WILEY VCH

Jens Bott

Was wir von der Welt wissen sollten

Was wir von der Welt wissen sollten

Was wir von der Welt wissen sollten

Jens Bott

WILEY VCH

Autor

Jens Bott

j.bott@gmx.net
www.weltwissen.online

Titelbild

© Chinnapong/Shutterstock

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Print ISBN: 978-3-527-35361-3
ePDF ISBN: 978-3-527-84584-2
ePub ISBN: 978-3-527-84583-5

Umschlaggestaltung Formgeber, Mannheim
Satz Newgen KnowledgeWorks (P) Ltd., Chennai, India
Druck und Bindung CPI

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

Für Tristan, Valentin und Louise

Inhaltsverzeichnis

Einleitung: Was wir von der Welt wissen sollten *1*

Teil I Die Natur

1 Mathematik: Werkzeugkiste der Weltbeschreibung *7*
Alles ist Zahl *7*
Eine Erfindung der Buchhalter *8*
Der logische Vierklang *10*
Zahlenspiele *12*
Idee und Form *17*
Jagd auf das Unbekannte *21*
Reise in die Unendlichkeit *23*
Der verlässliche Zufall *27*
Das Ende eines Traums? *35*

2 Physik: Die Gesetze der Natur *37*
Die Entdeckung der Einfachheit *37*
Der Weg nach Cambridge *38*
Die Welt als Uhrwerk *40*
Pioniere des Lichts *46*
Sieg des Chaos *51*
Die Relativitätstheorie *54*
Die Anatomie der Atome *61*
Weltformel *68*

3 Chemie: Magie der Wandlung *75*
Ein weiter Bogen *75*
Elementenjagd *76*
Das Aufbauprinzip *77*
Rhythmen *80*
Allianzen *82*

Wie der Sauerstoff zu seinem Namen kam *85*
Der Chemiebaukasten des Lebens *90*

4 Biologie: Unintelligentes Design *95*
Die andere Naturwissenschaft *95*
Was ist Leben? *95*
Entropiebekämpfungsmaschinen *97*
Sugar makes the world go round *100*
Das Fenster zur Wirklichkeit *105*
Unintelligentes Design *108*
Schicksalhafte Proteine *114*
Im Dschungel der Wechselwirkungen *122*
Aggression und Altruismus *125*

5 Die Geschichte des Universums: Woher wir kommen *131*
Kosmische Geburt *131*
Ein neuer Planet *134*
Das Leben wird ausgepackt *136*
Explosion der Arten *140*
Die steile Karriere der Affen *145*

Teil II Der Mensch

6 Bewusstsein: Der nackte Affe im Spiegel *151*
Wir sind allein *151*
Das Leib-Seele-Problem *152*
Wie die Welt im Kopf entsteht *153*
Auf der Suche nach dem Geist *157*
Das schwere Erbe der Evolution *162*

7 Sprache: Das Ding und sein Name *169*
Babylon *169*
Ursprünge *169*
Sprachliche Vielfalt *171*
Bausteine der Kommunikation *175*
Das geschriebene Wort *181*
Sprachtheorien *183*

8 Philosophie: Die Geschichte des Denkens *191*
Anleitung zum Vernünftigsein *191*
Kants Fragen *192*
Die Entdeckung der Welt *192*
Glaube als Wissenschaft *201*

Sinn, Verstand und letzte Gründe *206*
„Was ist der Mensch?“ *217*
Zweieinhalbtausend Jahre Philosophie *227*

9 Gesellschaft: Freiheit, Gleichheit, Brüderlichkeit? *231*

Konflikt und Kooperation *231*
Wer soll herrschen? *231*
Die Entstehung der Parteien *241*
Vom Geist des Kapitalismus *245*
Dimensionen der Macht *251*
Kontrolle ist gut, Vertrauen ist besser *256*

10 Ökonomie: Kein Schlaraffenland *261*

Die trostlose Wissenschaft *261*
Der lange Weg der Kaurischnecken *262*
Die Entdeckung der unsichtbaren Hand *264*
Marginalistische Revolutionäre *269*
Zerstörerischer Fortschritt *277*
Die sichtbare Hand des Staates *279*
Der Liberalismus schlägt zurück *286*
Ökonomie in der globalisierten Welt *291*

11 Die Geschichte der Menschheit: Wohin? *297*

Der Baum der Erkenntnis *297*
Im Schweiße deines Angesichts *298*
Logos und Macht *301*
Chaos, Klöster, Kontakte *307*
Die Große Divergenz *312*
Revolutionen *318*
Der Aufstieg des Kapitals *321*
Die Zeit der Ismen *324*
Eine Welt *332*

Ausblick: Affe oder Gott? *337*

Dank *341*

Anmerkungen *343*
Literaturverzeichnis *363*
Stichwortregister *373*
Personenregister *391*
Quellenverzeichnis *397*

Einleitung: Was wir von der Welt wissen sollten

Der Wunsch, die Welt verstehen zu wollen, ist so alt wie die Menschheit; wir suchen nach Erklärungen, benötigen Halt und Orientierung. Aus jenen Annahmen und Überzeugungen, die uns plausibel erscheinen, formen wir Weltbilder, unsere persönlichen Vorstellungen über die Beschaffenheit des Universums. Ein religiöser Mythos, wie die hinduistische Überzeugung, dass der Kosmos auf dem Rücken von vier Elefanten ruht, kann ebenso Teil eines Weltbildes sein, wie das Standardmodell der Elementarteilchenphysik oder ein unerschütterlicher Glaube an den Marxismus. Keine dieser Ideen ist lächerlich, sie alle beruhen auf nachvollziehbaren Überlegungen.

Die jeweils herrschenden Vorstellungen haben sich mit der Zeit verändert. Bis zum Ende des Mittelalters lagen die Dinge noch einfach: Für die Europäer etwa war die Bibel die Quelle aller Wahrheit, ein universelles Sachbuch, das die Entstehung des Universums, die Artenvielfalt und den Ursprung des Sprachengewirrs erklärte aber auch moralische Richtlinien für den Umgang mit Familie, Freunden, Feinden, Sklaven und Geld vorgab. Wer gebildet war, konnte sich darüber hinaus noch Rat bei Platon holen; seine Philosophie war nach europäischer Überzeugung zumindest der irdischen Weisheit letzter Schluss.

Platon war einer der Ersten, der den Gedanken ins Spiel brachte, dass die Dinge auch ganz anders sein könnten, als sie uns erscheinen, eine kühne Vorstellung, die mit dazu beitrug, dass sich vor rund 500 Jahren nach und nach neue, rationale Denkweisen etablierten. In dem Maße, in dem die Wissenschaften an Bedeutung gewannen, verloren religiöse und mystische Welterklärungen an Einfluss. Heute beruhen unsere gemeinhin anerkannten Annahmen über die Welt fast ausschließlich auf wissenschaftlichen Erkenntnissen. Glaube wurde mit der Zeit ersetzt durch eine konsequente Faktenorientierung, Mustersuche und den ständigen Zweifel, ob die gewonnenen Erkenntnisse auch tatsächlich wahr sind und nicht vielleicht durch bessere Theorien ersetzt werden müssten. Damit einher ging erstmals die Vorstellung, dass es einen Fortschritt gibt, dass sich die Menschheit in einem historischen Entwicklungsprozess befindet, der sie unaufhaltsam in eine bessere Zukunft führt.

Mit der Zeit haben sich eine Reihe zentraler Theorien und Ideen herausgeschält, die den heutigen Wissenschafts- und Politikbetrieb prägen. Gleich, ob wir sie nun persönlich für richtig halten oder nicht, diese herrschenden Meinungen haben Einfluss auf unser tägliches Leben – und das mehr, als uns oftmals bewusst ist. Viele kennen wir zumindest dem Namen nach: die allgemeine Relativitätstheorie, die Evolutionstheorie, die „Kritik der

Was wir von der Welt wissen sollten, 1. Auflage. Jens Bott

reinen Vernunft“ oder den ökonomischen Liberalismus. Unsere Vorstellungen, was sich dahinter genau verbirgt, bleiben dabei allerdings oftmals vage.

Dieses Buch möchte einen Überblick zu geben. Welche zentralen Lehrmeinungen bestimmen unser heutiges Weltverständnis? Was sagen sie im Kern aus? Wie sind sie entstanden und in welchem Verhältnis stehen sie zueinander? Dazu betrachten wir im ersten Teil die Welt zunächst rein aus naturwissenschaftlicher Sicht. Im Wesentlichen beruht unser heutiges Naturverständnis auf vier erklärmächtigen Theorien: Newtons Mechanik, der allgemeinen Relativitätstheorie, der Quantenphysik und der Evolutionstheorie. Zusammen erlauben sie uns, die Geschichte des Universums als Abfolge einer physikalischen, einer chemischen und schließlich einer biologischen Entwicklung zu verstehen. In allen Fällen geht es dabei allein um die Frage, „wie“ etwas ist.

Ein entwickeltes Bewusstsein, die jüngste Errungenschaft der biologischen Evolution, bleibt – zumindest auf der Erde- allein dem Menschen vorbehalten. Im zweiten Teil des Buchs betrachten wir die Konsequenzen, die sich aus dieser Besonderheit ergeben. Das Wissen um die eigene Existenz ist die Grundlage der kulturellen Evolution, ein Mechanismus, der eine im Vergleich zur biologischen Entwicklung atemberaubende Dynamik in Gang gesetzt hat. Anders als in den Naturwissenschaften, ist die Anzahl der geistes- und sozialwissenschaftlichen Theorien allerdings kaum zu überschauen. Die Schwierigkeit, die Dimensionen des Menschseins zu beschreiben, liegt nicht zuletzt darin, dass es nicht mehr allein um die Frage geht, wie etwas „ist“, sondern auch darum, wie etwas sein „soll“. Daher spielen Glaube, moralische Überzeugungen, Menschenbilder, Werturteile und Zielkonflikte – wie etwa der zwischen Freiheit und Gleichheit – eine zentrale Rolle. Die Auswahl der in diesem Buch vorgestellten Theorien ist somit zwangsläufig subjektiv. Sie orientiert sich primär an der faktischen Wirkmacht, die diese Ideen im Lauf der Menschheitsgeschichte entfaltet haben. Dies sagt zwar nichts über ihre Richtigkeit aus, aber doch immerhin etwas über die Bedeutung, die ihnen zu verschiedenen Zeiten beigemessen wurde. Wir betrachten sie in den Kapiteln Bewusstsein, Sprache, Philosophie, Gesellschaft und Ökonomie.

Die letzten Kapitel des ersten und des zweiten Teils fassen jeweils die Chronologie der Natur- und Menschheitsgeschichte noch einmal aus der Perspektive der herrschenden Welterklärungsmodelle zusammen. Das Mysterium Mathematik nimmt hierbei eine Sonderstellung ein. Sie hat einerseits eine große praktische Bedeutung für unser Naturverständnis, weist andererseits aber auch alle Merkmale eines rein menschlichen Konstrukts auf. Das macht die Mathematik zu einer umfassenden Grundlagendisziplin, Anlass, sie direkt an den Anfang des Buches zu stellen.

„Wer ernsthaft die Wahrheit der Dinge ergründen will, darf sich keiner einzelnen Wissenschaft verschreiben, denn alle Teile der Wissenschaft stehen im Verbund wechselseitiger Abhängigkeit“. Leider findet dieses Zitat des französischen Philosophen René Descartes im heutigen Schulbetrieb keine wirkliche Berücksichtigung – von unserer hochgradig spezialisierten Arbeitswelt ganz zu schweigen. Die Schule hat zwar den Anspruch, uns mit allen wichtigen Wissensgebieten vertraut zu machen, doch werden dabei meist weder Wesen noch Zusammenhänge der Einzeldisziplinen deutlich. Auch, dass unsere heutigen Welterklärungsmodelle nicht vom Himmel gefallen sind, sondern vorläufige Ergebnisse einer Entwicklungsgeschichte darstellen, wird kaum vermittelt: ohne Ptolemäus kein Kopernikus; ohne Kopernikus kein Kepler; ohne Kepler kein Newton; ohne Newton kein Einstein. Um die heute herrschenden Weltbilder zu verstehen, müssen wir ihre historische Entstehung, samt Irrungen und Wirrungen, nachvollziehen. Dabei offenbaren sich mitunter auch unerwartete Zusammenhänge, denn oftmals haben sich die zentralen Welterklärungstheorien auch über disziplinäre Grenzen hinweg gegenseitig beeinflusst.

Dieses Buch hat sich vorgenommen, diesen Entwicklungen und Verbindungen etwas mehr auf den Grund zu gehen. Begleitend zum Buch gibt es auf **www.weltwissen.online** einen Blog, der die Themen des Buches aufgreift, illustriert, vertieft und in neue Zusammenhänge stellt.

Teil I

Die Natur

1

Mathematik: Werkzeugkiste der Weltbeschreibung

Alles ist Zahl

Die Entdeckung Amerikas war die Folge einer simplen Fehlkalkulation. Bei der Berechnung des westlichen Seewegs nach Indien hatte Christoph Kolumbus den Angaben des Bagdader Astronomen al-Farghani vertraut, dabei jedoch übersehen, dass dieser den Erdumfang nicht in römischen, sondern in den wesentlich längeren arabischen Meilen angegeben hatte. Ohne diesen Irrtum wäre der Genuese nie in See gestochen, seine Nussschalen hätten die gewaltige Strecke unmöglich bewältigen können.

Diese kleine Geschichte zeigt uns, wie weit die Mathematik zu Beginn der Neuzeit bereits in den Alltag der Menschen eingedrungen war. Mutete ihr bis ins späte Mittelalter hinein noch die Aura einer Geheimwissenschaft an, in die nur wenige Gelehrte eingeweiht waren, war sie nun auch für Seefahrer, Kaufleute, Verwalter, Baumeister und Handwerker zu einem unentbehrlichen Werkzeug geworden. Rechenmeister, wie der sprichwörtlich gewordene Adam Ries, erkannten diesen steigenden Bedarf. Ries schrieb ein populäres Standardwerk der Arithmetik, gründete eine Rechenschule und half tatkräftig mit, die Europäer von ihrem unhandlichen römischen Zahlensystem zu erlösen.

Zahlen und geometrische Figuren sind seitdem fester Bestandteil der modernen Welt. Wenn bis heute die meisten Menschen dennoch ein nicht ganz so entspanntes Verhältnis zur Mathematik haben, liegt das nicht zuletzt daran, dass uns die Natur den Umgang mit ihr nicht in die Wiege gelegt hat: Sobald wir uns einer etwas anspruchsvolleren Rechenaufgabe gegenübersehen, reagiert unser Körper wie auf einen Säbelzahntiger- Pupillen weiten sich, Muskeln spannen sich an, Blutdruck und Herzfrequenz steigen.[1]

Doch nicht nur physiologische Reaktionen machen den Umgang mit Mathematik schwierig. Wir wissen auch nicht so recht, wo wir sie im System der Wissenschaften überhaupt verorten sollen. Nirgendwo auf der Welt scheint die Mathematik einen festen Platz zu haben. Während Galileo Galilei in ihr die universelle Sprache zu erkennen glaubt, in der die Natur zu uns spricht, ist sie für den Mathematiker Leopold Kronecker die Geisteswissenschaft par excellence, ein Universum der Abstraktion, dessen Wahrheitsgehalt allein auf menschengemachten Regeln basiert. Ihr großes Mysterium ist, dass sie tatsächlich beides zu sein scheint, Natur und Geist: Irreale Vorstellungen, wie die Unendlichkeit, ermöglichen

Was wir von der Welt wissen sollten, 1. Auflage. Jens Bott

es, höchst reale physikalische Gesetze im endlichen Raum zu beschreiben. Mathematik entzieht sich allen gängigen Kategorisierungsversuchen, es gibt keine Schublade, in die sie sich einfach hineinstecken ließe. Wenn wir ihren Beitrag zur Welterklärung verstehen wollen, müssen wir uns also auf eine Gratwanderung zwischen Natur und Geist begeben. Doch wenn wir uns darauf einlassen und Vokabular und Grammatik dieser universellen Sprache erlernen, erhalten wir Zugriff auf eine faszinierende Werkzeugkiste voller einmaliger Weltbeschreibungsinstrumente.

Eine Erfindung der Buchhalter

Menschenaffen und Rabenvögel sind durchaus in der Lage, Mengen einzuschätzen. Schimpansen etwa greifen keine Artgenossen an, wenn die eigene Gruppe nicht mindestens um das Anderthalbfache überlegen ist. Größenordnungen erkennen zu können ist ein evolutionärer Vorteil bei Angriff, Verteidigung oder Futtersuche. Einige Primaten können zudem Mengen bis vier oder fünf genau unterscheiden. Doch weiter geht die Tiermathematik nicht.[2]

Es gibt auch keinerlei Hinweise, dass der Homo sapiens vor Erfindung von Ackerbau und Viehzucht ein mathematisches Verständnis entwickelt hätte, das über das anderer Menschenaffen hinausginge.[3] Auch die wenigen Naturvölker, die bis vor kurzem noch isoliert als Jäger und Sammler lebten, hatten für alles, was eine Handvoll übersteigt, keine exakten Worte – ganz offenbar spielten derlei Größenordnungen in ihrem Alltag schlichtweg keine Rolle.

Mengen größer fünf kann das menschliche Gehirn nicht mehr simultan erfassen, wir müssen daher zählen. Zählen ist die Grundlage aller Mathematik. Als sich infolge der Neolithischen Revolution, dem Anfang bäuerlicher Kulturen, erstmals komplexere soziale Strukturen bildeten, wurde es eine Notwendigkeit. Tauschhandel, Landzuteilung, Erbschaften und Steuern erforderten ein erweitertes Zahlenverständnis, um die neuen, größeren Gemeinschaften organisieren zu können. So trivial es klingt: Die Anfänge der Mathematik waren schnöde Buchhaltungssysteme, bei denen Schreiber einfache Transaktionen auf Tontafeln festhielten.

Die Schreiber hatten dabei zwei Probleme zu lösen. Zunächst musste ein Weg gefunden werden, beim Zählen den Überblick zu behalten. Die erste Technik, die dazu entwickelt wurde, war so einfach wie naheliegend, dass wir sie noch heute auf Bierdeckeln benutzen: Strichlisten (Abb. 1).

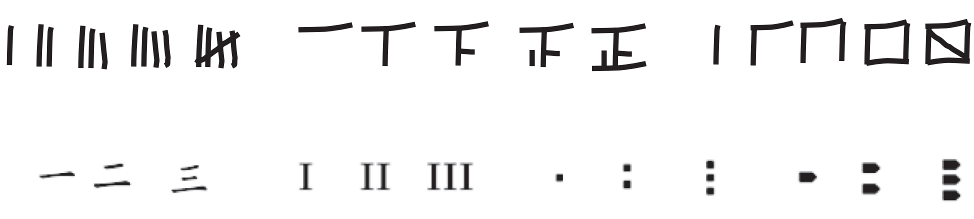

Abb. 1: Oben: Strichlisten aus Europa, Ostasien und Südamerika.
Unten: Die fingerähnlichen Zahlensymbole von eins bis drei der Chinesen, Römer, Maya und Sumerer.

Dass Strichlisten bis heute in verschiedensten Kulturen zu Fünfergruppen zusammengefasst werden, ist kein Zufall: Fünf ist die Zahl der Finger einer Hand. Kleine Kinder zeigen uns, dass es die natürlichste Sache der Welt ist, Finger als Zählhilfe zu nutzen. Fünf Finger mal zwei Hände sind der Ursprung des Dezimalsystems, das sich fast überall auf der Welt durchgesetzt hat. Hätten wir nur acht Finger, wäre unsere Referenz ein Oktalsystem, mit dessen Logik wir dann ebenfalls keinerlei Probleme hätten. Nimmt man zu den Händen auch noch die Füße hinzu, kann man bereits bis 20 zählen. Von der einst weiten Verbreitung des Zwanzigersystems zeugen heute noch Relikte mehrerer europäischer Sprachen, etwa das französische „quatre-vingts" („vier Zwanziger") für achtzig oder die dänischen Zahlwörter „tres" und „firs" für sechzig und achtzig als Verkürzungen von dreimal beziehungsweise viermal zwanzig.

Bei größeren Zahlen stoßen Strichlisten und menschlicher Körper allerdings schnell an natürliche Grenzen; so kam man auf die Idee, weitere Zahlensymbole zu erfinden. Mengen wie 10, 20, 30, 50, 60, 100 oder 1000 wies man eigene Zeichen zu. Das römische und das arabische Zahlensystem benutzen beispielsweise für die Zahl fünfzig die Symbole „L" beziehungsweise „50". Die Verbindung von Menge und Symbol war von nun an lediglich eine Frage der Konvention.

Die zweite Herausforderung war es, die Zahl mit dem zu zählenden Objekt zu verknüpfen; es lag nahe, dies über eine einfache Zeichnung zu tun, etwa ♉ für ein Rind oder  für ein Scheffel Weizen. Dass „zählen" und „erzählen" im Deutschen und anderen Sprachen sehr ähnlich klingen, ist kein Zufall. Mathematik und Schrift haben einen gemeinsamen Ursprung; beide sind eng miteinander verwobene Kulturtechniken, die Ackerbauern und Viehzüchter zwangsläufig entwickeln mussten, um Ordnung in die neue, komplexere Welt zu bringen. Die ersten Schriftkundigen waren somit gleichzeitig Buchhalter, Schreiber und Rechenmeister. Die japanische Sprache erinnert uns heute noch daran, wie eng Zahl und Gezähltes miteinander verbunden sind: Je nachdem, ob es Bäume, Geldscheine, Schwerter, Jahre oder Fragen betrachtet, fordert das Japanische die Verwendung völlig unterschiedlicher Zählwörter.[4]

Zwei Weizenscheffel und zwei Weizenscheffel ergeben vier Weizenscheffel. Vier Ochsen und drei Ochsen ergeben sieben Ochsen. Erst mit der Zeit offenbarte sich den Menschen, was uns heute selbstverständlich erscheint: dass zwei und zwei immer vier ergibt, ganz gleich, was gezählt wird. Zahlen sind stets Zahlen von Etwas, zugleich aber immer auch Zahlen von allem.[5] Einmal gedanklich von den mit ihnen verbundenen Dingen befreit, ließen sich die merkwürdigen Gebilde nun als solche betrachten und auf ihre Eigenschaften hin untersuchen. Es zeigte sich, dass manche Zahlen ohne Rest teilbar waren, andere hingegen nicht, oder dass verschiedene Operationen zu demselben Ergebnis führten. So ließ sich die Zahl zwölf sowohl durch drei mal vier als auch durch zwei mal sechs erzeugen. Außerdem eigneten sich die Zahlen dazu, verschiedene Dinge zueinander in Beziehung zu setzen: Wert oder Gewicht eines Ochsen ließen sich auch in Weizenscheffeln ausdrücken. Reine und angewandte Mathematik förderten eine neue Form abstrakten Denkens, die bis heute eine der herausragendsten Kulturleistungen der Menschheit bleibt.

Bald zeigte sich, dass sich mit Zahlen auch die Regelhaftigkeit der Natur beschreiben ließ. Für die frühen bäuerlichen Hochkulturen war das Wissen um jahreszeitliche Rhythmen, die periodische Wiederkehr von Tagundnachtgleichen, Sommer- und

Wintersonnenwende, oftmals eine Frage des Überlebens. Der Schlüssel zum Verständnis der Natur stand ganz offenbar in den Sternen. Mit Mathematik ließ sich die himmlische Ordnung erstmals aufdecken und darstellen. Die Priester-Astronomen, die anhand von Sonnenständen und Mondphasen das nächste Hochwasser an Euphrat oder Nil vorhersagen konnten, gelangten so zu Macht und Einfluss. Spätestens jetzt war Mathematik auch ein Herrschaftsinstrument.

Vor 4.000 Jahren war das Sexagesimalsystem, das auf der Zahl sechzig basiert, Grundlage der babylonischen Mathematik. Das Jahr hatte 360 Tage, unterteilt in 12 Monate zu je 30 Tagen. (Eine Ungenauigkeit, die zwangsläufig häufige Schaltmonate nötig machte.) Unsere Zeitrechnung mit 60 Sekunden und Minuten, 24 Stunden und 12 Monaten, ist ein Überbleibsel dieses Denkens, ebenso die Einteilung des Kreises in 360 Grad. Neben seiner astronomischen Bedeutung hatte das Sexagesimalsystem aber auch noch einen ganz irdischen Vorzug, den es auf den Märkten des Zweistromlands täglich unter Beweis stellen konnte: Die Basiszahl 60 ist durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 und 60 ohne Rest teilbar; Güter, die nach diesem System gehandelt wurden, waren daher in den meisten Fällen leicht aufzuteilen. Das war außerordentlich hilfreich, denn mit Zahlen, die man beim Teilen „zerbrechen" musste, wussten die Babylonier noch nicht so recht umzugehen.

Der logische Vierklang

Der Papyrus Rhind zählt heute zu den großen Schätzen des Britischen Museums. Benannt ist er nach dem jung verstorbenen schottischen Anwalt Alexander Rhind, der ihn 1858 in den engen, staubigen Gassen von Luxor aufgestöbert hatte. Die umfangreiche und vielseitige mathematische Aufgabensammlung gibt uns einen faszinierenden Einblick in das hoch entwickelte Mathematikverständnis der frühen Kulturen im Fruchtbaren Halbmond, ohne das Leistungen, wie der Bau der Pyramiden undenkbar gewesen wären. Der Papyrus macht aber auch deutlich, dass sich dieses Verständnis von unserem heutigen noch grundlegend unterschied. Die Auseinandersetzung mit den Zahlen hatte einen handwerklichen Charakter. Mathematische Behauptungen waren dann gültig, wenn sie sich mit Beobachtungen deckten. Vermutete Zusammenhänge, wie der bereits bekannte Satz des Pythagoras, wurden experimentell überprüft.

Wenn uns diese Vorgehensweise heute befremdlich anmutet, liegt das an Euklid von Alexandria. Über das Leben des Griechen um das Jahr 300 v. Chr. ist fast nichts bekannt, doch wir dürfen davon ausgehen, dass er in der hellenistischen Metropole am Nil mit dem mathematischen Wissen der Ägypter und anderer Völker der antiken Welt in Berührung kam. Euklid etablierte eine neue Betrachtungsweise, die sich nicht mehr mit der empirischen Überprüfung von Vermutungen zufriedengab. Das neue Denken war Ausgangspunkt einer tiefgreifenden Revolution, die unser Mathematikverständnis bis heute prägt.

Den strukturierten Weg zur mathematischen Wahrheit fand Euklid in der philosophischen Disziplin der Logik. Auf ihrer Grundlage beschrieb er erstmals eine Methode, nach der seitdem mathematisches Wissen dargestellt, überprüft und weiterentwickelt wird. Dargelegt hat er sie in seinem Werk „Die Elemente", einem der bis heute größten Bestseller der Wissenschaftsgeschichte. Allein seit Erfindung des Buchdrucks wurde es mehr als tausendmal aufgelegt und für die Studenten Europas und des Vorderen Orients war es von der Antike bis zum Ende des 19. Jahrhunderts *das* Standardwerk für Geometrie.

Euklids Vorgehensweise beruht auf drei Pfeilern: Der erste Pfeiler sind Definitionen. Sie beschreiben das betrachtete Objekt rein sprachlich. Der zweite Pfeiler besteht darin, Vermutungen über Eigenschaften des definierten Objekts zu formulieren. Der dritte Pfeiler ist deren logische Überprüfung. Gelingt sie, ist ein Beweis erbracht – er erhebt die Vermutung in den Rang eines mathematischen Satzes.

Die Definition eines Objekts kann etwa lauten: „Ein Rechteck ist ein Viereck, dessen Innenwinkel alle rechte Winkel sind." Eine Vermutung, die man über das Rechteck anstellen kann, wäre beispielsweise: „Die Summe der Innenwinkel eines Rechtecks beträgt 360°". Da ein rechter Winkel 90° hat, ist die Aussage leicht zu beweisen. Doch das erklärt weder, was ein Viereck und ein rechter Winkel ist, noch warum letzterer immer 90° hat. Der Beweis baut also auf anderen Definitionen und Aussagen auf, die ihrerseits erst definiert und bewiesen sein müssen, bevor sich ein mathematisches Theorem aus ihnen ableiten lässt. Auf diese Weise wird die gesamte Mathematik zu einer komplexen Hierarchie von aufeinander aufbauenden Definitionen und logischen Beweisführungen.

Wo aber ist das Fundament, das die Pfeiler dieser Argumentationskette trägt? Hier kommen die Axiome ins Spiel. Sie stellen die unterste Ebene der Hierarchie dar, die Statik des gesamten Konstrukts hängt von ihnen ab. Axiome sind einfache Aussagen, die sich unmittelbar nachvollziehen lassen und daher keines Beweises mehr bedürfen. Sie sind unstrittig, weil sie der Anschauung und damit letztlich dem „gesunden Menschenverstand" entsprechen. So wie die Aussage: „Eine Gerade ist in einem Raum der kürzeste Weg zwischen zwei voneinander verschiedenen Punkten." Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass die meisten Axiome uns etwas darüber sagen, wie wir den Raum wahrnehmen. Ohne Raum ist Mathematik nicht vorstellbar; nur weil es ihn gibt, können die Objekte unserer Betrachtung existieren und unterschieden werden.

Kinder stellen gerne „Warum-Fragen". Gibt man ihnen eine Erklärung, fragen sie nach dem Warum der Erklärung. Irgendwann kommt der Punkt, wo man – vielleicht ein bisschen hilflos – sagt: Weil es einfach so ist! Genauso ist es mit den Axiomen. Sie sind nicht weiter zerlegbar. Sie enthalten keine Beschreibung mehr, sondern stellen nur noch Anforderungen an den beschriebenen Gegenstand. Nur Axiome, Definitionen und bereits bewiesene Sätze stehen zur Verfügung, um Vermutungen zu bestätigen und so mathematisches Wissen zu erweitern. Das Zusammenspiel von Axiom, Definition, Vermutung und Beweis ist der Vierklang unseres heutigen Mathematikverständnisses.

Die mathematische Beweisführung hat Entsprechungen in den anderen Wissenschaften: Der Vermutung entspricht die Hypothese, der Beweis dem Experiment, der Satz der Theorie. Der entscheidende Unterschied besteht darin, dass die von den Griechen eingeführte Methodik keine empirische, sondern allein eine philosophische Überprüfung voraussetzt, einen rein logisch hergeleiteten Nachweis, der nur eine Interpretation zulässt. Wissenschaftliche Theorien haben hingegen ein Verfallsdatum; ihre Erkenntnisse sind immer nur vorläufig und können jederzeit durch neue Einsichten widerlegt werden. Den mathematischen Gesetzen aber mutet etwas Ewiges, Absolutes an. Es ist die Widerspruchsfreiheit, die ihnen ihre unglaubliche Haltbarkeit verleiht und

Welterklärungswerkzeuge von erstaunlicher Stabilität entstehen lässt.[6] Dass ein logischer Beweis nach Jahrtausenden noch genauso gültig ist, wie an dem Tag, an dem er zum ersten Mal erbracht wurde, verleiht der Mathematik eine Einzigartigkeit und Faszination, die sie – zumindest für viele Mathematiker – zur reinsten und schönsten aller Wissenschaften macht, zu der Disziplin, die sich der Wahrheit an weitesten anzunähern vermag.

Vor 2.300 Jahren haben die Griechen aus einer Erfahrungswissenschaft eine abstrakte Kunst gemacht. Von diesem festen Fundament aus ließen sich nun nach und nach die Geheimnisse von Arithmetik, Geometrie, Algebra, Analysis und Stochastik erforschen.

Zahlenspiele

Seit der Antike versuchen Gelehrte die Eigenschaften der Zahlen zu erkunden und zu verstehen, wie sich mit ihnen am besten operieren lässt, zwei Felder, die wir heute als Zahlentheorie und Arithmetik bezeichnen. Die grundlegende Operation, um das Zählen abzukürzen, ist die Addition: $7 + 4 = 11$. Eine der ersten Einsichten war, dass sich das Zusammenzählen der immer gleichen Zahl vereinfachen lässt: $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ lässt sich bequemer als $5 \cdot 4$ ausdrücken. So wie die Addition eine Verkürzung des Zählens ist, ist die Multiplikation nichts anderes, als eine verkürzte Addition. Die Reihenfolge, in der Addition und Multiplikation ausgeführt werden, spielt keine Rolle; $4 + 7$ oder $4 \cdot 5$ führt zu den gleichen Ergebnissen. Für die Umkehrung der Addition, die Subtraktion, gilt das jedoch nicht: $7 – 4$ ist nicht dasselbe wie $4 – 7$. Die letzte Operation warf zudem ein neues Problem auf: Das Ergebnis war weniger als Nichts. Offensichtlich gab es auch Zahlen, die keinen Bezug zu den natürlichen Dingen dieser Welt haben und ebenso offensichtlich hatte jede positive Zahl einen negativen Zwilling.

Verwirrend waren auch manche Ergebnisse, die man erhielt, wenn man die Multiplikation umkehrte. 20 durch 4 oder 5 zu teilen war logischerweise kein Problem. Doch die Division 5:2 ließ sich mit den bisher bekannten Zahlen nicht beschreiben. Offenbar gab es neben den positiven und negativen „ganzen“ auch noch „zerbrochene“ Zahlen. Noch verworrener wurde es, wenn man 10 durch 3 oder 4 durch 7 teilte. Die Ergebnisse waren unendlich lang und bestanden entweder aus der immer selben Zahl oder einer nicht enden wollenden, sich ständig wiederholenden Zahlenfolge. Damit waren drei verschiedene Arten von Zahlen gefunden. Zahlen, die man realen Objekten zuordnen kann, bezeichnen wir heute als natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$). Ihre Erweiterung um die negativen Zahlen bildet die Menge der ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$). Verhältnisse zweier ganzer Zahlen erweitern die Zahlenmenge zum Kreis der rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$).

Um 530 v. Chr. gründete der griechische Philosoph Pythagoras in Süditalien – damals eine hellenische Kolonie – eine Gemeinschaft mit sektenartigen Zügen. Die Religion der Pythagoreer war die Zahl. Sie war die kreative Kraft des Universums, Ausdruck einer göttlichen Harmonie und Schlüssel zum Verständnis der materiellen Welt. Die wichtigsten Zahlen waren die von 1 bis 4: 1 stand für den Punkt; 2 für die Linie, die Verbindung zweier Punkte; 3 für die Fläche, die sich aus der Verknüpfung dreier Punkte ergibt. Die 4 erhob das Dreieck zu räumlichen Figur des Tetraeders. Zusammen ergaben die ersten vier Zahlen die „vollkommene Zahl“ 10, Grundlage des Dezimalsystems.

Auch die Musik war Teil dieser universellen, göttlichen Ordnung. Das Monochord, ein Instrument mit nur einer Saite, lieferte hierfür den Beweis: Teilte man die Saite im Verhältnis 2:1, entstand eine Oktave, der reinste Klang, den zwei Töne zusammen hervorbringen können. Das Verhältnis von 3:2 ergab eine Quinte, 4:3 eine Quarte. Die einfachen Zahlenverhältnisse schufen wundervolle Harmonien, je einfacher, desto schöner. Je komplizierter das Zahlenverhältnis jedoch, desto mehr versündigte man sich gegen das kosmische Prinzip. Das Verhältnis von 256:243 ergab eine kleine Sekunde, den geradezu schmerzlichen Halbtonschritt.

Alles war Zahl und folgte göttlichen Gesetzen. Wir können uns daher die Verzweiflung der Pythagoreer vorstellen, als sie bei ihren Erkundungen auf Zahlen stießen, die sich nicht als Verhältnis natürlicher Zahlen darstellen lassen. Das kann – ausgerechnet – beim Satz des Pythagoras der Fall sein: Wenden wir $a^2 + b^2 = c^2$ auf ein rechtwinkliges Dreieck an, bei dem die Seiten a und b jeweils die Länge von 1 haben, ist die längste Seite c, die Hypotenuse, dann definitionsgemäß die Wurzel aus 2 ($\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$). Diese Zahl lässt sich bis in die Unendlichkeit nachverfolgen, ohne dass jemals ein Muster erkennbar würde, die jeweils nächste Stelle ist vollkommen dem Zufall überlassen. Offenbar hatte die Zahlenfamilie mit den end- und musterlosen Brüchen, die sich nicht als Verhältnis, als Ratio, ausdrücken ließen, ein neues Mitglied bekommen: Die irrationalen Zahlen erweiterten das Zahlenheer zur Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Bei aller Fortschrittlichkeit verfügte die antike griechische Mathematik nicht über einige der uns heute selbstverständlich erscheinenden zahlentheoretischen Konzepte. Negative Zahlen waren unbekannt, so dass rationale Zahlen lediglich Beziehungsverhältnisse natürlicher Zahlen darstellten. Noch im 3. nachchristlichen Jahrhundert hatte der griechische Mathematiker Diophantos von Alexandria die Gleichung $4x + 20 = 4$, die mit $x = -4$ eine Lösung hat, als absurd bezeichnet, während man in China zu dieser Zeit seit bereits mindestens 400 Jahren mit negativen Zahlen operierte.[7]

Zudem fehlte eine Zahl, die sich weder Griechen noch Chinesen vorzustellen vermochten: die Null. Tatsächlich dauerte es eine ganze Weile, bis sich die Idee durchsetzen konnte, dass auch das Nichts eine mathematische Existenzberechtigung hat. Erstmals wurde die Null anfangs des 7. Jahrhunderts in einem Werk des indischen Mathematikers Brahmagupta beschrieben, sie ist damit eine erstaunlich junge Erfindung.[8] Die Null ist eine Eingebung von genialer Einfachheit. Sie entsteht, wenn man eine Zahl von sich selbst abzieht. In gewisser Weise entpuppt sich dann die zahlgewordene Abwesenheit als die mächtigste Ziffer überhaupt: Nimmt man mit dem „Nichts“ mal, wird jede noch so große Zahl dadurch vollständig vernichtet. Heute wird die Null in der Regel der Familie der natürlichen Zahlen zugeordnet – zumindest besagen dies DIN-Norm 5473 und ISO-Standard 80000-2, allerdings ohne eine inhaltliche Begründung zu liefern.

Dass auch die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ noch nicht das Ende des Zahlenuniversums ist, offenbarte sich dann im 16. Jahrhundert. Der Umstand, dass minus mal minus plus ergibt (so wie eine doppelte Verneinung eine Bejahung ist), führt schon bei sehr einfachen Gleichungen wie $x^2 = -1$ zu einem Problem, das sich mit reellen Zahlen nicht in den Griff bekommen lässt: Ganz gleich, ob man für x einen positiven oder negativen Wert einsetzt, das quadrierte Ergebnis wird immer eine positive Zahl sein. Dieses Dilemma brachte italienische Mathematiker der Renaissance auf die bemerkenswerte Idee, sich einfach eine Zahl vorzustellen, die die Quadratwurzel einer negativen Zahl repräsentiert. Die imaginäre Zahl „*i*“ ist ein Phantom, weder positiv noch negativ, doch sie weist den Weg aus der Zwickmühle. Die Menge aller imaginären Zahlen erweitert den Raum der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zur Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Unser heutiges Zahlenverständnis ist das Ergebnis einer historischen Entwicklung und in seinem aktuellen Umfang noch relativ jung. Von der bodenständigen Vorstellung natürlicher Zahlen ausgehend, führten arithmetische Spielereien zu den immer abstrakter werdenden Konzepten von Negativität, Rationalität, Irrationalität und Komplexität (Abb. 2).

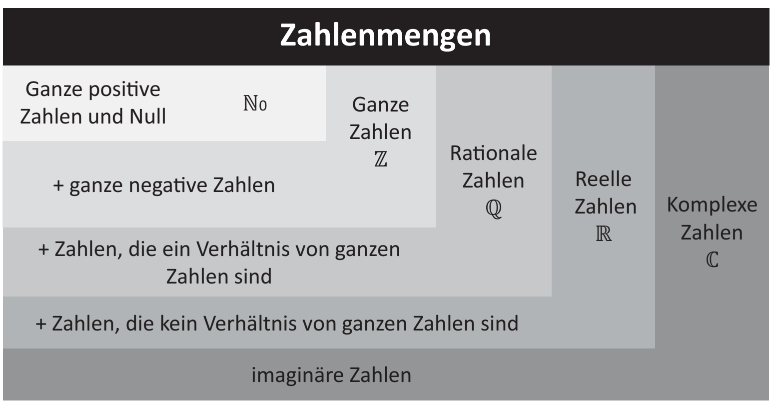

Abb. 2: Zahlenmengen.

Auch die Darstellung von Mathematik durchlief eine lange Entwicklung. Ägypter, Griechen und Römer verwendeten Additionssysteme, bei denen sich der Zahlenwert durch die Addition der einzelnen Ziffern ergibt. In dem bekannten römischen Additionssystem wird die Zahl 1777 als MDCCLXXVII dargestellt, wobei M für Tausend, D für fünfhundert, C für hundert, L für fünfzig, X für zehn, V für fünf und I für eins steht. Jede beliebige andere Anordnung der Zahlensymbole führt stets zum selben Ergebnis. Dass sich mit einem solchen System keine großen operativen Sprünge machen lassen, liegt auf der Hand. Wie bei der Null kam auch hier die Lösung aus Indien. Dort entwickelte sich etwa ab dem 5. Jahrhundert ein System, bei dem die Bedeutung einer Zahl von ihrer Position in der Ziffernfolge abhängt. Liegt einem solchen Stellenwertsystem das Dezimalsystem zugrunde, steht die letzte Stelle für die Zahlen von null bis neun, die vorletzte für die Zahlen von zehn bis neunundneunzig, die drittletzte für Zahlen zwischen einhundert und neunhundertneunundneunzig und so weiter. Bei 503 steht die „5“ also für 500, bei 305 aber nur für 5. Das Stellenwertsystem mit der Null ermöglichte den praktischen Umgang mit gewaltigen Zahlen und die schnelle Durchführung komplexer

Rechenoperationen. Innerhalb von Sekunden ließen sich nun Milliardenbeträge addieren, obwohl ein Leben nicht ausreichen würde, bis zu dieser Summe zu zählen.

Das Stellenwertsystem, die Null und die indischen Zahlensymbole gelangten erst am Ende des Mittelalters über arabische Händler nach Europa. In den aufstrebenden norditalienischen Handelsmetropolen wie Venedig, Florenz, Pisa und Genua, die ab dem 13. Jahrhundert die Neuzeit vorbereiteten, wurde das Potential des neuen indo-arabischen Systems rasch erkannt – dem aufblühenden Kreditwesen kam es jedenfalls wie gerufen.

„Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik die Königin der Mathematik". Mit seinem Zitat weist einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten, Carl Friedrich Gauß (1777–1855), der Kunst des Rechnens die zentrale Rolle zu. Neben Zahlentheorie, Zahlensystemen und Verknüpfungsregeln gehört die Frage der Teilbarkeit zu den elementaren Betrachtungsgegenständen der Arithmetik. Euklid war wohl der Erste, der erkannte, dass das ganze arithmetische System auf dem Fundament der Primzahlen ruht. Primzahlen sind alle natürlichen Zahlen, die größer als eins und nur durch eins und sich selbst teilbar sind, also 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29… Der „Fundamentalsatz der Arithmetik" besagt, dass jede positive ganze Zahl als ein Produkt von Primzahlen dargestellt werden kann. Die Zahl 18 ergibt sich beispielsweise als Verknüpfung der Primzahlen 2 und 3:$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Genauso ergibt sich 9108 als das Produkt von $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$. Das Besondere an diesem Gesetz ist, dass es für jede Zahl immer nur eine einzige Möglichkeit gibt, sich aus Primzahlen herzuleiten. 9108 kann nur aus der genannten Verknüpfung von 2, 3, 11 und 23 entstehen, es gibt keine andere mögliche Kombination.[9] So wie die chemischen Elemente die Bausteine aller Moleküle sind, sind Primzahlen die Grundlage aller in der Natur vorkommenden Zahlen.

Seit der Antike versuchen die Menschen das geheimnisvolle Wesen primer Zahlen zu enträtseln. Schon Euklid wusste, dass ihre Menge unendlich groß sein muss. Sein Beweis war der folgende: Wäre die Anzahl der Primzahlen endlich, dürfte sich jenseits der letzten keine weitere Primzahl mehr finden lassen. Man kann sich nun eine Zahl Z vorstellen, die das Produkt aller endlichen Primzahlen + 1 ist: $Z = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot\ldots\cdot \mathrm{P}_n + 1$. Wäre Z eine zusammengesetzte Zahl, müsste sie sich aufgrund des Fundamentalsatzes der Arithmetik restlos in Primfaktoren zerlegen lassen. Teilt man Z aber durch eine beliebige Primzahl, wird stets ein Rest von 1 übrigbleiben. Weil Z keine Primfaktoren hat, muss sie also definitionsgemäß eine Primzahl sein. Damit ist aber auch die Aussage, dass die durch $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot\ldots\cdot P_n$ dargestellte Reihe endlich ist, zwangsläufig falsch. Euklid demonstrierte seinen Gedankengang anhand der ersten drei Primzahlen: Wären 2, 3 und 5 alle existierenden Primzahlen, wäre $Z = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$. 31 ist aber ebenfalls eine Primzahl, die in der vermeintlich „endlichen" Reihe nicht enthalten ist.

Eratosthenes von Kyrene, der rund 100 Jahre nach Euklid in Alexandria lebte, fand eine einfache Methode, mit der sich Primzahlen systematisch ermitteln lassen. Man beginnt mit der ersten Primzahl 2 und markiert alle Vielfachen von ihr, die somit zwangsläufig zusammengesetzte Zahlen sind. Genauso verfährt man mit der 3. Die 4 muss nicht mehr beachtet werden, denn sie ist ein Vielfaches von 2. Für die 5 werden wiederum alle Vielfache markiert und so weiter (Abb. 3).

Das Sieb des Eratosthenes macht schon für die ersten 100 Ziffern deutlich, dass die Primzahlen völlig willkürlich im Raum verteilt sind. Und so geht es auch jenseits der 100 weiter. Diese seltsame Musterlosigkeit hat die Mathematiker von Anfang an herausgefordert.

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

Abb. 3: Das Sieb des Eratosthenes.

Gibt es eine Formel, mit der sich Primzahlen berechnen lassen? Wenn ja, so wurde sie bis heute noch nicht gefunden.[10] Die einzig erkennbare Gesetzmäßigkeit ist die, dass der Abstand von einer Primzahl zur nächsten tendenziell größer wird, so dass es zunehmend Schwierigkeiten bereitet, große Exemplare in der Tiefe des Zahlenraums aufzustöbern: Unter den ersten 100 natürlichen Zahlen finden sich 25 Primzahlen. Zwischen 101 und 200 gibt es nur noch 21, für die nächsten 100 schrumpft die Gruppe auf 16. 1793 stellte der 15-jährige Carl Friedrich Gauß fest, dass sich die abnehmende Primzahlendichte anhand einer Formel abschätzen lässt. An der grundsätzlichen Regellosigkeit der Primzahlenverteilung im Zahlenraum ändert dies allerdings nichts. So folgen die Primzahlenzwillinge 824633702441 und 824633702443 direkt aufeinander.

Die elementaren Bausteine der mathematischen Ordnung scheinen selbst völlig ungeordnet zu sein, das Fundament der Arithmetik ist offenbar ein chaotisches Tohuwabohu. Und genau das macht die Primzahlen für die Kryptologie interessant. Die heutige Internetsicherheit beruht im Kern darauf, dass es sehr schwierig ist, sehr große Primzahlen zu finden. Durch die Multiplikation großer Primfaktoren können leicht gigantische Zahlen erzeugt werden; um den Code zu knacken, müssten die zugrundeliegenden Faktoren ermittelt werden. Dies ist beim heutigen Stand der Technik selbst für die leistungsfähigsten Computer mit einem mehrtausendjährigen Rechenaufwand verbunden. Fände jemand eine Formel für Primzahlen, würde dies über Nacht unsere gesamte Internetkryptographie aus den Angeln heben. Für Mathematiker wäre die Formel ein Traum – für den Rest der Menschheit ein Alptraum.

Der Umgang mit großen Zahlen war seit jeher eine Herausforderung. Als hilfreich erwies sich die Erkenntnis, dass sich auch die Multiplikation, ihrerseits eine verkürzte Additionen, mit Hilfe von Potenzen noch einmal verdichten ließ: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$. Der griechische Mathematiker und Ingenieur Archimedes von Syrakus (um 287-212 v. Chr.) bewies, dass sich Potenzen multiplizieren lassen, indem man ihre Exponenten addiert: $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$: Also: $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$ anstelle von $100 \cdot 1.000 = 100.000$. Das Wurzelziehen war wiederum nichts Weiteres als die Umkehr dieses Verdichtungsprozesses: $\sqrt[5]{100.000} = 10$.

In der Antike waren Größenordnungen, die mehrere Zehntausend überschritten, selten. (Die ägyptische Hieroglyphe für eine Million war auch das Symbol für den Gott der Unendlichkeit, Heh.) Das änderte sich, als in Europa im 16. Jahrhundert, Handel und Wissenschaften aufblühten. Da nun auch im Wortsinne astronomische Zahlen eine Rolle spielten, kam dem

Rechnen mit Exponenten plötzlich praktische Bedeutung zu. Der schottische Mathematiker John Napier (1550–1617) begann Anfang des 17. Jahrhunderts, Gleichungen im Stil von $10^3 = 1.000$ nach dem Exponenten aufzulösen und als Logarithmen darzustellen: Der Logarithmus von 1.000 zur Basis 10 ist 3. Logarithmen sind also nichts anderes als Exponenten. Napier berechnete solche Logarithmen für alle gängigen Zahlen. So ergibt $10^{2{,}994}$ beispielsweise die Zahl 987. Er veröffentlichte umfangreiche Tafeln, in denen man Logarithmen nachschlagen, addieren und das Additionsergebnis zurückübersetzen konnte. Das Produkt von $987 \cdot 113$ ergibt sich dann als $10^{2.994 + 2.053} = 10^{5.047} = 111.429{,}453$. Das Resultat ist kein exakter Wert, aber eine gute Näherung, die sich rasch und mit geringem Fehlerrisiko ermitteln lässt. Heute finden wir logarithmische Darstellungen vor allem noch in der Wissenschaft, etwa beim pH-Wert oder bei der bekannten Richterskala, die die Stärke von Erdbeben misst: Ein Erdbeben der Stärke sieben ist tausendmal stärker als ein Beben der Stärke vier.

Zu einer Zeit, zu der es weder Taschenrechner noch Computer gab, erlaubte das Rechnen mit Potenzen schlicht und ergreifend viel Zeit zu sparen. (Der französische Mathematiker Pierre-Simon Laplace (1749–1827) meinte sogar, dass sich durch Napiers Logarithmen die Lebenszeit der Astronomen verdoppelt habe.) Dies ist letztlich der Grund, warum wir uns auch heute noch in der Schule jahrelang mit kleinsten gemeinsamen Vielfachen, größten gemeinsamen Teilern, dem Kürzen von Brüchen und binomischen Formeln abmühen: In allen Fällen handelt es sich ursprünglich um historisch wichtige Verfahren, mit denen sich der Umgang mit den vier Grundrechenarten vereinfachen und lange Rechenwege abkürzen ließen. Noch heute können wir daraus lernen, in welchen Beziehungen die Zahlen zueinander stehen.

Auf einen besonders schönen Rechentrick verfiel der siebenjährige Carl Friedrich Gauß, als sein Volksschullehrer – der wahrscheinlich nur ein bisschen Ruhe haben wollte – die Klasse aufforderte, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Gauß kam schon nach wenigen Minuten mit der richtigen Antwort: 5050. Er hatte erkannt, dass die erste und die letzte Zahl der Reihe, die zweite und die vorletzte, die dritte und die drittletzte und so weiter, zusammen jeweils 101 ergeben. Insgesamt gibt es 50 solcher Zahlenpaare. In ihrer allgemeinen Form lautet die Gaußsche Summenformel bis zur Zahl n aufaddiert: $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Für $n = 100$ ergibt sich also: $\frac{100\cdot(100+1)}{2} = 5050$.

Die Kette $1 + 2 + 3 \ldots + 98 + 99 + 100$ besteht, einschließlich der Operanden, aus 199 Zeichen (entsprechend mehr für größere Summen). Gauß‘ Formel reduziert den Zahlenbandwurm auf nur neun Zeichen, die uns umgehend zum Ziel führen. Die Arithmetik kann uns daher auch noch in Zeiten des Taschenrechners wichtige Kernkompetenzen vermitteln: Zusammenfassen, Vermindern, Reduzieren, Verdichten, Verallgemeinern. So erlaubt sie es uns, trotz zahlloser Bäume den mathematischen Wald nicht aus den Augen zu verlieren.

Idee und Form

Das griechische Wort „Mathematik“ lässt sich etwas diffus mit „Wissen“, „Studieren“ oder auch „Lernen“ übersetzen. Geometrie bedeutet im Griechischen hingegen schlicht „Landvermessung“ – ein für die Vermittlung von Weltbildern besonders nützlicher Begriff. Die Geometrie ist die anschaulichste aller mathematischen Disziplinen und kommt zudem völlig ohne Zahlen aus.

Auch der Ursprung der Geometrie liegt in den frühen Flusskulturen. Sie standen vor der Notwendigkeit, Acker- und Weideland nach den jährlichen Überschwemmungen neu aufteilen zu müssen. Die mathematischen Techniken, die damals an Euphrat, Nil, Indus und Gelbem Fluss entstanden, finden bis heute bei Architekten, Ingenieuren und Landvermessern Anwendung. Mit der Zeit offenbarten sich den Ackerbauern bestimmte Muster. So fanden sie heraus, dass zwei quadratische Felder mit einer Länge von jeweils 30 und 40 Schritten, zusammen genauso viel Arbeit machen, wie ein Feld mit einer Länge von 50 Schritten. Abermals waren es die Griechen, die den Fragen der Landvermessung als Erste systematisch nachgingen. Den Punkt, Anfang aller Geometrie, definierte Euklid als „das, was keine Teile hat“. Bewegt sich der dimensionslose Punkt durch den Raum, lässt er Linien, Dreiecke, Kreise, Quadrate, Kugeln oder Dodekaeder entstehen. Wie die Zahl „*i*“ oder die Unendlichkeit haben auch diese geometrischen Figuren keine Entsprechung in der realen Welt. Doch darum geht es auch nicht. Es geht um die „Idee“ des Kreises, um die Vorstellung eines Konstrukts bei dem sämtliche Punkte denselben Abstand zum Mittelpunkt haben – auch wenn sich in der Natur nichts findet, was diese Bedingung exakt erfüllen würde. Für die Griechen waren die perfekten Flächen und Körper Ausdruck kosmisch-göttlicher Ordnungsprinzipien, die unveränderlich und zeitlos in jedem Winkel des Universums ihre Gültigkeit haben – eine Vorstellung, die, wie wir noch sehen werden, in der Philosophie Platons eine zentrale Rolle spielt.

Von Euklid sind eine Reihe geometrischer Aufgaben überliefert, zu deren Lösung er keine anderen Hilfsmittel zuließ, als Lineal und Zirkel. Einige dieser antiken Herausforderungen mussten über 2.000 Jahre auf eine Lösung warten: Erst 1882 gelang Ferdinand von Lindemann der Beweis der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises, der Nachweis, dass sich aus einem Kreis allein mit den beiden von Euklid genehmigten Werkzeugen kein Quadrat mit identischem Flächeninhalt konstruieren lässt. Ein besonderer Coup gelang bereits 1796 dem achtzehnjährigen Gauß, als er allein mit Lineal und Zirkel ein gleichmäßiges Siebzehneck konstruierte. Später konnte Gauß zeigen, dass es einen Zusammenhang zwischen der Konstruierbarkeit von regelmäßigen Polygonen und den Fermatschen Primzahlen gibt. Damit hatte er eine weitere unter den zahlreichen Verbindungen zwischen Geometrie und Zahlentheorie aufgedeckt (Abb. 4).[11]

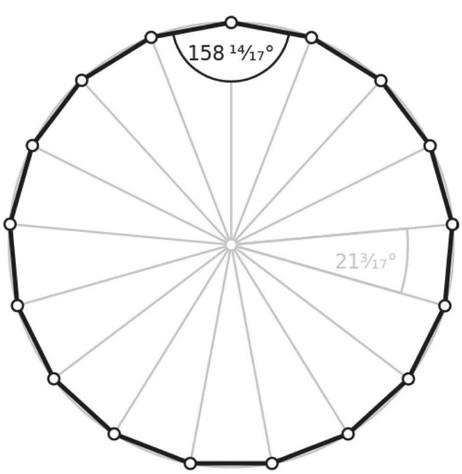

Abb. 4: Gleichmäßiges Siebzehneck.