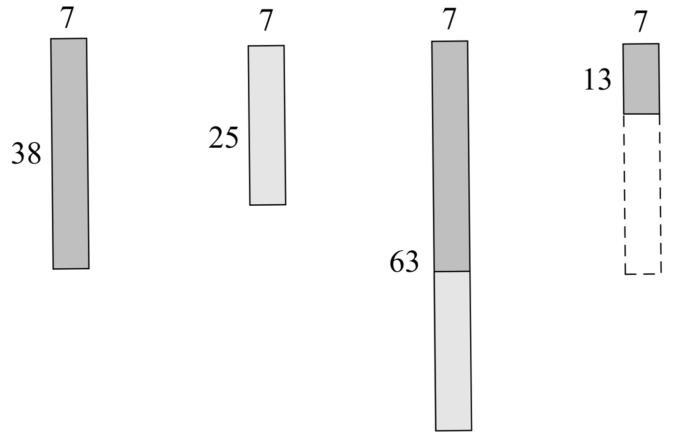


Abb. 1

Der Satz über die gemeinsamen Vielfachen lässt sich mit Punktfeldern wie folgt beweisen:
Die *Vielfachenreihe* einer Zahl n entsteht, wenn man n Plättchen (Punkte) in eine Reihe legt, darunter fortlaufend weitere Zeilen mit n Punkten anordnet.

Wenn man das Punktfeld nicht Zeile für Zeile legt, sondern jede Zeile Plättchen für Plättchen (Punkt für Punkt) aufbaut, wird die Bildung von Vielfachen mit der Zahlenreihe verbunden. An jeder gelegten Zahl kann man ablesen, welcher Rest bei der Division dieser Zahl durch n entsteht. Immer wenn eine Zeile voll ist, entsteht das nächste Vielfache.

Abb. 2 zeigt eine Momentaufnahme des Legeprozesses für die Zahl 6 bis zu $23 = 3 \cdot 6 + 5$. Man liest $23 : 6 = 3$, Rest 5 ab. Tritt ein weiterer Punkt hinzu, wird eine Zeile voll und man erhält die Zahl 24 als das 4-fache von 6.
Für die weiteren Zahlen ergibt sich $4 \cdot 6 + 1$ (25), $4 \cdot 6 + 2$ (26), $4 \cdot 6 + 3$ (27), $4 \cdot 6 + 4$ (28), $4 \cdot 6 + 5$ (29) und mit $5 \cdot 6$ (30) das nächste Vielfache von 6.
In dieser Weise geht es unendlich weiter.
Immer wenn eine Zeile gefüllt wird, erhält man das nächste Vielfache von 6.

Abb. 3 zeigt eine Momentaufnahme für die Zahl 4 zu dem Zeitpunkt, an dem Zahlenreihe bis 15 durchlaufen ist. Man liest $15 = 3 \cdot 4 + 3$ ab. Mit einem weiteren Plättchen würde die Zeile gefüllt, und man erhielte das nächste Vielfache $4 \cdot 4$.

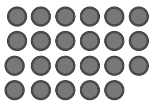


Abb. 2

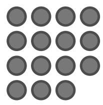


Abb. 3

Abb. 4

Dieser Legeprozess kann bei kleinen Zahlen ein Stück weit durchgeführt werden. Bei beliebig großen Zahlen muss man sich den Prozess gedanklich vorstellen.

Interessant wird es, wenn man den Legeprozess für *zwei verschiedene* Zahlen Plättchen für Plättchen (Punkt für Punkt) ***simultan*** durchführt, d.h. bei beiden Feldern *zeitgleich* Plättchen für Plättchen (Punkt für Punkt) hinzufügt.

Abb. 4 zeigt eine Momentaufnahme für die Zahlen 6 und 8 zu dem Zeitpunkt, bei dem in beiden Feldern *erstmals* Zeilen *gleichzeitig* voll werden. Bei dem Feld für 6 wurden vorher Zeilen bei 6, 12, 18 voll, bei dem Feld für 8 vorher Zeilen bei 8, 16. Die Zahl 24 ist die *erste Zahl*, bei der Zeilen ***gleichzeitig*** voll werden. 24 ist daher das *kleinste gemeinsame Vielfache* (kgV) von 6 und 8. Es gilt $4 \cdot 6 = 24$ und $3 \cdot 8 = 24$. Das kgV(6, 8) = 24 erscheint als Punktfeld also in zweierlei Gestalt, einmal als Vielfaches von 6, das andere Mal als Vielfaches von 8.

Nach dem kgV beginnt mit der Zahl 25 sowohl in der Reihe für 6 als auch in der Reihe für 8 eine neue Zeile und der Legeprozess wiederholt sich wie am Anfang von 1 aus. Es braucht wieder 4 Zeilen mit je 6 Punkten und 3 Zeilen mit je 8 Punkten, bis sich das *nächste* gemeinsame Vielfache ergibt, usw. Das *zweite* gemeinsame Vielfache von 6 und 8 ist also *das Doppelte* des kgV von 24, also $2 \cdot 24 = 48$. Das *dritte gemeinsame* Vielfache der beiden Zahlen 6 und 8 ist das *Dreifache* des kgV, also $3 \cdot 24 = 72$, das vierte ist das *Vierfache* des kgV, $4 \cdot 24 = 96$. So geht es unendlich weiter. Aus dem Legeprozess folgt unmittelbar:
Alle gemeinsamen Vielfache von 4 *und* 6 *sind Vielfache des kleinsten gemeinsamen Vielfachen* kgV(4, 6) = 24.

In Abb. 5 wird dieser Legeprozess mit den Zahlen 9 und 15 durchgeführt. Man erhält 45 als das kgV(9,15). Danach wiederholt sich der Legeprozess erneut periodisch. Die nächsten gemeinsamen Vielfachen sind $2 \cdot 45 = 90$, $3 \cdot 45 = 135$, $4 \cdot 45 = 180$ usw. Alle gemeinsamen Vielfachen von 9 und 15 sind Vielfache des kgV(9, 15) = 45, das wieder in zweierlei Gestalt erscheint.

Abb. 5

Dieser Legeprozess kann mit *zwei beliebigen Zahlen* durchgeführt werden und verläuft völlig analog. Nach dem ersten gemeinsamen Vielfachen, dem *kleinsten gemeinsamen Vielfachen,* dem kgV der beiden Zahlen, wiederholt sich das Verfahren periodisch und die nächsten gemeinsamen Vielfachen sind immer das Doppelte des kgV, das Dreifache des kgV usw.

Damit ist operativ bewiesen:
Jedes gemeinsame Vielfache zweier Zahlen ist ein Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen kgV *dieser beiden Zahlen.*

Das Produkt zweier Zahlen $a \cdot b = b \cdot a$ lässt sich als Punktfeld mit a Zeilen und b Punkten in jeder Zeile und auch als Punktfeld mit b Zeilen und a Punkten in jeder Zeile darstellen. Es ist also immer ein gemeinsames Vielfaches von a und b und nach dem obigen Satz muss es ein Vielfaches des kgV (a, b) der beiden Zahlen sein.

Das kgV(a, b) erscheint, wie oben schon festgestellt, als Punktfeld in *zweierlei Gestalt*, einmal als Punktfeld $b^* \cdot a$ mit a Punkten in jeder Zeile, zum anderen als Punktfeld $a^* \cdot b$ mit b Punkten in jeder Zeile. Beide Felder haben *gleichviele* Punkte.

Nach dem obigen Vielfachensatz passt das Punktfeld $b^* \cdot a$ *genauso oft* in das Punktfeld $b \cdot a$ wie das Punktfeld $a^* \cdot b$ in das Punktfeld $a \cdot b$.
Abb. 6 zeigt die Situation für die Zahlen 9 und 15 durch schematisch dargestellte Punktfelder:

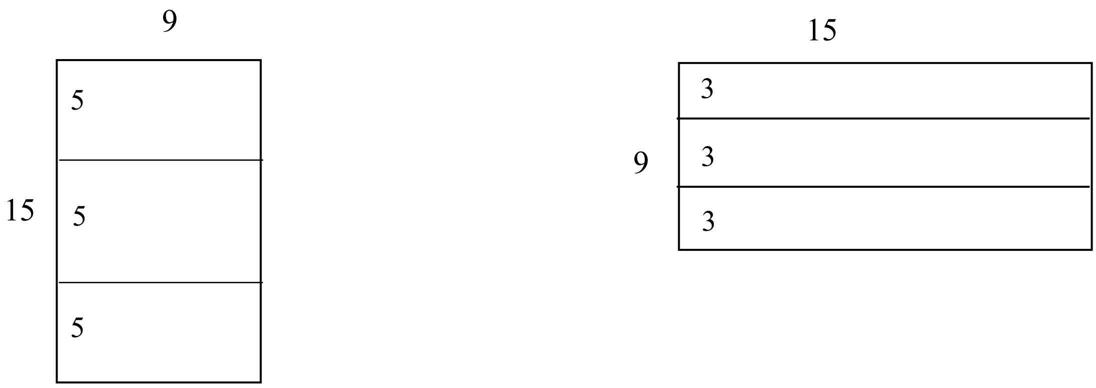


Abb. 6

Das Punktfeld $5 \cdot 9$ (= 45) passt dreimal in das Punktfeld $15 \cdot 9$ und das Punktfeld $3 \cdot 15$ (= 45) *ebenfalls* dreimal in das Punktfeld $9 \cdot 15$, denn die beiden kleinen Felder $5 \cdot 9$ bzw. $3 \cdot 15$ stellen das kgV(9, 15) dar, nur in anderer Gestalt.

Die *flächige* Aufteilung der Punktfelder $15 \cdot 9$ bzw. $9 \cdot 15$ in 3 Teilfelder mit gleichvielen Punkten zieht *lineare* Aufteilungen der Seiten 15 bzw. 9 in ebenfalls 3 Teile nach sich. Es ist also kein Zufall, dass die Zahl 3 gemeinsamer Teiler von 9 *und* von 15 ist. *Diese Beziehung ist von entscheidender Bedeutung für alles Weitere.* Sie hängt nicht von den speziellen Zahlen 9 und 15 ab, denn die *flächige* Aufteilung eines Punktfelds in kleinere Punktfelder, die das kgV (a, b) repräsentieren, zieht *immer* eine Zerlegung der beiden Faktoren a und b in *gleich viele* Teile nach sich. Es gilt allgemein: Die Zahl, die angibt, wie oft das kgV(a,b) in das Produkt $a \cdot b$ passt, ist ein *gemeinsamer Teiler* von a und b.

Abb. 7 zeigt links die Punktfelder $a^* \cdot b$ *und* $b^* \cdot a$ und rechts die Punktfelder $a \cdot b$ und $b \cdot a$. Da $b^* \cdot a = a^* \cdot b =$ kgV(a, b) gilt und $a \cdot b = b \cdot a$ gemeinsames Vielfaches von kgV(a, b) ist, passt $a^* \cdot b$ genauso oft in das Punktfeld $a \cdot b$ wie $b^* \cdot a$ in das Punktfeld $b \cdot a$.

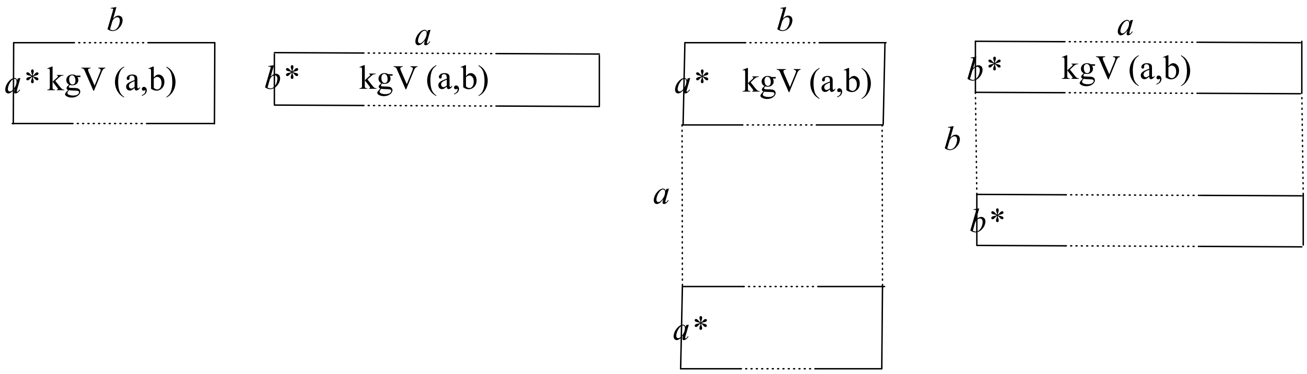


Abb. 7

Die *flächigen* Zerlegungen der Punktfelder $a \cdot b$ und $b \cdot a$ in $\boldsymbol{t}$ kleinere Punktfelder $a^{*} \cdot b$ bzw. b*·a, die beide das kgV*(a,b)* darstellen, bewirken also immer *lineare* Zerlegungen von a in $\boldsymbol{t}$ Teilstücke a^{*} und von b in $\boldsymbol{t}$ Teilstücke b^{*}. Es gilt also $t \cdot a^{*} = a$ und $t \cdot b^{*} = b$ und $t \cdot$ kgV $(a, b) = a \cdot b = b \cdot a$, mit einem an dieser Stelle noch nicht genauer bestimmten gemeinsamen Teiler t von a und b. Später wird sich zeigen, dass dieser Teiler der ggT(a, b) ist.

An dieser Stelle kann eine wichtige Folgerung gezogen werden:
Das kgV (p, q) zweier *verschiedener Primzahlen* p, q ist das Produkt $p \cdot q$.
Beweis: Die beiden Primzahlen haben ja nur den gemeinsamen Teiler 1. Also kann weder die Seite p des Punktfelds $p \cdot q$, noch die Seite q des Punktfelds $q \cdot p$ unterteilt werden. Das Punktfeld für kgV(p, q) füllt daher $p \cdot q$ voll aus. Es gilt damit kgV $(p, q) = p \cdot q$.

Diese einfache Folgerung reicht aus, um den Fundamentalsatz der Zahlentheorie zu beweisen.
Beweis: Im ersten Schritt wird gezeigt, dass in jeder Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl $n > 1$ *jeder Primteiler* der Zahl vorkommen muss.
Wenn es nämlich Zahlen mit einer Primfaktorzerlegung gäbe, in der ein Primfaktor dieser Zahl nicht vorkommt, müsste es auch eine kleinste Zahl u mit dieser Eigenschaft geben.
Diese Zahl u kann keine Primzahl sein, denn eine Primzahl hat keine echten Primteiler außer sich selbst. In jeder Primfaktorzerlegung von u treten also mindestens zwei Primfaktoren auf. Wir spalten in einer Primfaktorzerlegung von u einen Primfaktor p ab, schreiben also u in der Form $u = m \cdot p$ und zeichnen dazu ein (schematisches) Punktfeld (Abb. 8).

Die Zahl m, in der die anderen Faktoren der Zerlegung zusammengefasst sind, ist kleiner als u.

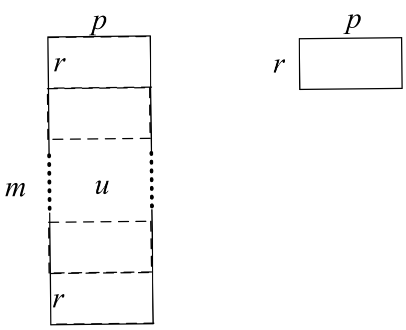


Abb. 8

Nehmen wir nun an, dass es einen Primteiler *r* von *u* gäbe, der in dieser Primfaktorzerlegung von *u* nicht vorkäme. *r* wäre dann von *p* verschieden. Das kgV(*r, p*) der verschiedenen Primzahlen *p* und *r* ist das Produkt $r \cdot p$, das in Abb. 8 ebenfalls als Punktfeld dargestellt ist. Die Zahl $u = m \cdot p$ ist ein *gemeinsames Vielfaches* von *r und p*. Also müsste *u* Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen kgV(*r, p*) = $r \cdot p$ sein. Das Punktfeld $m \cdot p$ müsste sich also vollständig mit kleineren Punktfeldern $r \cdot p$ überdecken lassen. Dies bedeutet, dass *r* Teiler von *m* sein müsste. Die Zahl *m* hätte daher eine Primfaktorzerlegung, in welcher der Primteiler *r* nicht vorkommt. *m* ist aber kleiner als *u.* Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass *u* die kleinste Zahl ist, bei der in einer Primfaktorzerlegung ein Primteiler der Zahl nicht vorkommt.

Es muss jetzt nur noch bewiesen werden, dass es keine Zahl mit zwei verschiedenen Primfaktorzerlegungen gibt, in der zwar die gleichen Primfaktoren auftreten, aber mindestens ein Faktor *p* in einer der beiden Zerlegungen *öfter* vorkommt als in der anderen.
Angenommen es gäbe eine solche Zahl *n.* Dann könnte man beide Primfaktorzerlegungen von *n* sukzessive durch *p* dividieren und würde bei jedem Schritt eine kleinere Zahl mit zwei verschiedenen Primfaktorzerlegungen erhalten. An einer Stelle wäre *p* bei einer der beiden Zerlegungen vollständig herausgekürzt, während er in der anderen Zerlegung noch aufträte. Man hätte dann eine Zahl mit zwei Zerlegungen gefunden, bei der in einer Zerlegung der Primfaktor *p* auftritt, in der anderen nicht. Solche Zahlen gibt es aber nicht, wie oben gezeigt wurde. Damit ist die Annahme widerlegt

Auch der gewichtigste und schönste Satz der Zahlentheorie auf Schulniveau lässt sich mit Punktfeldern operativ beweisen:

$$ggT(a, b) \cdot kgV(a, b) = a \cdot b, \text{ für alle natürlichen Zahlen } a,b.$$

Beweis: Aus den *flächigen* Zerlegungen der Punktfelder $a \cdot b$ und $b \cdot a$ in *t* Punktfelder, die das kgV(*a, b*) repräsentieren, haben wir oben einen gemeinsamen Teiler *t* von *a* und *b* abgeleitet: $t \cdot$ kgV(*a, b*) = $a \cdot b$.

Man kann aber auch umgekehrt verfahren. Wenn *a* und *b* einen gemeinsamen Teiler *s* haben, kann man die Seite *b* des Punktfelds $b \cdot a$ und die Seite *a* des Punktfelds $a \cdot b$ jeweils in *s* Teile zerlegen. Die *linearen* Zerlegungen der Seiten induzieren jetzt umgekehrt *flächige* Zerlegungen der Punktfelder $a \cdot b$ und $b \cdot a$ in *s* Teilfelder, die jeweils gleichviele Punkte haben. Jedes solche Teilfeld stellt daher ein *gemeinsames Vielfaches* gV(*a, b*) dar und es gilt s · gV(*a, b*) = $a \cdot b$.

Zu jedem gemeinsamen Teiler von *a* und *b* gehört also ein gemeinsames Vielfaches von *a* und *b*. Je größer der gemeinsame Teiler *s*, desto kleiner das gemeinsame Vielfache gV(*a*, *b*) dazu, denn das Produkt s · gV(*a, b*) hat ja immer den festen Wert $a \cdot b$. Der gemeinsame Teiler, der zu kgV (*a, b*) gehört, muss notwendig der *größte gemeinsame Teiler* ggT(*a, b*) sein, sonst gäbe es zu dem ggT(*a, b*) ein noch kleineres gemeinsames Vielfaches als kgV*(a,b)*, was nicht möglich ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Abschließend zu den operativen Beweisen dieses Abschnitts weisen wir darauf hin, dass die alten Griechen schon derartige Beweise geführt haben. Anstelle von Plättchen oder Punkten benutzten sie kleine Steine („calculi“). Ihre „Steinchen-Arithmetik“ gilt als Wiege der Zahlentheorie.

Zu den ersten Sätzen, die sie gefunden haben, gehörte die Erkenntnis, dass die Summe zweier gerader oder zweier ungerader Zahlen immer gerade und die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl immer ungerade ist.[1] Wir kommen in Abschnitt 2.1 darauf zurück.

Anmerkung. Die hier geführten operativen Beweise sind keineswegs „unmathematisch", wie Formalisten oft behaupten. Die Operationen an Punktfeldern können leicht auch algebraisch beschrieben werden und benötigen dann nur wenige Zeilen.[2] In einigen Fällen werden wir es auch andeuten. Den meisten Schülern fehlen in der Unterstufe dafür aber die Voraussetzungen dafür. Nicht nur historisch, sondern auch *lernpsychologisch* geht das Operieren an und mit Punktfeldern dem formalen Operieren mit Variablen voraus. Alles zu seiner Zeit.
In Kap. **VII** wird der Übergang zu formalen Darstellungen bewusst vollzogen.

2 Lernumgebungen zum produktiven Üben

Im Abschnitt 1 wurde bildlich gesprochen ein mathematisches Gebirge skizziert, das von leichten Wanderungen bis hin zu schwierigen, ausgesetzten Touren auf einen markanten Gipfel (den Fundamentsatz) viele Optionen bietet. Einige der möglichen Routen werden in den folgenden Lernumgebungen begangen. Dabei wird das Entdecken, Erforschen und Begründen von Mustern mit der Wiederholung des Rechnens verbunden. Es handelt sich dabei um „Produktives Üben". In Band 1, Kap. **Grundlagen** 1.4 (S. 18) wird dieser Übungstyp besprochen.

Die ersten drei der folgenden Lernumgebungen sind relativ leicht. Die nächsten vier bewegen sich auf einem mittleren Niveau. Die Umgebungen 2.8 und 2.9 stellen höhere Anforderungen. In 2.9 wird sogar ein Ausblick auf den Fundamentalsatz ermöglicht. Vielleicht können einige Schüler die Route zu diesem Gipfel wenigstens zum Teil verfolgen. Die Lehrperson muss entscheiden, wie weit sie mit ihren Schülern jeweils gehen kann. Jede Lernumgebung ermöglicht natürliche Differenzierung, sodass schwächere Schüler nicht überfordert werden.

2.1 Schöne Muster bei Zahlenfolgen

Worum geht es? Was soll gelernt und geübt werden?
Von der Grundschule sind folgende Zahlenfolgen bekannt:

Natürliche Zahlen	1, 2, 3, 4, 5, …
Gerade Zahlen	2, 4, 6, 8, 10, …
Ungerade Zahlen	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, …

Die Schüler sollen beim Rechnen mit diesen Folgen entdecken, dass
(1) die fortgesetzte Addition *ungerader Zahlen* als Ergebnis immer eine *Quadratzahl* hat,
(2) das *Quadrat einer Zahl* immer um 1 größer ist als das *Produkt der Nachbarzahlen.*
Das Muster (2), das hier zum Vorschein kommt, ist ein elementares Beispiel für die dritte binomische Formel, verweist also auch inhaltlich schon auf die Algebra.

---

[1] Becker, O. (1954): Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Freiburg und München: Alber, 34 – 41. Die lat. Bezeichung „calculi" für aus Kalk geformte Steine lebt in dem Wort „kalkulieren" weiter.
[2] Gerhard Rosenberger hat den hier dargestellten operativen Beweis des Fundamentalsatzes in formaler Fassung in die zweite Auflage seines Buches "Algebra and Number Theory: A Selection of Highlights" aufgenommen, das 2023 bei de Gruyter erschienen ist (dort S. 32).

Weiter sollen die Schüler unter Anleitung Beweise der Vermutungen mit Plättchen und Punktfeldern führen, die in dieser Weise von den griechischen Mathematikern etwa 2500 Jahre vor uns mit Steinchen geführt wurden. In Kap. **VII** erfolgt dann der Übergang zur formalen Fassung.

Auch der historische Hintergrund sollte skizziert und im Verlauf des Unterrichts sollte herausgearbeitet werden, dass es eine Besonderheit der Mathematik ist, Vermutungen nicht nur durch Einzelbeispiele zu untermauern, sondern durch Beweise sichern zu können. Diese Beweise sind deshalb allgemeingültig, weil es bei ihnen *nicht auf die Zahlen* selbst, sondern nur auf *deren „Bauart“* ankommt.

Was wird benötigt?
Demo-Material: –
Arbeitsmaterial: –

Wie kann man vorgehen?
1. Angedeutet wird ein Stück der Zahlenreihe.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9, 10, …, 17, 18, …, 50, 51, …, 1000, … *natürliche Zahlen*

Die Schüler verdoppeln diese Zahlen und gelangen zu den *geraden Zahlen.*
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, …, 34, 36, …, 100, 102, …, 2000, … *gerade Zahlen*

Dann wird auch noch die Folge der *ungeraden Zahlen* angedeutet:
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, …, 21, 23, …, 57, 59, …, 101, 103, …, 1001, … *ungerade Zahlen.*

Frage: Woran kann man erkennen, ob eine Zahl gerade oder ungerade ist?
Vermutlich wird die Einerziffer als ausschlaggebendes Kriterium genannt.

Frage: Was unterscheidet die geraden von den ungeraden Zahlen?
Antwort: Die geraden Zahlen sind genau die Zahlen, die man halbieren bzw. durch 2 *ohne Rest* teilen kann bzw. die Zahlen, die das Doppelte einer anderen Zahl sind. Bei der Division einer ungeraden Zahl durch 2 bleibt der Rest 1.

2. Es wird darauf hingewiesen, dass man Zahlen nicht nur zum Rechnen im praktischen Leben benutzen kann, sondern dass sie eine *eigene Welt* mit vielen Beziehungen, eine *Theorie*, bilden, die man erforschen und praktisch nutzen kann.

Dann werden folgende Aufgaben vorgestellt, die im Heft oder auf einem Blatt bearbeitet werden.
Ausgangspunkt für die erste Aufgabe „Rechnen mit ungeraden Zahlen“ ist die Folge der ungeraden Zahlen, aus der eine Folge von Rechnungen abgeleitet wird (Abb. 9). Die jeweils verwendete ungerade Zahl wird durchgestrichen. Das Ergebnis jeder Aufgabe wird als erster Summand der nächsten Aufgabe verwendet. Der jeweils zweite Summand ist die nächste noch nicht durchgestrichene ungerade Zahl.

$1 + 3 = 4$
$4 + 5 = 9$
$9 + 7 = 16$
$16 + 9 =$
$25 + \ldots$

Abb. 9

$5 \cdot 5 = 25$
$4 \cdot 6 = 24$

$9 \cdot 9 = 81$
$8 \cdot 10 = 80$

$15 \cdot 15 = 225$
$14 \cdot 16 =$

$21 \cdot 21 = 441$
$20 \cdot 22 =$

$100 \cdot 100 =$
$99 \cdot 101 =$

Abb. 10

Ausgangspunkt für die zweite Aufgabe „Aufgabenpärchen" ist die Folge der natürlichen Zahlen.
Hier werden mit jeder Zahl zwei Rechnungen durchgeführt: Die Zahl wird zuerst mit sich selbst multipliziert, dann wird das Produkt der Nachbarzahlen gebildet. Anders als bei der ersten Aufgabe muss man beim Rechnen keine Reihenfolge einhalten, sondern kann Zahlen beliebig auswählen (Abb. 10).

3. Bearbeitung der Aufgaben

4. Vorstellung der Ergebnisse
Bei Aufgabe 1 ist zu vermuten, dass das Ergebnis immer eine *Quadratzahl* ist.
Bei Aufgabe 2 ist in jedem Pärchen das erste Ergebnis immer um 1 größer als das zweite.

Es wird erklärt, dass man solche durchgehenden Regelmäßigkeiten *Muster* nennt. Dieser Begriff wird erst im Laufe der Zeit durch fortgesetzte Verwendung immer mehr mit Bedeutung gefüllt.

5. Es wird besprochen, dass man die Vermutung nicht durch bloßes Rechnen beweisen kann, da es unendlich viele Zahlen gibt. Wie kann man trotzdem sicher sein, dass das Muster *immer* gilt?
Die alten griechischen Mathematiker im 6. Jhdt. v.Chr. hatten dazu eine grandiose (im heutigen Sprachgebrauch „coole") Idee, die für die Wissenschaft Mathematik grundlegend wurde: Sie legten Zahlen mit Steinchen, sodass ihre Struktur deutlich wurde (Abb. 11):

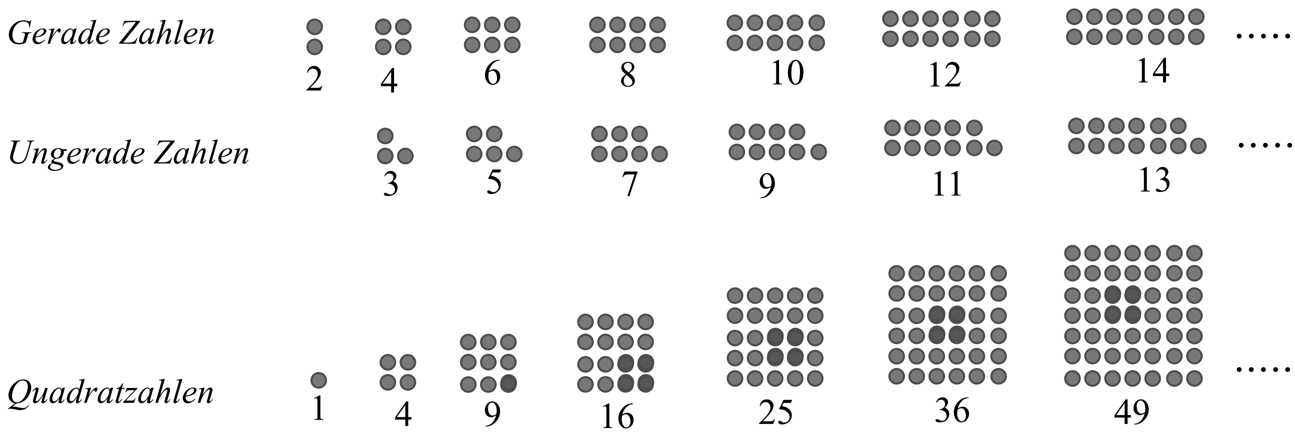


Abb. 1