



Adam Ries
(1492–1559)



Simon Stevin
(1548–1620)



Heinrich Winter
(1928–2017)



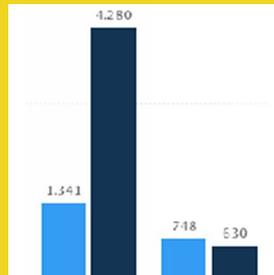
$$592 \text{ ZT} + 74 \text{ H} + 18 \text{ E}$$



$$59 \text{ HT} + 27 \text{ T} + 41 \text{ Z} + 18 \text{ E}$$



Entfaltung =
(Zähnezahl Kettenblatt:
Zähnezahl Ritzel) ·
Umfang Hinterrad



Politische Arithmetik

Mathematik fachlich-aufbauend und schülerorientiert unterrichten Ein Handbuch für die Sekundarstufe

Band I: Vom Rechenunterricht der Grundschule
zu den Dezimalzahlen und zur Prozentrechnung

ERICH CH. WITTMANN

**Mathematik fachlich-aufbauend
und schülerorientiert unterrichten**
Ein Handbuch für die Sekundarstufe

Band 1: Vom Rechenunterricht der Grundschule
zu den Dezimalzahlen und zur Prozentrechnung

In memoriam Heinrich Winter

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

**Bibliografische Information der Deutschen
Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über <http://dnb.de> abrufbar.

Umschlaggestaltung: 4H digital (<https://4h-digital.de/>)

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

All Rights Reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form, electronic, mechanical, recording, photocopying, or otherwise, without the permission of the copyright holder.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien,
Ferdinand-Freiligrath-Str. 26, Münster
Münster 2024 – E-Book
ISBN 978-3-95987-280-5
<https://doi.org/10.37626/GA9783959872805.0>

Bildnachweise

Cover

Adam Ries: Mit freundlicher Erlaubnis des Adam Ries Museums Annaberg- Buchholz

Simon Stevin: Courtesy of Leiden University Libraries, Special Collections Services

Portrait Heinrich Winter: Mit freundlicher Zustimmung von Martin Winter

Radfahrer: iStock Fotos

Diagramm: Mit freundlicher Erlaubnis von Statista

Kap. III

Abb. 1: Wikipedia (Gemeinfrei)

Abb. 2: DBNL (digitale bibliotheek voor de Nederlandse letteren)

Kap. IV

Abb. 17: Hessisches Statistisches Landesamt, Wetteraukreis - Fachdienst Kreisentwicklung

Abb. 20: Mit freundlicher Erlaubnis von Statista

Covergestaltung

4H digital (<https://4h-digital.de>)

Download der Arbeitsblätter

<https://www.wtm-verlag.de/download-ECHW2024BD1/Arbeitsblaetter.pdf>

Hinweise und Empfehlungen zur Nutzung dieses Buches

1. Wer als Bergführerin oder Bergführer Wanderer zu Gipfelzielen führen soll, muss das Gelände durch eigene Touren selbst erwandert haben, nicht nur um die Anforderungen abschätzen zu können, die sich auf den jeweiligen Routen stellen, sondern auch um die Klienten über landschaftliche Schönheiten, die Tier- und Pflanzenwelt, usw. *aus erster Hand* informieren zu können. Entsprechend muss eine Lehrperson jedes Gebiet, durch das sie Schüler führen soll, durch eigene mathematische und didaktische Aktivitäten gründlich erwandert haben. Die beiden Bände dieses Buches laden für die Inhaltsbereiche Arithmetik und Algebra dazu ein.

2. Felix Klein hat über die Mathematik Folgendes geschrieben:

*Die Mathematik ist mit der griechischen Bildung ebenso verwachsen wie mit den modernsten Aufgaben des Ingenieurbetriebes. Sie reicht nicht nur den Naturwissenschaften die Hand, sondern sie partizipiert gleichzeitig an den abstrakten Untersuchungen der Logiker und Philosophen. Unsere besondere Aufgabe dürfte hiernach sein, in unserer Umgebung die Überzeugung von der Solidarität aller höheren geistigen Interessen zur Geltung zu bringen.*¹

Wer Mathematik unterrichtet, hat in diesem Sinn einen Bildungsauftrag, der **vom wohlverstandenen Fach aus** Autorität verleiht. Diesem Auftrag sollte sich jede Lehrperson jenseits behördlicher Vorschriften verpflichtet fühlen. Letztlich geht es um Menschenbildung. Im Unterricht muss spürbar werden, dass Mathematik ein wichtiges **und** schönes Fach ist, das es in sich hat. Um den Umfang der beiden Bände im Rahmen zu halten, wurden Überlegungen dazu in einen Artikel ausgelagert, der von der Mathe 2000-Website heruntergeladen werden kann.² Insbesondere die Abschnitte 4 und 5 dieses Artikels sollten bei der Lektüre des Buches immer mitbedacht werden.

3. Studierenden beider Ausbildungsphasen wird nachdrücklich empfohlen, auch die mit großer Sorgfalt entwickelten Arbeitsblätter im Detail durchzuarbeiten. Auch Lehrpersonen sollten sich nicht zu schade sein, dies wenigstens stichpunktartig zu tun, weil es für das Verständnis des Konzepts hilfreich ist und Detailwissen vermittelt. Die Arbeitsblätter stehen im DIN A4-Format zum Download zur Verfügung s. Hinweis auf S. 3).

4. Bei einem deduktiv-systematischen Lehrbuch der Mathematik kann im Interesse der *logischen Konsistenz* auf wohlbekannte Grundlagen nicht verzichtet werden. Genauso liegt der Fall bei einem Buch, in dem mathematische Lerninhalte in eine *psychologische Ordnung* zu bringen sind. Auch dabei muss Wohlbekanntes in Erinnerung gerufen und in den Kontext gesetzt werden, insbesondere, wenn neue Wege beschritten werden. Eine gewisse Breite der Darstellung ist aus diesem Grund unvermeidlich. Sie darf nicht als fehlende Anerkennung der mathematischen und didaktischen Vorbildung der Leserinnen und Leser verstanden werden.

¹ Klein, F. (1924): Elementarmathematik vom Höheren Standpunkt. Berlin-Göttingen, S. 296 – 297

² Zum bildungspolitischen Hintergrund s. den Artikel "Was ist in der deutschen Bildungspolitik seit 50 Jahren im Bereich MINT falsch gelaufen und wie kann das korrigiert werden? Eine kritische Analyse". (<https://www.mathe2000.de/sites/default/files/bildungspolitik-mint.pdf>).

Vorwort

*Was man nicht versteht, besitzt man nicht.
J.W. von Goethe*

Für den Aufbau und die Stärkung *physischer* Kräfte sind *körperliche* Aktivitäten *notwendig und hinreichend*, für den Aufbau und die Stärkung *geistiger* Kräfte sind in gleicher Weise *geistige* Aktivitäten *notwendig und hinreichend*. Das ist ein Naturgesetz.

Lehrerinnen und Lehrer erfüllen daher ihren Bildungsauftrag im Mathematikunterricht voll und ganz, wenn sie die Schülerinnen und Schüler in sinnvollen Zusammenhängen mathematisch aktiv werden lassen. Die Didaktik unterstützt die Praxis bei dieser Aufgabe am besten dadurch, dass sie ihre Forschungsergebnisse in Form *fachlich fundierter Lernumgebungen* vermittelt, die aktives Lernen fördern. Unterschiedliche Lernvoraussetzungen können dabei gut durch Differenzierung *vom Fach aus* berücksichtigt werden (*natürliche Differenzierung*).

Die Entwicklung eines gleichzeitig fachlichen und schülerorientierten Konzepts setzt voraus, dass man sich an der **wohlverstandenen** Mathematik orientiert, was Zweierlei bedeutet:

1. Der Wissenserwerb muss *von unten her* gesteuert werden. Dazu hat der amerikanische Lernpsychologe David Ausubel einen prägnanten Grundsatz formuliert:

Wenn ich die Lernpsychologie auf einen Satz reduzieren müsste, würde ich sagen:

Ermittle die Vorkenntnisse der Lernenden und richte deinen Unterricht danach aus.

Ein Aufbau entlang der gewachsenen Strukturen des Faches sichert, dass neues Wissen an vorhandenes Wissen andocken kann, und ist die beste Form von Schülerorientierung.

2. "*Wohlverstanden*" impliziert auch, dass der „angewandte“ **und** der „reine“ Aspekt der Mathematik zur Geltung kommen, die nur zusammen den Bildungswert des Faches erfassen.

Leider hat sich die Bildungspolitik seit Ende der 1960er Jahre bei den großen Reformen 1968 und Anfang 2000 nicht von der *wohlverstandenen Mathematik*, sondern von fachfremden Überlegungen und falschen Propheten leiten lassen. Die „Mengenlehre“ ist in wenigen Jahren wieder verschwunden. Die momentan herrschende „Kompetenzorientierung“ hält sich leider zäher. Aber es gibt Anzeichen dafür, dass sie ebenfalls als „Holzweg“ erkannt wird (so die bis 2020 amtierende baden-württembergische Kultusministerin Dr. Eisenmann).

Dieses Buch ist in der Hoffnung auf eine Richtungsänderung geschrieben, die Heinrich Winter durch seine Vorstellungen zur mathematischen Allgemeinbildung, seine theoretischen Beiträge, zahlreiche Unterrichtsbeispiele für alle Stufen und den unter seiner Federführung entwickelten Lehrplan für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen von 1985 aufgezeigt hat.³ Diesem „*Jahrhundert-Lehrplan*“ liegen folgende Prinzipien zugrunde, die ihrer Natur nach *stufenübergreifend* sind:

1. die Formulierung *allgemeiner Lernziele*, von Winter bereits 1975 (!) formuliert,
2. die Verbindung von *Anwendungsorientierung* und *Strukturorientierung*,

³ s. Abschnitt 5 des in Fußnote 2 genannten Artikels.

3. die Festlegung des *entdeckenden Lernens* als oberstem Unterrichtsprinzip,
4. die *fachlich-aufbauende Beschreibung* der Inhalte.

Auf dieser Basis ist es möglich, den Mathematikunterricht schon vom Kindergarten aus so zu entwickeln, dass

1. Verständnis für das *wahre Fach* geweckt und *selbständiges Denken* gefördert wird und
2. die Grundlagen für *substanzielle Anwendungen* im MINT-Bereich gelegt werden.

Jürgen Kaube, Chefredakteur der FAZ, fordert in seiner kritischen Analyse der Schule, dass die Schule in erster Linie *zum Denken* erziehen solle.⁴ Das Hauptfach Mathematik ist hier als *Denkfach par excellence* in besonderer Weise angesprochen.

Im Projekt Mathe 2000 wurde in dem von Heinrich Winter gesteckten Rahmen ein fachlich-aufbauendes Curriculum für den Kindergarten und die Grundschule entwickelt, das in den zwei Bänden des „Handbuchs produktiver Rechenübungen“ beschrieben ist.⁵

Im Rechenunterricht der Grundschule sind zwei Stränge angelegt:

- ein *algorithmischer Strang*, der durch das *Dezimalsystem* und die *schriftlichen Rechenverfahren* verkörpert wird, und
- ein *algebraischer Strang*, charakterisiert durch die *Rechengesetze* und das *halbschriftliche Rechnen*, das als Vorstufe zur Algebra betrachtet werden kann.

Winter spricht hier von "algebraischer Durchdringung" der Arithmetik.

Entsprechend bot es sich an, den Übergang von der Grundschule zur Sekundarstufe in zwei Bänden darzustellen.

Der vorliegende erste Band befasst sich in Fortsetzung des *algorithmischen Strangs* mit den Dezimalzahlen und im Anschluss daran mit der Prozentrechnung. Im zweiten Band geht es in Fortsetzung des *algebraischen Strangs* um Elemente der Zahlentheorie und Zahlbereichserweiterungen, und es wird eine Einführung in die elementare Algebra gegeben.

Auf eine Differenzierung nach Schulformen wurde verzichtet, da man in allen Zweigen der Sekundarstufe Schülerinnen und Schüler findet, die sich mit Mathematik leichter, und solche, die sich mit diesem Fach schwerer tun. Wenn das Blitzrechnen ernst genommen wird und die Möglichkeiten der natürlichen Differenzierung ausgeschöpft werden, kann man Leistungsunterschieden gerecht werden.

Die beiden Bände richten sich an

- Studierende aller Lehrämter für Mathematik in der Sekundarstufe,
- Quereinsteiger, die schnell an die Praxis herangeführt werden müssen,
- Lehrerinnen und Lehrer, die Mathematik in der Sekundarstufe unterrichten und ihr *Fachwissen* auffrischen und erweitern möchten,
- Kolleginnen und Kollegen, die in der didaktischen Ausbildung der ersten Phase tätig sind,
- Fachleiterinnen und Fachleiter in der zweiten Ausbildungsphase, an sie ganz besonders,

⁴ Kaube, J. (2019): Ist die Schule zu blöd für unsere Kinder? Berlin: rowohlt

⁵ Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Band 2: Halbschriftliches und schriftliches Rechnen. Seelze: Friedrich 2017/2018. Im Folgenden abgekürzt mit "Handbuch G".

- Mathematikerinnen und Mathematiker, die mit der mathematischen Ausbildung für die Sekundarstufe betraut sind und ihre Angebote praxisnah gestalten möchten,
- Leitungspersonen in der Bildungsadministration, die sich über die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts grundsätzliche Gedanken machen.

Das in diesem Buch zusammengestellte Material eignet sich in der ersten Ausbildungsphase zur Ergänzung von Didaktikvorlesungen. Studierende beider Phasen finden in dem Buch viele Anregungen für Praktika, Bachelor-Arbeiten und Unterrichtsexperimente. An diese Gruppe möchte ich einen Rat meines Doktorvaters weitergeben, nämlich bei der Lektüre des Buches Bleistift und Papier bereitzuhalten, um eigene Überlegungen notieren zu können.

Die Abschnitte "Mathematische und didaktische Grundlagen" am Beginn jedes Kapitels liefern Material für Mathematikvorlesungen.

Die Ausbildung in der zweiten Phase wird dadurch unterstützt, dass ein klares Konzept vermittelt wird, wie Fachunterricht mit wenig Aufwand geplant und durchgeführt werden kann, indem man *der inneren Dynamik der Mathematik* folgt. Der methodische Aufwand kann damit auf ein Minimum reduziert werden, was für Quereinsteiger besonderes Gewicht hat. In den Abschnitten *Unterricht planen* (S. 21ff.) und *Unterricht gemeinsam reflektieren und bewerten* (S. 17) wird dies genauer beschrieben. Die Ausarbeitung der skizzierten Lernumgebungen zu Unterrichtsentwürfen und deren Umsetzung unter den jeweiligen schulischen Bedingungen erscheint dem Autor als der beste Weg zum Erwerb professionellen Wissens. Das Fachseminar sollte hierauf den Schwerpunkt setzen. Zur Unterstützung sind Arbeitsblätter zum Download eingearbeitet, die auch als Muster für die Entwicklung eigener Arbeitsblätter und von Klassenarbeiten dienen können (s. Hinweis auf S. 4)

Peter Rasfeld, Kinga Szücz und Jens Weitendorf haben eine erste Fassung des Manuskripts sehr gründlich gelesen und mir wertvolle Anregungen für Verbesserungen gegeben. Von Stefan Halverscheid habe ich einen entscheidenden Hinweis erhalten. Dafür danke ich allen sehr herzlich. Mein besonderer Dank gilt meinem alten Mitsstreiter Gerhard Müller, mit dem ich bei unserer langjährigen Zusammenarbeit im Projekt Mathe 2000 immer auch die Fortsetzbarkeit unserer Entwicklungsarbeit auf die Sekundarstufe diskutieren konnte. Mathe 2000 wurde von Anfang als stufenübergreifendes Projekt konzipiert.⁶

Den Band 1 widme ich in memoriam Heinrich Winter, der mit seinem umfangreichen und vielseitigen Werk ein tragfähiges *stufenübergreifendes* Fundament für die Entwicklung eines *fachlich fundierten, schülerorientierten und anwendungsorientierten Mathematikunterrichts* gelegt und damit eine *"neue Stoffdidaktik"* begründet hat. Ich würde mich über Rückmeldungen zu den beiden Bänden freuen, insbesondere über Vorschläge zur Einbeziehung digitaler Medien. Vielleicht lassen sich Fachkolleginnen und Fachkollegen auch zur Bearbeitung anderer Themengebiete des Mathematikunterrichts nach dem Vorbild von Heinrich Winter anregen, sodass eine umfassende Handbuchreihe für die Sekundarstufe entstehen könnte.

Erich Ch. Wittmann
 Projekt Mathe 2000
 erich.wittmann@tu-dortmund.de

⁶ <https://www.mathe2000.de/allgemeine-informationen>.

Die Ausgangsbasis

1 Grundsätzliches zum Lehren und Lernen	11
1.1 Mathematische Strukturen als Lernhilfen nutzen: Schülerorientierung durch Orientierung am wohlverstandenen Fach	11
1.2 Unterricht planen	14
1.3 Unterricht gemeinsam reflektieren und bewerten	17
1.4 Kräfte sparen: Ein wichtiger Aspekt für das ganze Berufsleben	17
2 Übersicht über den Rechenunterricht der Grundschule	18
2.1 Die sieben Grundideen der Arithmetik	18
2.2 Das Zehnersystem	20
2.3 Die Rechengesetze der Arithmetik und ihre operative Begründung	21
2.4 Der Blitzrechnenkurs	24
2.5 Durchgehende Übungsformate	25
3 Grundsätzliche Anmerkungen zu Übergängen zwischen Stufen	25
3.1 Pädagogische Gründe für eine stufenübergreifende Sicht	25
3.2 Allgemeine Lernziele als Klammer zwischen den Stufen	26
3.3 Organische Weiterentwicklung inhaltlicher Grundideen	27
3.4 Struktur- und Anwendungsorientierung	29
4 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser	30

Kapitel I Vertiefung der Arithmetik

1 Mathematische und didaktische Grundlagen	32
1.1 Rechenarten und Rechengesetze	32
1.2 Zahldarstellungen und operative Beweise der Rechengesetze	33
2 Wiederholung des Rechenunterrichts der Grundschule	36
2.1 Halbschriftliches Rechnen	36
2.1.1 <i>Vertiefung der Rechengesetze der Addition</i>	36
2.1.2 <i>Zahlen in unterschiedlicher Reihenfolge addieren</i>	40
2.1.3 <i>Die Strichrechenregel</i>	42
2.1.4 <i>Strichrechenquartette</i>	44
2.1.5 <i>Vertiefung der Rechengesetze der Multiplikation</i>	46
2.1.6 <i>Zahlen in unterschiedlicher Reihenfolge multiplizieren</i>	50
2.1.7 <i>Die Punktrechenregel</i>	53
2.1.8 <i>Punktrechenquartette</i>	56
2.1.9 <i>Die variable Stellentafel, das Einmaleins und das Stelleneinmaleins</i>	58
2.1.10 <i>Vertiefung des Distributivgesetzes</i>	63
2.1.11 <i>Das Invarianzgesetz der Division</i>	67
2.1.12 <i>Runden</i>	70

2.2 Wiederholung der schriftlichen Rechenverfahren	72
2.2.1 <i>Schriftliche Addition mit der Neunerprobe</i>	74
2.2.2 <i>Die Teilbarkeitsregeln für 9 und 3</i>	79
2.2.3 <i>Schriftliche Multiplikation mit Vielfachenfolgen</i>	83
2.2.4 <i>Schriftliche Subtraktion mit Ausblick auf den Euklidischen Algorithmus</i>	87
2.2.5 <i>Schriftliche Division mit Vielfachenfolgen</i>	92
2.3 Nichtdekadische Stellenwertsysteme	96
2.3.1 <i>Das Achtersystem</i>	97
2.3.2 <i>Das Zweiersystem</i>	98
3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser	102

Kapitel II

Blitzrechnen N

1 Mathematische und didaktische Grundlagen	104
1.1 Die Bedeutung des Blitzrechnens für das mathematische Arbeiten	104
1.2 Praktische Hinweise	105
2 Der kompakte Wiederholungskurs „Blitzrechnen N“	105
2.1 Die zehn Übungen von „Blitzrechnen N“	106
2.2 Materialien zum Blitzrechnen	110
3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser	110

Kapitel III

Einführung der Dezimalzahlen

1 Mathematische und didaktische Grundlagen	113
1.1 Fortsetzung des Zehnersystems auf Dezimalzahlen	113
1.2 Fortsetzung der schriftlichen Rechenverfahren auf Dezimalzahlen	118
2 Lernumgebungen zur Einführung und zum grundlegenden Üben	120
2.1 Einführung der Dezimalzahlen an der Stellentafel und variablen Stellentafel	120
2.2 Einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben	125
2.3 Einfache Multiplikations- und Divisionsaufgaben	125
2.4. Schriftliche Addition von Dezimalzahlen	127
2.5. Schriftliche Subtraktion von Dezimalzahlen	129
2.6 Schriftliche Multiplikation von Dezimalzahlen	130
2.7 Schriftliche Division von Dezimalzahlen	132
2.8 Zahlen und Größen mit anderen Zahlen bzw. Größen ausmessen	134
2.9 DIN-Formate	140
2.10 Kettenschaltung am Fahrrad	141

3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser	145
---	-----

Kapitel IV

Prozentrechnung

1 Mathematische und didaktische Grundlagen	148
1.1 Grundbegriffe und Grundaufgaben der Prozentrechnung	148
1.2 Grundlegende Arbeitsmittel	151
2 Lernumgebungen zum grundlegenden und produktiven Üben	153
2.1 Blitzrechenübungen im Hunderterraum	153
2.2 Berechnung einfacher Prozentwerte mit der Prozent-Tafel	154
2.3 Die direkte Berechnung von Prozentwerten	159
2.4 Berechnung des Prozentsatzes aus Grundwert und Prozentwert	162
2.5 Berechnung des Grundwerts aus einem Paar Prozentsatz/Prozentwert	164
2.6 Sachaufgaben zur Prozentrechnung	165
2.7 Politische Arithmetik	168
2.7.1 Mieterhöhungen	169
2.7.2 Klimaschutz	170
2.7.3 Energiekosten	171
2.7.4 Verkehrssicherheit	172
2.7.5 Wahlbeteiligung	173
2.7.6 Bevölkerungszahlen	174
3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser	176

Kapitel V

Blitzrechnen D

1 Übersicht über den Kurs "Blitzrechnen D"	177
2 Die fünf Übungen von "Blitzrechnen D"	178
2.1 „Dezimalzahlen unterschiedlich lesen“	178
2.2 „Subtraktion von Stufenzahlen“	179
2.3 „Einmaleins mit Dezimalzahlen und Stelleneinmaleins“	179
2.4 „Die Stufenzahlen 1000, 100, 10 und 1 in 2, 4, 5, 8 und 10 Teile teilen“	179
2.5 „Bestimmung einfacher Prozentwerte“	180
3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser	181

Grundlagen

Habe deine Zwecke im Ganzen vor Augen und
lasse dich im Einzelnen durch die Umstände bestimmen.
J.W. von Goethe

Um den nahtlosen Anschluss des *Handbuchs S* an das *Handbuch G* deutlich zu machen, wird in diesem einführenden Kapitel *erstens* das didaktische Konzept für das Lehren und Lernen von Mathematik beschrieben, das sich durch beide Handbücher zieht, und es wird *zweitens* eine Übersicht über die Inhalte des Rechenunterrichts der Grundschule gegeben.

1 Grundsätzliches zum Lehren und Lernen

Wie im Vorwort erwähnt, stützt sich der Ansatz im Projekt Mathe 2000 bewusst auf das *wohlverstandene Fach*. Daraus ergeben sich klare praktische Vorteile für die Vorbereitung und Durchführung von Unterricht, wie gleich am Anfang erklärt werden soll.

1.1 Mathematische Strukturen als Lernhilfen nutzen: Schülerorientierung durch Orientierung am wohlverstandenen Fach

Das altherwürdige „didaktische Dreieck“ zeigt in schlichter Form die drei Pole, die im Unterricht in Beziehung treten (Abb. 1).

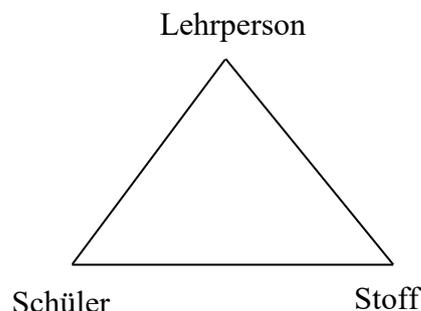


Abb. 1

Im *traditionellen Unterricht* hatte die Lehrperson die Aufgabe, den Stoff zu „vermitteln“ und die Schüler hatten ihn zu „rezipieren“. Es ist offensichtlich, dass dabei die Eigenaktivität der Schüler und das soziale Lernen eingeschränkt waren.

Heinrich Winter hat diesem „*belehrenden Unterricht*“ das Konzept des „*entdeckenden Lernens*“ gegenübergestellt, das der Lehrperson und den Schülern andere Rollen zuweist:¹

Den Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts wird in besonderem Maße eine Konzeption gerecht, in der das Mathematiklernen als ein konstruktiver, entdeckender Prozess aufgefasst wird. Der Unterricht muss daher so gestaltet werden, dass die [Schüler] möglichst viele Gelegenheiten zum selbsttätigen Lernen in allen Phasen eines Lernprozesses erhalten. [...]

¹ Lehrplan für den Mathematikunterricht der Grundschule in Nordrhein-Westfalen 1985

Die Aufgabe des Lehrers besteht darin, herausfordernde Anlässe zu finden und anzubieten, ergiebige Arbeitsmittel und produktive Übungsformen bereitzustellen und vor allem eine Kommunikation aufzubauen und zu erhalten, die dem Lernen aller [Schüler] förderlich ist (herausfordern, aufmerksam machen, ermuntern, ermutigen, hinlenken, zu bedenken geben, zum Probieren, Erkunden, Fragen anregen).

Wie in dieser Beschreibung ersichtlich wird, tritt die Lehrperson bei diesem Verständnis von Unterricht keineswegs zurück, sondern greift bewusst und gezielt ein. In der Diskussion über Schule haben in den letzten Jahrzehnten leider Vorstellungen dominiert, die durch die Stichwörter „Schülerorientierung“ und „Individualisierung“ gekennzeichnet sind. Heute wird vielfach die Meinung vertreten, die Lehrperson habe sich zurückzunehmen und müsse ihre Aufgabe darin sehen, die individuellen Vorstellungen *jedes einzelnen Schülers* weiterzuentwickeln. Man geht dabei davon aus, dass es für die Schüler am besten ist, wenn sie beim Lernen ihren „eigenen Wegen“ folgen können und die Lehrperson sich als „Coach“ lediglich auf Lernbegleitung und Moderation beschränkt. Die Literatur quillt über von Dokumenten und Anleitungen, die zeigen sollen, wie man jeden Schüler auf seinem individuellen Weg unterstützen kann.

In der Mathematikdidaktik wird dabei häufig auf das „Ich-du-wir-Prinzip“ von Urs Ruf und Peter Gallin verwiesen, und dieses Prinzip wird so interpretiert, dass sich jeder Schüler *zuerst für sich* mit einem Thema auseinandersetzt („*Ich mache es so*“), sich *dann* in der Gruppe austauscht („*Wie machst du es?*“), und die Lehrperson die gewonnenen Erkenntnisse der Schüler *am Schluss* nur noch ordnet („*Das machen wir ab.*“)². Bei der Rezeption der dialogischen Didaktik dieser Autoren wird aber übersehen, dass beide hervorragende Fachwissenschaftler sind, und ihr Konzept dementsprechend klar *fachlich fundiert* ist. Das „ich“ und das „du“ setzen bei ihnen erst ein, *nachdem* die Lehrperson einen fachlichen Rahmen gesetzt hat. Das abschließende „wir“ bezieht sich auch nicht auf den sozialen Kontext einer einzelnen Klasse, sondern auf übergreifende soziale Konventionen, die im Fach Mathematik sogar international vereinbart sind. Der Unterricht muss den Schülern zwar ermöglichen und sie ermutigen, die *im Fach liegenden Spielräume* zu nutzen. Ziel ist aber nicht individuelles, sondern *sozial geteiltes Wissen*, das *über die Klasse und die Schule hinaus* anschlussfähig ist. Für diese Anschlussfähigkeit muss die Lehrperson sorgen. An die Stelle des „Ich-du-wir“-Prinzips muss daher das „**Wir**-ich-du-wir“-Prinzip treten, das der Lehrperson eine führende Rolle zuweist.

John Dewey hat sich zu dieser Problematik bereits vor fast 100 Jahren in aller Klarheit geäußert (Übers. E.Ch.W):³

Die Befürworter individueller Lernprozesse argumentieren oft folgendermaßen:

Gebt den Kindern gewisse Materialien, Werkzeuge, Hilfsmittel und lasst sie damit nach ihren ganz individuellen Wünschen umgehen und sich frei entwickeln. Setzt den Kindern keine Ziele, gebt ihnen keine Verfahren vor. Sagt ihnen nicht, was sie tun sollen. All dies wäre ein ungerechtfertigter Eingriff in ihre heilige Individualität, denn das Wesen der Individualität ist es gerade, selbst die Zwecke und Ziele zu bestimmen.

Ein solcher Standpunkt ist aber töricht [stupid]. Denn wenn man ihn einnimmt, versucht man etwas Unmögliches, was immer töricht ist, und man missversteht die Bedingungen für selbstständiges Denken. Es gibt viele Möglichkeiten, offene Angebote wahrzunehmen

² Ruf, U. & Gallin, P.: *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik*. Seelze. Kallmeyer 2014⁵.

³ Dewey, J.: *Individuality and Experience*. In: Dewey, J., *The Later Works 1925 – 1927*, vol. 2. Carbondale, Ill: SIU Press 1988, 55 - 61.

und etwas damit zu machen, aber es ist so gut wie sicher, dass diese eigenen Versuche ohne Anleitung erfahrener Lehrer zufällig, sporadisch und ineffektiv sein werden.

Niemand würde bezweifeln, dass die persönliche Entwicklung in irgendeinem Lebensbereich durch die Nutzung der von anderen gesammelten Erfahrungen gefördert wird. Niemand würde auch ernsthaft vorschlagen, dass die Ausbildung z.B. von Schreinerlehrlingen beim Nullpunkt beginnen solle, d.h. ohne dem Lehrling Wissen über Mechanik, den Gebrauch von Werkzeugen, die Kenntnis von Materialien usw. zu vermitteln. Niemand käme auch auf die Idee, dass ein Schreinermeister, wenn er seinem Lehrling dieses Wissen vermittelt, den persönlichen Stil des Lehrlings einengen und seine individuelle Entwicklung behindern würde. Lehrpersonen haben dasselbe Recht und die dieselbe Pflicht, die Lernenden anzuleiten, wie ein Handwerksmeister seine Lehrlinge.

An anderer Stelle heißt es bei Dewey:⁴

Reformpädagogen erwarten vom Kind, dass es Erkenntnisse aus seinem eigenen Geiste heraus „entwickelt“, dass es sich Dinge ausdenkt oder für sich ausarbeitet, ohne fachliche Rahmenbedingungen zu benötigen. Aus dem Nichts kann aber nichts Substanzielles entwickelt werden. Entwicklung heißt nicht, dass dem Geist des Schülers irgendetwas entspringt, sondern, dass echte Fortschritte gemacht werden, und das ist nur möglich, wenn ein geeigneter fachlicher Rahmen zur Verfügung gestellt wird.

Der russische Psychologe Lew Wygotski, dessen Arbeiten heute breit rezipiert werden, hat sich ebenfalls klar für eine aktive Einwirkung der Lehrperson auf die Lernprozesse der Kinder ausgesprochen:

Was das Kind heute in Zusammenarbeit und unter Anleitung vollbringt, wird es morgen selbständig ausführen können. Und das bedeutet: Indem wir die Möglichkeiten eines Kindes in der Zusammenarbeit ermitteln, bestimmen wir das Gebiet der reifenden geistigen Funktionen, die im allernächsten Entwicklungsstadium sicherlich Früchte tragen und folglich zum realen geistigen Entwicklungsniveau des Kindes werden. [...] Wir zeigen einem Kind, wie eine Aufgabe gelöst wird, und prüfen, ob es imstande ist, sie durch Nachahmen des Gezeigten zu lösen. Oder wir beginnen eine Aufgabe zu lösen und überlassen es dem Kind, das Begonnene zu Ende zu führen. Oder wir fordern das Kind auf, eine Aufgabe, die über die Grenzen seiner geistigen Entwicklung hinausgeht, in Zusammenarbeit mit einem anderen, weiter entwickelten Kind zu lösen. Oder, schließlich, wir erklären dem Kind das Lösungsprinzip einer Aufgabe, stellen hinführende Fragen, gliedern die Aufgabe auf und ähnliches mehr.⁵

Es wäre völlig verfehlt, solche fachlich notwendigen Interventionen der Lehrperson als „Frontalunterricht“ zu verteufeln, was in der Pädagogik heute leider oft reflexartig geschieht. Natürlich kann man den Schülern gerade mit der Mathematik auch „ins Gesicht springen“ (Felix Klein). Bei einem Unterricht, der auf der *wohlverstandenen* Mathematik fußt, ist das aber grundsätzlich anders. Für die Schüler ist eine Lehrperson, die in der Lage ist, einen klaren fachlichen Rahmen zu setzen, der an ihre Vorkenntnisse anschließt, ein wahrer Segen. Es gibt daher gute Gründe, diese Position offensiv zu vertreten.

⁴ Dewey, J.: Das Kind und die Fachinhalte. s. www.Mathe2000.de/Download/texte

⁵ Wygotski, L.: Ausgewählte Schriften. Band 2: Arbeiten zur psychischen Entwicklung der Persönlichkeit. Köln: Pahl-Rugenstein 1987, S. 83 - 84

Wie mathematische Strukturen als Lernhilfen so eingesetzt werden können, dass die Entwicklung der einzelnen Schülerpersönlichkeit im Hinblick auf anschlussfähiges Wissen gefördert wird, werden die folgenden Kapitel zeigen. Allen dort beschriebenen Lernumgebungen ist gemeinsam, dass sie auf einem authentischen Bild von Mathematik beruhen.

Die „Wissenschaft von den Mustern“, wie die Mathematik heute bezeichnet wird, ist ein lebendiger Organismus, der im Laufe von Jahrtausenden aus einfachen Mustern aktiv und interaktiv entwickelt wurde. Die Mathematik *von unten her, genetisch*, unter Bezug auf das jeweilige Vorwissen zu entwickeln, ist die beste Unterrichtsmethode, die noch dazu den großen Vorteil bietet, den Lehrpersonen die Arbeit zu erleichtern.

Die von Heinrich Winter formulierten *allgemeinen Lernziele*

- *Mathematisieren (Modellbilden)*,
- *Explorieren (Problemlösen)*
- *Argumentieren*
- *Formulieren*

beschreiben *Grundprozesse* des mathematischen Arbeitens quer über alle Inhalte und Stufen.⁶

Was die Inhaltsbereiche angeht, orientieren wir uns im Projekt Mathe 2000 an fachlichen *Grundideen*, entlang derer der Unterricht stufenübergreifend entwickelt werden kann. In der Arithmetik, um die es in diesem Buch geht, sind dies folgende sieben Grundideen:⁷

- *Zahlenreihe und Anzahlbegriff*
- *Rechnen, Rechengesetze und Rechenvorteile*
- *Zehnersystem*
- *Rechenverfahren*
- *Arithmetische Muster und Strukturen*
- *Zahlen in der Umwelt*
- *Sachrechnen*

1.2 Unterricht planen

Die Lernumgebungen in diesem Buch geben Antworten auf folgende Fragen:

Worum geht es? Was soll gelernt und geübt werden?

Was wird benötigt?

Wie kann man vorgehen?

Wie könnte es weitergehen?

Die erste Frage wird durch strukturgenetische didaktische Analysen beantwortet. Die zweite Frage, die mit der ersten eng verbunden ist, lenkt die Aufmerksamkeit auf die Lernziele, die sich im Mathematikunterricht jenseits von „Kompetenzorientierung“ hinreichend klar formulieren lassen. Wenn die Lehrperson aktives, zielgerichtetes und nachhaltiges Arbeiten an mathematisch gehaltvollen Inhalten organisiert, stellen sich Lernerfolge naturgemäß ein.

Für die Strukturierung eines solchen Unterrichts greifen wir auf die *Theorie der didaktischen Situationen* von Guy Brousseau zurück. Bevor dieser französische Mathematikdidaktiker die wissenschaftliche Laufbahn einschlug, hat er viele Jahre selbst unterrichtet und konnte sich bei der Ausarbeitung seiner Theorie auf seine eigenen Unterrichtserfahrungen stützen.

⁶ Winter, H., Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht. ZDM 7 (1975), H. 3, S. 106 – 116.

Leicht bearbeitete Fassung von 2012 herunterzuladen von www.Mathe2000.de/Download/texte.

⁷ Müller, G.N. & Wittmann, E.Ch. (1995): Mit Kindern rechnen. Frankfurt a.M.: Grundschriftverb., 20 – 21

Brousseaus Theorie eignet sich bestens zur Entwicklung des Unterrichts *aus dem Fach heraus* und ist besonders für die zweite Ausbildungsphase von fundamentaler Bedeutung.⁸

Brousseau unterscheidet im Unterricht fünf "Situationen", die sich am natürlichen Fluss mathematischer Lernprozesse orientieren und wörtlich übersetzt wie folgt lauten:

- *Instruktion*
- *Aktion*
- *Formulierung*
- *Validierung*
- *Institutionalisierung*.

Wir ziehen eine sinngemäße Übersetzung vor und ersetzen „Situation“ durch „Phase“. Damit gelangen wir zu dem Diagramm in Tabelle 1.

	Lehrperson	Schüler
Einführung	<i>Den Arbeitsauftrag gut erklären, Lernziele deutlich benennen, ggf. Material zur Verfügung stellen</i>	zuschauen, zuhören, nachfragen, „sich einklinken“
Bearbeitung	Schüler bei ihren Bearbeitungen beobachten, ggf. weitere Anregungen und Hinweise geben	<i>Aufgaben bearbeiten, sich untereinander austauschen, ggf. Hilfe anfordern</i>
Bericht	zuhören, nachfragen	<i>Gefundene Lösungen oder Muster vorstellen</i>
Reflexion/ Begründung	<i>Begründungen anhören, glätten und präzisieren, Einsichten vertiefen</i>	<i>Muster erklären, Lösungen begründen, dabei Anregungen aufgreifen</i>
Zusammenfassung	<i>Das Gelernte auf den Punkt bringen</i>	Eigenes Verständnis kritisch überprüfen, <i>nachfragen</i>

Tab. 1

Diese Tabelle ist eine Anleitung für die Erstellung von Unterrichtsentwürfen.⁹ In ihr sind die unterschiedlichen Rollen der Lehrperson und der Schüler bei den einzelnen Phasen klar beschrieben. Das „Wir-ich-du-wir“-Prinzip und die allgemeinen Lernziele von Winter sind deutlich erkennbar. Der Kursivsatz zeigt an, wer bei welchen Phasen aktiv ist.

Studierende der ersten und zweiten Phase können der Tabelle gezielte Hinweise entnehmen, wie sie ein Thema „in die Reihe bringen“ können und worauf sie bei den einzelnen Phasen jeweils achten müssen. Die Beschreibungen der einzelnen Lernumgebungen in den folgenden Kapiteln liefern für die inhaltliche Ausfüllung konkrete Hinweise.

Die Tabelle ist auch für die Beurteilung von Unterrichtsentwürfen und durchgeführtem Unterricht nützlich. Fachleiterinnen und Fachleiter können die Tabelle als *objektive Check-*

⁸ Brousseau, G.: *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer 1997

⁹ Näheres in Wittmann, E.Ch. (1981): *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 24 ff.

liste für Besprechungen und Bewertungen von Lehrproben nutzen. Wenn auf dem schriftlichen Entwurf genügend viel Platz gelassen wird, kann von den Beobachtern stichpunktartig festhalten werden, wie gut es der jeweiligen Lehrperson in den einzelnen Phasen gelingt, die Schüler mathematisch zu aktivieren und mit ihnen zielgerichtet zu interagieren.

Es hängt von den jeweiligen Zielen und Inhalten ab, ob in einer Lernumgebung alle fünf Phasen auftreten. Bei Lernumgebungen zum produktiven Üben ist das in der Regel der Fall. Für die „Durchwanderung“ umfangreicher Lernumgebungen benötigt man mehr als eine Stunde, genauso wie Gipfelziele in den Bergen oft Zwei- oder Mehrtagestouren erfordern.

Die Erfahrungen zeigen, dass die Phase „*Einführung*“ für den Aufbau von Verständnis und daher für den Lernerfolg von *entscheidender Bedeutung* ist. Hier ist die Lehrperson mit ihrem Fachwissen voll gefordert. Sie muss *langsam* vorgehen, den Arbeitsauftrag an Beispielen ausführlich erklären, an den Reaktionen der Schüler ablesen, inwieweit der Arbeitsauftrag verstanden wurde und ggf. weitere Erklärungen nachliefern. In dieser Phase gilt die alte lateinische Sentenz: *Verba movent, exempla trahunt*¹⁰.

In der Phase „*Bearbeitung*“ sind die Schüler am Zug. Die Lehrperson tritt zurück und beobachtet, gibt aber wenn nötig einzelnen Schülern weitere Hinweise.

In den Phasen „*Bericht*“ und „*Reflexion/Begründung*“ kommt es für die Lehrperson darauf an, die Überlegungen der Schüler anzuhören und "kongenial" zu unterstützen, fachwissenschaftlich zu glätten und zu präzisieren. Dabei müssen Sprechweisen und Darstellungsmittel benutzt werden, die vorher eingeführt wurden und den Schülern vertraut sind.

In der letzten Phase „*Zusammenfassung*“ muss die Lehrperson das erarbeitete Wissen in eine prägnante Form bringen und ist wie in der ersten Phase mit ihrem Fachwissen erneut voll gefordert. Brousseau hat diese Phase erst später noch hinzugefügt, als ihm klar wurde, welche Bedeutung sie für nachhaltige Lernprozesse hat.

Die Schüler zum Sprechen zu bringen, ist auch der Kern der *systemischen* (d.h. in den Unterricht eingebauten) *Qualitätssicherung*, die der amerikanische Didaktiker Howard Fehr in einem klassischen Artikel treffend beschrieben hat:¹¹

Während des Unterrichts müssen die Überlegungen der [Schüler] ständig beobachtet und bewertet werden. Schriftliche Tests reichen hierfür nicht aus. Häufige mündliche Erklärungen bilden eine bessere Grundlage um das Verständnis zu überprüfen. Aber im Hinblick auf den Lernprozess ist es noch wichtiger, dass die [Schüler] aus eigenem Antrieb und unter Führung der Lehrperson ihren Lernfortschritt ständig selbst einschätzen, ihre eigenen Stärken und Schwächen erkennen und durch aus dem Unterricht erwachsene Tests erkennen, wo sie stehen, und selbst die Hilfe anfordern, die sie benötigen. Wir müssen die [Schüler] mehr und mehr dahin bringen, dass sie selbst Verantwortung für ihre Lernfortschritte übernehmen. Das ist ein seit Langem stark vernachlässigtes Ziel des Unterrichts.

Gerade bei den wichtigsten Themen ist es weder sinnvoll noch überhaupt möglich, die Lernfortschritte durch zentrale Tests zu überprüfen. Nur im Unterricht selbst können Unklarheiten und Fehler sofort aufgearbeitet werden.

¹⁰ Frei übersetzt: „Worte informieren, Beispiele haben Zugkraft“.

¹¹ Fehr, H.A. (1988): Philosophy of Arithmetic Instruction. *Arithmetic Teacher* 36, 437 – 441

1.3 Unterricht gemeinsam reflektieren und bewerten

In der medizinischen Ausbildung erwirbt man ärztliches Standardwissen und lernt, *bekannt*e Therapien intelligent zu nutzen. Kern des Maschinenbaustudiums ist die Bau- und Funktionsweise *vorhandener* Maschinen. Im Mittelpunkt des BWL-Studiums stehen *bewährte* Methoden der Betriebsführung, usw. Es ist damit nicht ausgeschlossen, dass die Studierenden auch an die Entwicklung eigener konstruktiver Lösungen herangeführt werden. Aber das ist nicht das vordringliche Ziel der *professionellen* Grundausbildung.

Auch die Lehrerbildung muss sich entsprechend in erster Linie darauf konzentrieren, die angehenden Lehrpersonen anzuleiten, die von der Mathematikdidaktik entwickelten fachlich hochwertigen Lernumgebungen im Unterricht professionell umzusetzen. Hier liegt der Vergleich mit Dirigenten und Dirigentinnen nahe, deren Aufgabe es ja auch nicht ist, Stücke selbst zu komponieren, sondern sie zu interpretieren.

Wenn sich Musiker um eine Stelle in einem Orchester bewerben, müssen sie Standardstücke der Literatur vorspielen. Eigene Stücke würden gar nicht akzeptiert. Entsprechend sollten Studierende im Rahmen einer professionellen Lehramtsausbildung in erster Linie danach beurteilt werden, wie gut sie *vorliegende Lernumgebungen* in der Praxis umsetzen können. Dabei ist der Spielraum für Kreativität nicht geringer als in künstlerischen Bereichen. Es muss aber immer darauf geachtet werden, dass die methodische Inszenierung nicht die Inhalte verdeckt oder gar verfälscht, worauf heute leider oft zu wenig geachtet wird.

In der Lehrerausbildung und im späteren Unterricht verdienen die „lesson studies“ besondere Beachtung, die in der japanischen Mathematikdidaktik eine lange Tradition haben: Eine Gruppe von Lehrpersonen arbeitet über einen gewissen Zeitraum bei der Planung, Durchführung und Beobachtung von *realem Unterricht* zusammen. Die dabei gewonnenen Eindrücke werden besprochen und aus den Erfahrungen werden Schlüsse für den weiteren Unterricht gezogen.

1.4 Kräfte sparen: Ein wichtiger Aspekt für das ganze Berufsleben

Folgende didaktische Prinzipien spielen im Konzept von Mathe 2000 eine tragende Rolle:

- Konzentration auf *mathematische Grundideen* und auf *wenige Arbeitsmittel*, die diese Grundideen optimal verkörpern und Spielraum für Schüleraktivitäten bieten
- Förderung der *Eigenaktivität* und des *sozialen Lernens*
- Grundlegendes, automatisierendes und produktives **Üben**
- Förderung von Schülern mit unterschiedlichen Voraussetzungen im *gemeinsamen* Unterricht und Nutzung der *fachlichen* Optionen für „*natürliche Differenzierung*“
- *Systemische* Qualitätssicherung

Alle fünf Prinzipien unterstützen in unterschiedlicher Weise das Lernen und erleichtern gleichzeitig das Unterrichten, jenseits von methodischem Aktionismus.

Das Üben ist in der obigen Aufzählung besonders hervorgehoben, da es für den Lernerfolg die alles entscheidende Rolle spielt.¹² Wir unterscheiden drei Übungstypen:

– *Grundlegendes Üben* hat seinen Platz bei der Einführung neuer Themen und dient dazu Verständnis aufzubauen. Dabei wird intensiver Gebrauch von Arbeitsmitteln gemacht.

¹² Winter, H., Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *mathematik lehren* 2/1984, 4 – 11