

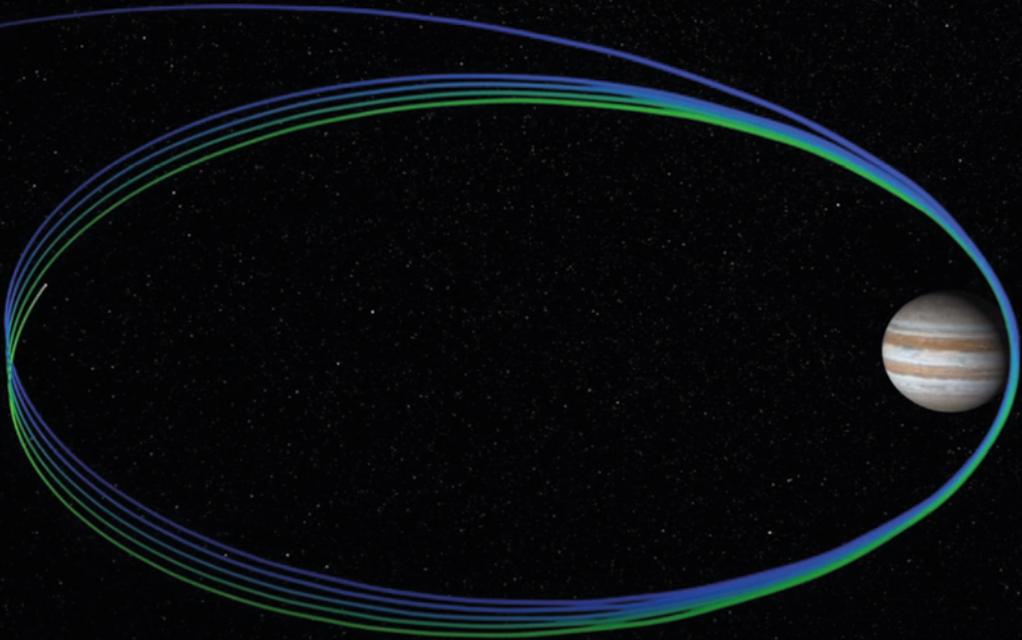


Editorial Universidad de Antioquia

Mecánica celeste

Teoría, algoritmos y problemas

Jorge I. Zuluaga



Ciencia y Tecnología

Jorge I. Zuluaga

Mecánica celeste

Teoría, algoritmos y problemas

Mecánica celeste

Teoría, algoritmos y problemas

Jorge I. Zuluaga

Ciencia y Tecnología

Editorial Universidad de Antioquia

Colección *Ciencia y Tecnología*

© Jorge I. Zuluaga

© Editorial Universidad de Antioquia

ISBN: 978-958-501-195-3

ISBNe: 978-958-501-196-0

DOI: doi.org/10.17533/udea.978-958-501-196-0

Primera edición: abril del 2024

Motivo de cubierta: animación de la órbita de la nave espacial Juno de la NASA en Júpiter. NASA/JPL

Hecho en Colombia / Made in Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de la Editorial Universidad de Antioquia

Editorial Universidad de Antioquia

(+57) 604 219 50 10

editorial@udea.edu.co

<http://editorial.udea.edu.co>

Apartado 1226. Medellín, Colombia

Imprenta Universidad de Antioquia

(+57) 604 219 53 30

imprenta@udea.edu.co

El contenido de la obra corresponde al derecho de expresión del autor y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. El autor asume la responsabilidad por los derechos de autor y conexos contenidos en la obra, así como por la eventual información sensible publicada en ella.

Contenido

Agradecimientos	xv
Prefacio	xvii
Introducción	xix
0.1 ¿Otro libro de mecánica celeste?	xix
0.2 Mecánica celeste en Python	xxii
0.3 Mecánica celeste con SPICE	xxiv
0.4 ¿Qué hace distinto a este libro? Un decálogo	xxvi
0.5 ¿Cómo se organiza este libro?	xxvii
0.6 ¿Cómo usar este libro?	xxxiv
0.7 Idioma y notación	xxxvi
0.7.1 Palabras extranjeras y guía de pronunciación	xxxvi
0.7.2 Siglos y décadas	xxxvii
0.7.3 Notación matemática	xxxvii
0.8 Elementos no textuales	xxxviii
0.8.1 Cajas de texto	xxxviii
0.8.2 Algoritmos	xlii
0.9 El paquete pymcel y otras herramientas en línea	xlvi
1 Fundamentos matemáticos y físicos	1
1.1 Vectores y cálculo	1
1.1.1 Conjunto, tuplas y vectores	2
1.1.2 Sistemas de coordenadas	9
1.1.3 Funciones	11
1.1.4 Derivadas	14
1.1.5 Funciones homogéneas	16
1.1.6 Derivada vectorial	17
1.1.7 Integrales	19
1.1.8 Integrales vectoriales	21
1.1.9 Ecuaciones diferenciales	23
1.1.10 Funcionales y cálculo de variaciones	30
1.1.11 Series infinitas	38
1.2 Curvas cónicas	53
1.2.1 Definición geométrica	54
1.2.2 Del nombre al álgebra	55
1.2.3 Directriz de las cónicas	57
1.2.4 Síntesis geométrica	60
1.2.5 Descripción algebraica	61

1.2.6	Ecuación respecto al centro	62
1.2.7	Eje mayor y eje menor de la elipse	63
1.2.8	Parámetros de la hipérbola.....	64
1.2.9	Rotación de las cónicas en el plano.....	66
1.2.10	Ecuación general de las cónicas	68
1.2.11	Gráfico de una cónica rotada en el plano.....	69
1.2.12	Síntesis algebraica.....	75
1.2.13	Cónicas en coordenadas cilíndricas.....	76
1.2.14	Anomalías	80
1.2.15	Área de las cónicas	83
1.2.16	Cónicas en el espacio.....	88
1.2.17	Ángulos de Euler.....	88
1.2.18	Matrices generales de rotación	90
1.2.19	Gráfico de una cónica rotada en el espacio	92
1.2.20	Elementos orbitales	93
1.3	Fundamentos de mecánica newtoniana	97
1.4	Cinemática.....	99
1.4.1	Cantidades cinemáticas	99
1.4.2	Sistemas de referencia.....	101
1.4.3	La ecuación de movimiento (edm)	103
1.4.4	Integración de la edm.....	105
1.4.5	Integración por cuadraturas	105
1.4.6	Integración numérica de la edm	109
1.5	Dinámica	116
1.5.1	Cantidades dinámicas	116
1.5.2	Partículas y fuerzas	117
1.5.3	Sistemas de referencia inerciales	118
1.5.4	Postulado de fuerzas.....	121
1.5.5	Fuerzas conservativas y no conservativas.....	124
1.5.6	Energía mecánica	125
1.5.7	¿Ley de inercia?	126
1.5.8	Postulado de acción y reacción	127
1.5.9	Postulado de gravitación universal	128
1.5.10	La fuerza gravitacional de la Tierra, el Sol y la Luna .	129
1.5.11	El campo gravitacional	133
1.5.12	Energía potencial gravitacional	133
1.5.13	Masa y principio de equivalencia	135
1.6	Sistemas de partículas.....	138
1.6.1	Fuerzas y centro de masa	139

1.6.2	Centro de masa de un sistema de dos partículas.....	145
1.6.3	Teoremas de conservación	147
1.6.4	Dinámica referida al centro de masa	150
1.7	Dinámica en sistemas de referencia no inerciales.....	154
1.7.1	Transformación entre sistemas de referencia	155
1.7.2	Sistemas de referencia rotantes.....	159
1.7.3	Adición de velocidades en sistemas rotantes.....	162
1.7.4	Aceleraciones ficticias en sistemas rotantes	163
1.7.5	Un ejemplo numérico.....	167
1.8	Problemas seleccionados	176
2	El problema de los N cuerpos	181
2.1	Formulación del problema	181
2.1.1	Motivación	181
2.1.2	Enunciado físico y matemático	182
2.2	¿Solución analítica?	186
2.2.1	Aplicación de los teoremas de conservación	187
2.2.2	Momento lineal	187
2.2.3	Posición del centro de masa	189
2.2.4	Momento angular	190
2.2.5	Energía potencial de N cuerpos	194
2.2.6	Conservación de la energía.....	198
2.2.7	Caso de estudio: el sistema Tierra-Luna.....	199
2.2.8	Síntesis y teorema de Bruns	201
2.3	Energía y virial.....	203
2.3.1	Momento de inercia.....	204
2.3.2	El virial	205
2.3.3	Identidad de Lagrange-Jacobi	205
2.3.4	Teorema del virial.....	207
2.3.5	Caso de estudio: el virial del sistema solar.....	208
2.3.6	Caso de estudio: la masa de cúmulos de galaxias.....	211
2.4	Solución numérica	214
2.4.1	Unidades canónicas	215
2.4.2	Las ecuaciones de movimiento reducidas.....	219
2.4.3	Algoritmo de solución.....	221
2.4.4	Constantes de movimiento y teorema del virial.....	231
2.4.5	Un algoritmo general	235
2.5	Problemas seleccionados	237
3	El problema de los dos cuerpos.....	241
3.1	Motivación	241

3.2	El problema relativo de los dos cuerpos	246
3.3	Constantes de movimiento	248
3.3.1	Momento angular específico relativo	248
3.3.2	Energía específica relativa	251
3.3.3	El vector de excentricidad	252
3.4	La ecuación de la trayectoria	253
3.5	La velocidad relativa	257
3.6	El hodógrafo del problema de los dos cuerpos	260
3.7	El teorema armónico	263
3.8	Teoremas del movimiento orbital	265
3.9	La órbita en el espacio	268
3.9.1	Determinación de la órbita	269
3.9.2	Predicción del vector de estado	271
3.9.3	La órbita osculatriz	272
3.9.4	Un ejemplo numérico	272
3.10	El problema de los dos cuerpos en el tiempo	278
3.10.1	La ecuación de Halley	279
3.10.2	La ecuación de Kepler	283
3.10.3	La función generalizada de Kepler	284
3.10.4	Interpretación geométrica de la anomalía media	286
3.10.5	Solución numérica a la ecuación de Kepler	289
3.10.6	Solución analítica por aproximaciones sucesivas	301
3.10.7	Solución por series de la ecuación de Kepler	303
3.11	Una síntesis del problema de los dos cuerpos	306
3.11.1	Un ejemplo numérico	308
3.12	Variables universales	316
3.12.1	Las funciones f y g	319
3.13	Aproximación de los dos cuerpos a sistemas jerárquicos	324
3.13.1	Predicciones en el sistema solar	331
3.13.2	Evolución de los elementos orbitales osculantes	334
3.13.3	Un ejemplo real: los elementos osculantes de la Luna	338
3.14	Introducción a la teoría de perturbaciones	340
3.14.1	Perturbación del semieje mayor	340
3.14.2	Perturbación de la excentricidad	341
3.14.3	Perturbaciones de la orientación	342
3.14.4	Ecuación de la órbita osculatriz	343
3.14.5	Un ejemplo numérico	344
3.15	El problema de los dos cuerpos en SPICE	353
3.16	Problemas seleccionados	358

4 El problema restringido de los tres cuerpos	363
4.1 Motivación	363
4.2 El problema restringido de los tres cuerpos	366
4.3 El problema circular restringido de los tres cuerpos	368
4.4 Las unidades canónicas del CRTBP	370
4.5 Solución numérica al CRTBP	371
4.6 Un algoritmo general para el CRTBP	374
4.7 La constante de Jacobi	375
4.8 El valor de la constante de Jacobi	377
4.9 Cuadratura de Jacobi de un sistema simulado	380
4.10 Cuadratura de Jacobi de un sistema real	382
4.11 Las regiones de exclusión	387
4.12 El potencial modificado	393
4.13 Los puntos de equilibrio de Lagrange	401
4.13.1 Puntos de equilibrio triangulares	403
4.13.2 Puntos de equilibrio colineales	404
4.13.3 Punto colineal de equilibrio L_1	405
4.13.4 Punto colineal de equilibrio L_2	407
4.13.5 Punto colineal de equilibrio L_3	407
4.13.6 Precisión de la aproximación analítica	408
4.14 Aplicaciones del CRTBP	410
4.14.1 El radio de Hill y el lóbulo de Roche	410
4.14.2 Órbitas periódicas cerca de los puntos de equilibrio ..	421
4.14.3 El parámetro de Tisserand	430
4.14.4 Clasificación de los objetos cercanos a la Tierra	441
4.14.5 Clasificación de los objetos cercanos a Júpiter	445
4.15 Problemas seleccionados	447
5 El formalismo lagrangiano y la mecánica celeste	451
5.1 Motivación	451
5.2 El formalismo lagrangiano	453
5.2.1 Principio de los trabajos virtuales	453
5.2.2 Principio de D'Alembert-Lagrange	455
5.3 Restricciones y variables generalizadas	459
5.3.1 Fuerzas de restricción	463
5.3.2 Variables generalizadas	464
5.3.3 Propiedades matemáticas de las reglas de transformación	467
5.4 Las ecuaciones de Lagrange	469
5.4.1 Un ejemplo: el péndulo elástico	471

5.5	La función lagrangiana	477
5.5.1	El potencial generalizado	480
5.5.2	Un ejemplo: el lagrangiano del péndulo elástico	481
5.6	El principio de Hamilton	482
5.6.1	Un ejemplo: el péndulo simple	484
5.7	Simetrías y leyes de conservación	490
5.7.1	Conservación del momento angular	494
5.7.2	Conservación del momento lineal	495
5.7.3	Variables cíclicas	496
5.7.4	La función de Jacobi y la conservación de la energía ..	497
5.8	Mecánica celeste en el formalismo lagrangiano	500
5.8.1	El lagrangiano de N cuerpos	501
5.8.2	Simetrías del lagrangiano de N cuerpos	502
5.8.3	El lagrangiano de un sistema jerárquico de N cuerpos ..	503
5.8.4	El problema general de los dos cuerpos	508
5.8.5	El potencial efectivo y las regiones de exclusión	509
5.8.6	Ecuación de movimiento de la variable radial	515
5.8.7	Ecuación de la forma orbital	520
5.8.8	El problema de los dos cuerpos con n arbitrario	523
5.9	Problemas seleccionados	531
6	El formalismo hamiltoniano y la mecánica celeste	536
6.1	Motivación	536
6.1.1	El problema de las ecuaciones de movimiento	537
6.1.2	Degeneración del espacio de configuración	538
6.2	Las ecuaciones de Hamilton	540
6.3	Las ecuaciones canónicas de Hamilton	544
6.4	El principio de Hamilton modificado	546
6.5	Dinámica en el espacio de fase	548
6.5.1	El péndulo simple en el espacio de fase	549
6.6	Simetrías y cantidades conservadas	555
6.6.1	Variables cíclicas	556
6.6.2	Un ejemplo: el péndulo cónico	557
6.6.3	Conservación del hamiltoniano	561
6.6.4	Cantidades conservadas y los corchetes de Poisson ...	562
6.7	Transformaciones canónicas	564
6.7.1	La función generatriz	570
6.7.2	Transformaciones canónicas básicas	573
6.8	El método de Hamilton-Jacobi	576
6.8.1	Ejemplo 1: El oscilador armónico en una dimensión ..	578

6.8.2	Ejemplo 2: Partícula en caída libre	582
6.9	Mecánica celeste en el formalismo hamiltoniano	586
6.9.1	El hamiltoniano del problema de los dos cuerpos	587
6.9.2	Conservación del vector de excentricidad	588
6.9.3	El método de Hamilton-Jacobi en mecánica celeste ..	591
6.9.4	El espacio de fase de los elementos orbitales	594
6.9.5	Las variables de Delaunay	596
6.10	Problemas seleccionados	598
	Apéndice. Algoritmos y rutinas útiles	602
	Bibliografía	609

Agradecimientos

Así como no hay *vacas esféricas en el vacío*, tampoco existen los *autores cilíndricos que escriben aislados*. La elaboración de este libro ha sido determinada y afectada por múltiples factores y personas a quienes no puedo dejar de mencionar.

En primer lugar, quiero agradecer a todos los estudiantes del pregrado de Astronomía que tomaron el curso de Mecánica Celeste durante los años en los que elaboré las notas que sirvieron de base para este libro. Agradezco su paciencia y sus preguntas en clase, que me ayudaron a enriquecer el texto, concentrarme en puntos difíciles y escoger mejor los temas más interesantes. También fueron de gran valor los errores que me ayudaron a detectar en las primeras versiones de las *libretas* de Jupyter, base del texto. Entre ellos, quiero resaltar a Andrés Gómez, quien fue mas lejos aún al revisar críticamente el contenido de algunas *libretas* como lo haría un colega o un editor; adicionalmente, sus impecables soluciones de los problemas inspiraron una parte del material que he incluido en esta edición del libro.

Una buena parte de la primera versión de las notas del curso fue transcrita a LaTeX por el hoy astrónomo Bayron Portilla (en ese entonces mi tallerista del curso). En un momento dado, nos propusimos, incluso, escribir juntos el libro. Sin embargo, nuestras ocupaciones fueron dilatando el proyecto hasta que decidí emprender este proyecto en solitario y partiendo de las *libretas* de Jupyter que elaboré posteriormente. Aun así, reconozco y agradezco el esfuerzo que hizo Bayron en esas primeras notas, en las que además exploramos las mejores maneras de organizar los temas del curso. En el mismo sentido debo también agradecer al doctor Andrés Pérez, ahora un exitoso astrónomo, quien en sus años como estudiante se ofreció también a transcribir en limpio muchas de mis notas de tablero. El documento resultante que nunca logramos editar apropiadamente todavía lo uso como material de consulta en mis clases.

Estoy también en deuda con Miguel Vásquez, el mejor de los talleristas que he tenido en mi carrera como profesor (ahora es un astrónomo). Miguel realizó una juiciosa tarea de búsqueda de problemas, transcripción de los mismos al formato de Jupyter y, más importante, preparación en el mismo formato de su solución. Todo, mientras mantenía una estrecha relación con los estudiantes (mucho mejor que la mía como profesor, debo admitir), lo

que le permitió entender sus necesidades, evaluar y ajustar el grado de dificultad de los problemas y recoger correcciones y sugerencias a las notas. Muchos problemas incluidos en este libro se basan en el trabajo original de Miguel, al que debo hacer un sentido reconocimiento aquí.

Agradezco también a los maestros que me motivaron a estudiar física teórica durante el pregrado y el posgrado, muy a pesar de mi monocromática pasión por la astronomía. Esto me permitió entender, apreciar y abordar mejor los aspectos teóricos de la mecánica celeste. En particular, mis agradecimientos van para los profesores Lorenzo de la Torre, Alonso Sepúlveda, Jorge Mahecha, William Ponce y Boris Rodríguez. A través de sus propios manuscritos, conocí (y espero haber aprendido con el ejemplo) el “arte” de escribir libros de texto. El estilo, la profundidad y el cuidado de sus notas de clase, sus trabajos publicados e inéditos, han sido imitados sistemáticamente en este libro.

Agradezco a la Universidad de Antioquia y en particular a las autoridades del Instituto de Física y la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, por otorgarme el beneficio de un año sabático, durante el cual pude, entre otras cosas maravillosas, escribir la primera versión completa de este libro. Mi reconocimiento y agradecimiento además para los profesores del pregrado de Astronomía, en especial a mi *parcero* Pablo Cuartas, que recibió mi carga académica y de investigación durante ese año en el que estuve escribiendo.

Finalmente, pero no menos importante, quiero agradecer a mi familia, Olga y Sofía. A ellas les tocó la peor parte: soportarme un año entero en la casa, escribiendo en pijama (o mejor hablando solo, por que yo no escribo sino que hablo con el computador) y prestándoles, a veces, menos atención de la que les presto incluso en situaciones normales. Este libro está dedicado a ellas.

Prefacio

En 2019 celebramos el centenario de la histórica observación de un eclipse total de Sol, liderada por sir Arthur Eddington y que permitió la primera confirmación experimental de las predicciones de la teoría general de la relatividad. El primer día de ese mismo año, una nave espacial, la sonda New Horizons, sobrevoló el cuerpo astronómico más remoto fotografiado por nuestra especie, el objeto transneptuniano (486958) Arrokoth (ver figura P); la misma sonda, cinco años antes, había pasado “rozando” la superficie de Plutón, enviándonos imágenes inesperadas de un mundo sorprendente. Muy lejos de allí, y también en 2019, dos naves espaciales, una japonesa, la sonda Hayabusa 2, y la otra estadounidense, Osiris-Rex, transmitieron imágenes impactantes desde la superficie de dos pequeños asteroides cercanos a la Tierra, cuerpos que visitaron con el objetivo de traer muestras a nuestro planeta. Lo que aprendamos de esas muestras podría ayudarnos a evitar un impacto catastrófico futuro. Y la aventura continúa. Nada más empezando el 2022, el telescopio James Webb, sucesor de los telescopios espaciales infrarrojos Spitzer y WISE, ha alcanzado su trayectoria final alrededor del Sol, se ha convertido en un planeta más. Pero su órbita no es como la de los demás planetas. A pesar de estar un millón y medio de kilómetros más lejos del Sol que la Tierra, completa su revolución alrededor de nuestra estrella en casi exactamente el mismo año, desafiando la lógica más elemental del movimiento planetario.

Todas estas hazañas de exploración y conocimiento fueron posibles, entre otras, gracias a la *mecánica celeste*. Esta disciplina científica, combinación asombrosa de astronomía, física y matemáticas, comenzó, como disciplina científica y matemática moderna, con el trabajo teórico pionero de Johannes Kepler a principios de los 1600;¹ se estableció con la obra cumbre de sir Isaac Newton, los *Principios matemáticos de la filosofía natural*, publicada a finales de los 1600, y alcanzó su apogeo entre los 1700 y los 1800 con los trabajos de matemáticos y astrónomos como Edmund Halley, Leonhard Euler, Pierre-Simon Laplace, Joseph-Louis Lagrange, William Rowan Hamilton y Henri Poincaré (entre muchos otros que mencionaremos en este libro).

¹ En la introducción aclararemos la nomenclatura usada en el libro para referirnos a los siglos y decenios.



Figura P Imagen procesada de Arrokoth, el objeto transneptuniano sobrevolado por la sonda New Horizons el 1 de enero 2019

Fuente: NASA, Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory, Southwest Research Institute, Roman Tkachenko.

Este libro presenta una visión panorámica de la mecánica celeste y en general de la mecánica analítica o mecánica clásica, que se desarrolló de forma paralela a la primera, inspirada, en muchos casos, en los problemas de aquella. El texto está dirigido especialmente a quienes, por su formación o trabajo, están interesados en la aplicación de la mecánica celeste en astronomía o en ingeniería aeroespacial. Su extensión, énfasis y nivel de profundidad lo hacen especialmente adecuado para estudiantes de pregrado (licenciatura o bachillerato, dependiendo del país) de cualquier programa científico o técnico, especialmente de astronomía, física o ingeniería aeroespacial. Su enfoque computacional (que es la razón por la que incluí la palabra “algoritmos” en el subtítulo de esta obra) lo podría hacer, además, útil como material de referencia para profesionales de estas disciplinas.

Febrero de 2022

Introducción

0.1 ¿Otro libro de mecánica celeste?

Al escribir este libro no pretendo hacer un compendio exhaustivo de los problemas de la mecánica celeste, que, durante más de cuatrocientos años, se ha convertido en una disciplina científica vasta y en constante desarrollo.

Muchos textos en la materia han sido escritos desde los tiempos de Newton, la mayoría en las últimas décadas. Algunos presentan detallados y rigurosos desarrollos matemáticos. Otros están orientados específicamente al sistema solar o al movimiento de satélites y vehículos espaciales. Muchos más son buenos libros de texto, la mayoría de ellos dirigidos a estudiantes de posgrado, pues la mecánica celeste es considerada una línea de profundización, tanto en física como en astronomía. También se han escrito algunos libros divulgativos y al alcance de aficionados.

La bibliografía de este libro recoge apenas una muestra de referencias en la materia, que serán citadas a lo largo de sus capítulos, y que, de antemano, invito a los lectores a explorar con curiosidad para no quedarse con la punta del inmenso iceberg que apenas alcanzará a asomarse en estas páginas.²

Entonces, ¿para qué escribir un libro más de mecánica celeste? Existen dos razones fundamentales que me motivaron a emprender esta normalmente ingrata aventura.

La primera es que, como mencioné antes, la mayoría de los libros de mecánica celeste están dirigidos a estudiantes con una formación media o avanzada en matemáticas, mecánica newtoniana y mecánica analítica; como se acostumbra decir, tienen un nivel de posgrado. En contraste, el número de textos al “alcance” de estudiantes de los primeros años uni-

² Es importante aclarar, sin embargo, que debido al nivel de este libro (está orientado a estudiantes de pregrado), muchas de las referencias corresponden a trabajos que tienen, en el mejor de los casos, una década de antigüedad y en el “peor” hasta dos siglos y medio. Pero esto, contrario a lo que puede pensarse, no es un defecto del texto. La mayor parte de los desarrollos más recientes de la mecánica celeste, que no son pocos y abundan en la literatura especializada de matemáticas, astronomía e ingeniería, asumen normalmente que toda la teoría que se presenta en este libro se conoce a cabalidad. Por la misma razón, ese contenido escapa al nivel del libro.

versitarios no es muy grande. Escribo este libro, pues, para contribuir a enriquecer ese “nicho académico”.

Podría argumentarse que la mecánica celeste, como aplicación específica de la mecánica newtoniana, es un tema especializado y de allí que sus textos estén dirigidos a estudiantes más avanzados. Sin embargo, la importancia de esta disciplina en la historia de las matemáticas, la astronomía y la física, así como su potencial para describir fenómenos fascinantes, desde el movimiento de planetas y naves espaciales, hasta la colisión de agujeros negros, hacen de la mecánica celeste un medio educativo excelente para introducir conceptos teóricos en física y astronomía, que, sin el contexto y la motivación apropiada, son difíciles de digerir.

Un buen libro de mecánica celeste o mecánica analítica debería poder ser abordado por cualquier estudiante, incluso de pregrado. Esa ha sido la premisa en muchos centros académicos. Pero la realidad es más compleja. Como cualquier profesor sensible lo sabe, para valorar realmente los logros intelectuales del pasado, entender las motivaciones que llevaron a los pioneros, hombres y mujeres, de una disciplina a introducir hipótesis o formular las leyes de la misma, se necesita experiencia académica. Experiencia que la mayoría de los estudiantes de pregrado no tienen. No es solo un problema de nivel matemático, es también un problema de falta de exposición a la ciencia.

Este libro pretende ser un buen *primer* libro de mecánica celeste, pero también de mecánica analítica, como explicaremos más adelante. Un primer escalón para abordar, ya con experiencia, libros más avanzados.

La segunda razón, y la original para mí como profesor del pregrado de Astronomía en la Universidad de Antioquia, era que necesitaba un texto sobre mecánica celeste que permitiera avanzar en una formación en los principios y métodos de la mecánica analítica (mecánica teórica o mecánica clásica). Esos principios y métodos son instrumentales en la formulación de la mecánica cuántica y lo son además en versiones modernas de otras áreas de la física clásica, como la relatividad, la electrodinámica e incluso la óptica. La mecánica analítica es indispensable entonces en la formación de cualquier estudiante de ciencias físicas.

En la inmensa mayoría de los textos clásicos de mecánica celeste, los resultados se derivan usando, casi exclusivamente, los métodos de lo que llamaremos aquí el *formalismo vectorial o geométrico de la mecánica*. En este formalismo (originalmente introducido por Newton y desarrollado posteriormente por Euler), las fuerzas juegan el papel central en la descripción de la dinámica (*díme cuánto te halan y te diré cómo te mueves*).

Desde los trabajos pioneros de matemáticos y “físicos” de los 1700 y 1800, tales como D’Alembert, Lagrange, Hamilton y Jacobi, se hizo evidente que algunos problemas complejos de mecánica celeste podían abordarse usando un *formalismo analítico o escalar de la mecánica*. En este formalismo, los sistemas se describen usando *funciones* tales como el *lagrangiano* o el *hamiltoniano*, que contienen toda la información relevante del sistema, sus restricciones y simetrías (*dime cuál es tu hamiltoniano y no solo te diré para dónde vas, sino también cómo eres*).

Un caso ilustrativo, muy popular y reciente, de cómo el formalismo analítico de la mecánica es aplicado hoy, de manera generalizada, en mecánica celeste, es la “predicción” de un nuevo planeta en el sistema solar, más allá del cinturón de Kuiper, cuya existencia, a la fecha, no se ha confirmado ni rechazado [8]. Este trabajo también es la punta de un inmenso iceberg de literatura científica en mecánica celeste en la que el formalismo analítico es protagonista.

Más allá, entonces, de la necesidad práctica de juntar la mecánica celeste y la mecánica analítica en un mismo texto, de modo que sirva a estudiantes de programas académicos como astronomía o ingeniería aeroespacial, este libro presenta este particular “matrimonio” entre dos disciplinas clásicas de la astronomía y la física como lo que es: una relación estrecha entre dos cuerpos de conocimiento inseparables.

Otro ingrediente hace diferente a esta publicación. Me refiero al énfasis especial que daremos a los algoritmos de la mecánica celeste a través de todo el libro.

Es un hecho reconocido que la complejidad de muchos problemas de mecánica celeste, en particular aquellos con un interés práctico, tales como el diseño de trayectorias de vehículos espaciales, la predicción de la posición precisa de asteroides y cometas que pueden amenazar nuestro planeta o la predicción a largo plazo de la posición de los cuerpos del sistema solar y otros sistema planetarios, ha exigido, casi desde los tiempos de Kepler, el desarrollo y la aplicación de métodos numéricos y, más recientemente, de su implementación en calculadoras y computadores.

En este sentido, la relación de la mecánica celeste con *algoritmos* de toda clase no es comparable con la relación, principalmente utilitaria, que tienen la mayoría de las áreas de la física con la computación. Podría decirse que hoy es casi impensable saber de mecánica celeste sin estar familiarizado también con sus algoritmos.

Pensando en esto, todo el contenido del libro ha sido elaborado usando *libretas* o *notebooks* del proyecto Jupyter.³ Este hecho facilita, por un lado, que el código sea copiado y pegado en libretas de Jupyter desde la versión electrónica (en PDF), pero también garantiza que todo el código ha sido probado y que funciona correctamente. Aunque siempre se pueden colar errores; no es fácil escribir un libro con códigos, garantizando que los códigos en realidad funcionen. Pues bien, en este libro sí.

En la versión impresa, los algoritmos se presentarán en cajas especiales de texto como esta:

```
import math
e=0.3
M=0.5
E=M
Eo=2*M
while abs(E-Eo)>0.01:
    Eo=E
    E=M+e*math.sin(E)
print("E = ",E)
```

E = 0.6886561865220447

¿Puede el lector adivinar qué hace este algoritmo? Si no lo hace, espero que sepa en qué lenguaje de programación está escrito.

0.2 Mecánica celeste en Python

Es casi imposible escribir un libro con algoritmos sin comprometerse con un lenguaje de programación específico (especialmente si queremos que los algoritmos funcionen). En el caso de esta edición del libro, el lenguaje elegido es Python.

Esta siempre será una apuesta arriesgada. Aunque la mecánica celeste y sus algoritmos no pasarán de “moda”, los lenguajes de programación “van y vienen”. Es un hecho (poco reconocido) que cientos de libros científicos acumulan polvo por haber comprometido su contenido con lenguajes de programación que hoy no son tan populares (BASIC o Pascal por ejemplo).

No sabemos si Python y este libro sufrirán a la larga la misma suerte. Pero hay tres hechos que *sugieren* que la popularidad de este lenguaje podría durar más de lo esperado (o al menos esa es mi esperanza).

³ <https://jupyter.org>

El primero es que su sintaxis es muy similar a la del “lenguaje natural”. Consideremos, por ejemplo, el algoritmo presentado antes (que ya se sabe, está escrito en Python) o el siguiente algoritmo, aún más simple:

```
from math import pi
for n in range(1,5):
    print("pi a la",n,"es",pi**n)
```

```
pi a la 1 es 3.141592653589793
pi a la 2 es 9.869604401089358
pi a la 3 es 31.006276680299816
pi a la 4 es 97.40909103400242
```

Es difícil que estos algoritmos se escriban de manera tan natural en casi cualquier otro lenguaje de programación popular en ciencia (C, FORTRAN o Java) como se pueden escribir en Python. Este asunto no solo facilita el aprendizaje del lenguaje, sino también la legibilidad de los algoritmos.

El segundo hecho que demuestra el promisorio futuro de Python como lenguaje de la computación científica es la creciente cantidad de paquetes, en todas las disciplinas de la ciencia y la técnica, que se escriben permanentemente en este lenguaje y que están disponibles en repositorios públicos.⁴ Además, herramientas informáticas muy conocidas (bibliotecas de rutinas, bases de datos, sistemas de información, etc.) escritas originalmente en otros lenguajes han sido ahora traducidas a Python (*pythonizadas* si quieren) con el único propósito de que puedan ser usadas por la creciente comunidad de desarrolladores en este lenguaje.

Python se está convirtiendo, y esta es una conjetura mía, en depositario de décadas de experiencia en ciencia computacional. ¿Cambiará esta tendencia pronto? Lo dudo (o al menos así lo espero, por el bien de este libro).

Un tercer hecho para elegir Python como el idioma oficial de los algoritmos en este libro es la existencia de una biblioteca gráfica, robusta y bien documentada, escrita para este lenguaje. Me refiero por supuesto a `matplotlib`.⁵

Con la excepción de paquetes científicos que incluyen avanzadas facilidades de graficación, tales como Mathematica, Matlab o IDL (todos ellos sujetos a algún tipo de pago), la mayoría de los lenguajes de programación dependen, a veces, de complejas bibliotecas gráficas o programas de terceros para hacer hasta los más sencillos gráficos.

⁴ <https://pypi.org/project/IPy>

⁵ <https://matplotlib.org/>

En Python, hacer un gráfico elemental es tan simple como escribir:

(Algoritmo 0.1)

```
from matplotlib.pyplot import plot
plot([1,2,3,4],[1,4,9,16]);
```

ver figura 0.1

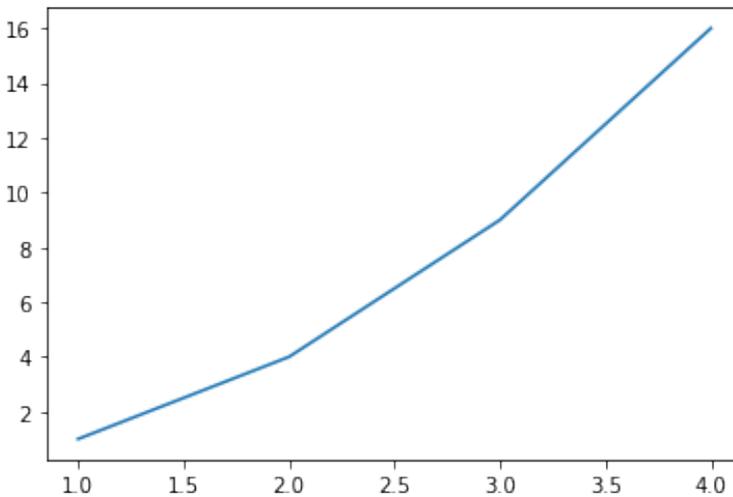


Figura 0.1 Figura correspondiente al código del algoritmo 0.1

0.3 Mecánica celeste con SPICE

No puedo dejar de mencionar aquí una última herramienta que será protagonista en este libro. Se trata de SPICE, una aplicación desarrollada para la NASA's *Navigation and Ancillary Information Facility* (NAIF).⁶

SPICE es un sistema de información de uso libre, formado básicamente por una biblioteca de rutinas para realizar cálculos en mecánica celeste y de datos (*kernels*) que permiten, usando esas mismas rutinas, la determinación de la posición y orientación precisa (pasada y futura) de muchos cuerpos del sistema solar y de algunos vehículos espaciales lanzados por nuestra especie.

Esta herramienta ha cobrado, en años recientes, una popularidad significativa en la comunidad académica. Sus rutinas y *kernels* están detrás de

⁶ <https://naif.jpl.nasa.gov/naif/>

algunos de los servicios en línea más populares de NASA, tales como el sistema NASA *Horizons*,⁷ que permite, a través de distintas interfaces, calcular las posiciones pasada y futura de cuerpos del sistema solar y naves espaciales; o del simulador NASA's *Eyes*,⁸ que ofrece vistas en tiempo real de la posición de los cuerpos del sistema solar y de misiones espaciales de la agencia espacial estadounidense.

En este libro usaremos las rutinas y *kernels* de SPICE (a través de la biblioteca *spiceypy*,⁹ desarrollada en Python) para ilustrar conceptos, proponer ejemplos y resolver problemas que, de otro modo, implicarían un gran esfuerzo algorítmico (el objetivo será no *reinventar la rueda redonda*).

Al hacerlo, además, el lector, sin importar su nivel, se familiarizará con una herramienta que usan astrónomos e ingenieros aeroespaciales para resolver problemas reales de mecánica celeste. ¡De la teoría a la acción!

De la misma manera como nos preguntamos en el caso de Python, nos formulamos la siguiente cuestión: ¿podría SPICE desaparecer o, mejor, ser reemplazado por un sistema diferente en los próximos años? No podemos asegurarlo, pero la cantidad de herramientas que hoy dependen de este sistema de información hace difícil suponer que cambie radicalmente en el futuro inmediato.

Un último aspecto hace de SPICE una opción muy estable para los propósitos de un libro de texto. La biblioteca de rutinas asociada con el sistema está disponible para un amplio conjunto de lenguajes de programación diferentes a Python. Familiarizarse con las rutinas y *kernels* de SPICE aquí será suficiente para que pueda usarse con lenguajes como C/C++, FORTRAN e IDL.

A continuación, y a modo de ilustración, presento un algoritmo, escrito con SPICE, para calcular la distancia de la Tierra al Sol durante el eclipse total de Sol del 29 de mayo de 1919, en el que se obtuvieron las primeras evidencias empíricas de la relatividad general y con el que abrimos el prefacio de este libro. Naturalmente, este algoritmo es mucho más complejo (y menos natural) que los que escribí antes, pero ilustra el poder de esta herramienta para obtener resultados interesantes con muy poco esfuerzo computacional.

```
import spiceypy as spy
spy.furnsh('pymcel/data/naif0012.tls')
spy.furnsh('pymcel/data/de430.bsp')
```

⁷ <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>

⁸ <https://eyes.nasa.gov/>

⁹ <https://spiceypy.readthedocs.io/en/stable/>

```

et=spy.str2et("05/29/1919 09:08:00 UTC-3")
sol,tluz=spy.spkgeo(10,et,"J2000",0)
tierra,tluz=spy.spkgeo(399,et,"J2000",0)
distancia=spy.vnorm(tierra-sol)

```

Distancia Tierra-Sol durante el eclipse de 1919: 151649284 km

0.4 ¿Qué hace distinto a este libro? Un decálogo

Para resumir, enumero a continuación las diez cosas que hacen de este un libro distinto de los muchos que se han escrito en casi cuatrocientos años de historia de la mecánica celeste. Este decálogo, como la mayor parte de esta introducción, es, además de una descripción abreviada de las características únicas del libro, una lista de razones que justifican su existencia aun en el “vasto océano” de literatura en la materia.

1. ¿Ya les mencioné que es un libro para estudiantes de pregrado? Para entender su contenido no es necesario haber visto previamente un curso de mecánica analítica o de matemáticas especiales. Solo se necesita una fundamentación mínima en geometría, cálculo y física.
2. El libro ha sido escrito, en la medida de las posibilidades, para ser autocontenido. Todo lo que un lector necesita saber de los fundamentos matemáticos (geometría, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales), los fundamentos físicos (mecánica newtoniana), astronómicos o de computación, ha sido incluido en los capítulos o en apéndices. Esto hace del libro un texto que puede ser leído o estudiado por personas ajenas a la disciplina, incluso por aficionados.
3. El libro utiliza, como la mayoría de los textos en el área, el *formalismo geométrico y vectorial* de la mecánica para presentar y desarrollar los problemas centrales de la mecánica celeste. Pero también introduce el *formalismo analítico* (mecánica analítica o mecánica clásica) y lo aplica a la mecánica celeste. Es por tanto un libro de mecánica celeste y al mismo tiempo uno de mecánica analítica.
4. El libro no profundiza en todos los temas de la mecánica celeste o la mecánica analítica como lo hacen textos más avanzados. Pero, para un estudiante de pregrado, esta podría ser su primera lectura antes de abordar esas publicaciones.
5. El texto enfatiza en los algoritmos de la mecánica celeste, que implementa usando códigos en Python, gráficas en `matplotlib` y, en ocasiones, usando algunas de las rutinas y datos del sistema SPICE de NASA.

6. El libro no requiere conocimientos previos de programación en Python (aunque tenerlos puede ser muy útil). En realidad, el libro podría utilizarse como una manera de aprender el lenguaje en contexto, algo que es difícil de conseguir en libros dedicados específicamente a la enseñanza de la programación.
7. Los temas no se desarrollan en el orden en el que aparecieron en la historia: problema de los dos cuerpos \rightarrow teoría de perturbaciones \rightarrow problema de los tres cuerpos \rightarrow mecánica celeste relativística, etc. He preferido presentarlos como me hubiera gustado conocerlos desde el principio, siguiendo un orden más lógico y un poco atemporal. Esta es la manera en la que, creo, un viajero en el tiempo, que retrocediera a 1700, se lo explicaría a un sorprendido Newton.
8. A pesar de lo dicho, la historia es importante en el libro. A través de los capítulos y en recuadros especiales he incluido anécdotas y biografías que permitirán hacerse a una imagen del contexto en el que surgieron las principales ideas de la mecánica celeste y la mecánica analítica y de los personajes, hombres y mujeres, que las concibieron.
9. Por muchas de las razones descritas arriba podría decirse que este es un libro “moderno” de mecánica celeste. Uno que en lugar de ocuparse de llenar cientos de páginas con sesudos y rigurosos desarrollos matemáticos, apunta directamente a dar vida a esas ideas y a ofrecer las herramientas prácticas para su aplicación.
10. ¿Ya mencione que es un libro para estudiantes de pregrado? ¡Ah, sí! Pero necesitaba una excusa para que este fuera un verdadero decálogo.

0.5 ¿Cómo se organiza este libro?

Como lo mencionamos, una de las cosas que hace a este libro diferente de otros textos de mecánica celeste es la manera y el orden particular en el que se desarrollan los temas. El libro está dividido en tres grandes partes:

- Fundamentos matemáticos y físicos.
- Mecánica celeste usando vectores y geometría (formalismo vectorial de la mecánica).
- Mecánica analítica (formalismo lagrangiano y hamiltoniano) y su aplicación en mecánica celeste.

En los siguientes párrafos encontrarán una síntesis *narrada* del libro; algo así como una *tabla de contenido comentada* que le permitirá al lector no solo orientarse en el texto, sino también entender la manera como se encadenan cada una de sus partes.

Y es que todo libro debería contar una *historia*. En los textos académicos, lamentablemente, esa “vocación” narrativa parece perderse en medio de figuras, teoremas y algoritmos. Esta sección puede ser entonces entendida como un esfuerzo de esbozar la historia que se hila a través de sus capítulos.

- **Fundamentos matemáticos y físicos.** Antes de entrar en materia, repasaremos algunos temas de matemáticas y de física necesarios para estudiar mecánica celeste. Si bien el lector debería estar familiarizado con la mayoría de estos temas, he decidido incluir este capítulo no solo para hacer que el texto sea autocontenido, sino también para compilar resultados útiles, definiciones y algoritmos, en el formato y la notación del texto, que se usarán en capítulos posteriores.

- **Fundamentos matemáticos.** Algunos consideran la mecánica celeste un área de las matemáticas aplicadas. En ella confluyen técnicas matemáticas de todos los orígenes. Por esta misma razón, para comprender incluso los aspectos más básicos de la teoría es necesario contar con una sólida fundamentación matemática. Por cuestiones de espacio no podemos cubrir todos los temas relevantes en esta sección, pero nos hemos concentrado en dos de particular importancia a lo largo del texto:

- **Fundamentos de cálculo.** El cálculo infinitesimal fue *descubierto* por Isaac Newton a finales de los 1600 (y descubierto independientemente también por Gottfried Leibniz), inspirado, en parte, en problemas mecánicos. Estos métodos matemáticos permitieron a Newton, sus contemporáneos y sucesores resolver los complicados problemas de la mecánica celeste que inauguraron la disciplina. Por la misma razón es indispensable que el lector repase las cantidades y resultados centrales de este método analítico. Al hacerlo, aprovecharemos además para recoger algunas definiciones y resultados destacados de la geometría y el cálculo de vectores, los elementos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales y del más *exótico* cálculo de variaciones. Ninguno de los apartes de este capítulo cumple funciones *decorativas* o es completamente prescindible. A pesar de parecer una sección ajena al libro, un material que debería dejarse solo a los autores expertos en el tema, en realidad todos los resultados expuestos aquí serán usados en el resto de capítulos.

- **Geometría de curvas cónicas.** Aquí nos concentraremos en repasar (o presentar) las propiedades de las figuras cónicas,

su definición y descripción geométrica más general, así como su descripción algebraica. Las cónicas juegan un papel central en la mecánica celeste, y estar familiarizado con ellas permitirá resolver más fácilmente problemas físicos relativamente complejos. Estudiaremos esta familia particular de curvas, tanto en el plano como en el espacio de tres dimensiones. Con este propósito, introduciremos aquí las rotaciones en dos y tres dimensiones (ángulos de Euler), que son usadas con frecuencia en la mecánica celeste, pero también en la mecánica analítica.

- **Mecánica newtoniana.** Es casi imposible presentar la mecánica celeste y menos aún la mecánica analítica sin repasar primero las definiciones, postulados y proposiciones de la mecánica básica, o mecánica newtoniana, como se la llama comunmente. Este capítulo está justamente dedicado a presentar el que llamaremos *formalismo vectorial o geométrico* de la mecánica, desarrollado a partir de las ideas mismas de Newton, pero enriquecidas significativamente por sus sucesores en los siguientes dos siglos. Si bien, de nuevo, este podría parecer un tema *elemental* para tratar en otro libro, la manera en la que se presenta aquí es particularmente única. He tratado de formular las ideas de siempre en un orden más moderno y, en algunos casos, poco ortodoxo. No pretendo con ello producir *ninguna revolución*, pero al hacerlo la presentación de los temas centrales del libro se hace más natural. Este capítulo se concentra en la mecánica de partículas y los sistemas de partículas, sin ocuparse de otros temas interesantes de la mecánica, la dinámica de cuerpos rígidos o de fluidos, que no serán aplicados en el resto del texto.
- **El formalismo vectorial de la mecánica celeste.** Como veremos, la mecánica puede ser presentada usando dos enfoques matemáticos o *formalismos* diferentes. En esta parte del libro nos concentraremos en la formulación geométrica o vectorial de la mecánica celeste, la más popular y la que usó originalmente Newton en sus *Principia* y que fue desarrollada posteriormente por sus sucesores.
 - **El problema de los N cuerpos.** A diferencia de la mayoría de los textos sobre mecánica celeste, en este libro comenzamos por abordar y estudiar con algún detalle el más general de los problemas de esta disciplina: el de los N cuerpos. En este problema, el reto consiste en predecir la posición y velocidad de muchos

cuerpos que interactúan gravitacionalmente. Si bien el de los N cuerpos fue posiblemente el último de los grandes problemas de mecánica celeste en ser formulado y abordado de forma rigurosa en la historia, su presentación temprana en este libro permitirá introducir resultados y métodos que serán de utilidad para el resto del texto. De particular interés será la introducción de los algoritmos en este capítulo para resolver numéricamente el problema. Estos algoritmos y algunas herramientas computacionales relacionadas serán necesarios en el resto del texto, para comparar y validar resultados de modelos analíticos. Se presentará también aquí el concepto de integrales de movimiento o *cuadraturas*, uno de los métodos usados clásicamente para extraer información sobre un sistema dinámico sin resolverlo por completo. Este método será usado de forma regular en los demás capítulos.

- **El problema de los dos cuerpos.** Una de las idealizaciones más conocidas de la mecánica celeste es aquella que consiste en suponer que cuando dos cuerpos astronómicos interactúan gravitacionalmente, el efecto del resto del Universo es por completo despreciable. Naturalmente, no existe ningún sistema astronómico real que cumpla a cabalidad esta condición. Todos los sistemas del Universo, en sentido estricto, son sistemas de N cuerpos. En este capítulo mostraremos, a través de experimentos numéricos y ejemplos astronómicos reales, que la mayoría de los sistemas astronómicos se pueden analizar dinámicamente como *sistemas de N cuerpos jerárquicos*, es decir, como sistemas en los que las partículas se agrupan por pares (pares de partículas, pares de pares, etc.) que se perturban mutuamente. El problema de los dos cuerpos no es, sin embargo, el destino final de la mecánica celeste, sino su punto de partida. Es un resultado útil para estudiar sistemas mucho más complejos. Resolveremos en este capítulo el problema de los dos cuerpos usando el método de las cuadraturas (primeras integrales de movimiento), introducido en el capítulo anterior. Demostraremos que el movimiento relativo de dos cuerpos se realiza sobre una cónica y desarrollaremos en detalle las relaciones entre las propiedades geométricas de esa cónica y las propiedades dinámicas del sistema. Resolveremos también, usando primero métodos geométricos y después