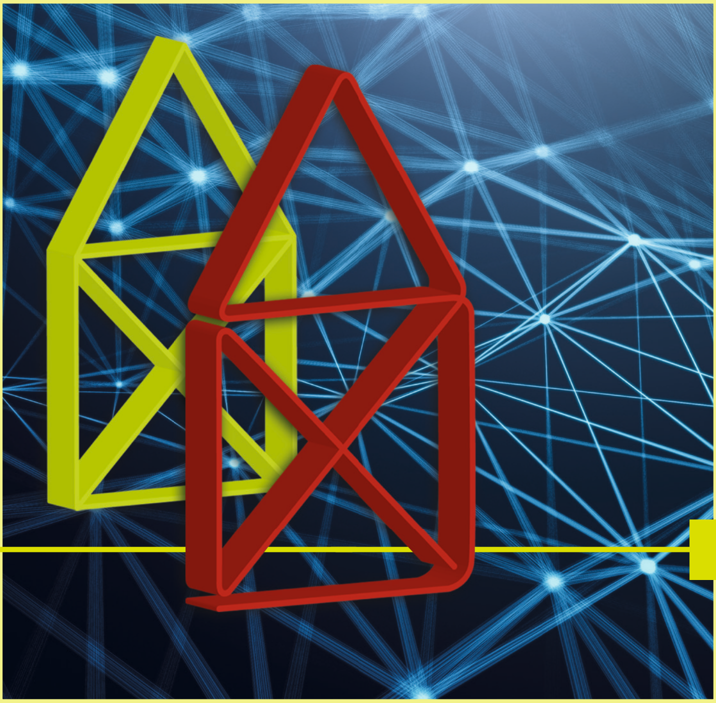
André Krischke
Helge Röpcke

Graphen und Netzwerktheorie

Grundlagen – Methoden – Anwendungen



2., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER

Krischke / Röpcke

Graphen und Netzwerktheorie

André Krischke
Helge Röpcke

Graphen und Netzwerktheorie

Grundlagen - Methoden - Anwendungen

2., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER

Über die Autoren:
Prof. Dr.-Ing. André Krischke, Hochschule München
Dipl.-Math. techn. Helge Röpcke, Hochschule München

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Print-ISBN: 978-3-446-48015-5
E-Book-ISBN: 978-3-446-48063-6

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Frank Katzenmayer
Herstellung: Frauke Schafft
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Titelmotiv: © gettyimages.de/MR.Cole_Photographer
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck: CPI Books GmbH, Leck
Printed in Germany

Vorwort

Die vorliegende zweite Auflage des Buchs „Graphen und Netzwerktheorie“ beinhaltet eine Aktualisierung der zugrunde liegenden Literatur unter Einbezug aktueller Themen. War bei der ersten Auflage die Aufnahme eines eigenen dritten Teils zu den großen Netzwerken in der Praxis eher durch ein akademisches Interesse an der Analyse und Beschreibung deren Strukturen und Dynamiken motiviert, so haben eine Reihe von Entwicklungen der letzten zehn Jahren die Bedeutung von großen Netzwerken deutlich vor Augen geführt:

- Im Kontext der COVID-19-Pandemie der Jahre 2019 bis 2023 mit ihren Millionen von Todesopfern und weitreichenden wirtschaftlichen Auswirkungen ging es um die Vorhersage von zeitlichen Dynamiken auf großen Kontaktnetzwerken und die Bewertung von möglichen Maßnahmen, um die verfügbaren medizinischen Kapazitäten nicht zu überlasten und so die Letalität der Pandemie zu minimieren.
- Globale Lieferketten, die jahrzehntelang als Sinnbild der Effizienz schlank gestaltet wurden (Stichwort „Lean“) und dank elaborierter Koordinationsmechanismen wie Uhrwerke Zehntausende von Firmen in der Lieferkette steuerten, wurden teilweise für Wochen oder gar Monate unterbrochen. Ursachen waren neben der oben bereits erwähnten COVID-19-Pandemie auch die Manifestation anderer Risiken, wie Naturkatastrophen, direkte Auswirkungen des Klimawandels oder Ausfälle kritischer Infrastruktur durch Cybervorfälle, Feuer oder Explosion. Und wohl zum ersten Mal seit den Nachkriegszeiten mussten viele Firmen wieder auf eine Art „Kriegswirtschaft“ zurückgreifen, im Sinne dass zu bestimmen war, welche Endprodukte überhaupt aus den verfügbaren Komponenten produziert werden konnten.
- Auch die erfolgreichsten Verfahren wie das sog. Maschinelle Lernen der aktuell intensiv diskutierten Technologie der Künstlichen Intelligenz (KI) basieren auf großen Netzwerken mit teilweise Milliarden von Knoten (Neuronen), deren Parameter nach ausgeklügelten Heuristiken – idealerweise sogar ohne Überwachung – sich solange selbst verbessern, bis diese die gewünschte Funktion erfüllen, wie beispielsweise das zuverlässige Erkennen von definierten Inhalten auf Bildern.
- Soziale Netzwerke stehen zunehmend in der Kritik, eine manipulative Wirkung auf die Nutzer zu haben, was insbesondere in Bezug auf politische Meinungen als kritisch betrachtet werden muss. Die große Veränderung bei der Verbreitung von (politischen) Meinungen ist, dass die Bedeutung zentraler „Gatekeeper“ – wie Presse und Rundfunk – stark abgenommen hat und der wichtige persönliche Austausch („Word of Mouth“) spätestens seit den Corona-19 Zeiten durch soziale Medien kanalisiert und in gewisser Weise auch manipuliert wird. Nicht die Relevanz der Inhalte bestimmt die Verbreitung, sondern ein für den Nutzer intransparenter Algorithmus verfolgt die Ziele der Plattform, wie beispielsweise eine maximale Verweildauer der Nutzer oder den beständigen Zufluss neuer Inhalte sicherzustellen.

Die Inhalte des dritten Teils des Buches wurden daher – vor allem im Kapitel 12 – zur Veranschaulichung um ausgewählte Bezüge zu den oben aufgeführten aktuellen Entwicklungen ergänzt. An der wesentlichen Struktur des Buchs wurde dabei nichts verändert, da sich die

Inhalte zur Drucklegung als weiterhin relevant und umfassend genug erwiesen haben. Es fand eine ausführliche Durchsicht aller Teile statt und dabei wurden selbstverständlich alle uns bekannten Unkorrektheiten beseitigt. Wir danken an dieser Stelle allen aufmerksamen Studierenden sowie Kolleginnen und Kollegen für die wertvollen Hinweise. Auch an der im Vorwort zur ersten Auflage beschriebenen Zielsetzung, die Grundlagen der Graphentheorie anhand ausgewählter Praxisthemen mit den wirtschaftlich relevanten Problemen zu verbinden, halten wir weiterhin fest.

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Personenbezeichnungen beziehen sich gleichermaßen auf weibliche, männliche und diverse Personen. Auf eine Doppelnennung und gegenderte Bezeichnungen wird zugunsten einer besseren Lesbarkeit verzichtet.

München, im März 2024 André Krischke
Helge Röpcke

Das vorliegende Buch beschäftigt sich, so sagt der Name, mit Graphen und mit Netzwerken. Streng genommen handelt es sich dabei um ein und dasselbe; wir verwenden in diesem Buch den Begriff *Netzwerk* in der Regel zur Kennzeichnung realer Strukturen aus der Praxis, während wir den Begriff *Graph* meist im eher theoretischen Kontext benutzen. Durch den Gebrauch dieser beiden Begriffe werden auch die beiden Sichtweisen auf eine Thematik deutlich, die in unzähligen für unsere Zeit wichtigen Herausforderungen eine Rolle spielen: die Darstellung und Beschreibung, qualitativer wie quantitativer Art, von immer komplexeren Strukturen, mit denen Beziehungen von abstrakten Objekten, aber auch von Menschen, Unternehmen, Staaten modelliert werden können.

Die beiden erwähnten Sichtweisen, nämlich auf der einen Seite die mathematisch wichtigen Aspekte der Graphentheorie und auf der anderen Seite das Modellieren praktischer Problemstellungen vor wirtschaftswissenschaftlichem Hintergrund, greifen natürlich ineinander. Mit diesem Buch wird ein ernstzunehmender Versuch unternommen, die Schnittstellen und Verbindungen zwischen beiden Seiten verständlich darzustellen – wie immer wandert man dabei aber auch auf dem bekannten schmalen Grat zwischen „zu theoretisch für BWL“ und „zu praktisch für Mathematik“.

Das Buch hat, den beiden Sichtweisen entsprechend, zwei Ziele: Es soll die Grundlagen der Graphentheorie näherbringen, und es soll anhand ausgewählter Praxisthemen einen Eindruck davon vermitteln, wie wirtschaftlich relevante Probleme mit dieser Art von Mathematik angegangen werden können. Das Buch ist in drei Teile gegliedert:

1. **Grundlagen der Graphentheorie:** Die Graphentheorie, so werden Sie als Leserin oder als Leser schnell feststellen, hat als separates Gebiet der Mathematik ihre eigene Sprache, in die wir im ersten Teil einen Einblick geben wollen. Das mag zunächst ungewohnt klingen, bietet jedoch eine Chance: Alles in der Graphentheorie lässt sich im Prinzip in einer überaus anschaulichen Art und Weise und für jedermann und jedefrau formulieren – ohne dass ein Haufen mathematischer Vorkenntnisse erforderlich wäre und aktiviert werden müsste.
2. **Ausgewählte Probleme der Graphentheorie:** Ein Graph besteht aus Knoten und aus Kanten, die diese Knoten verbinden können. Viel mehr muss man zunächst nicht wissen. Jede mathematische Teildisziplin lässt sich durch einige typische, zentrale Fragestellungen charakterisieren, und bei der Graphentheorie klingen diese in ihrer praktischen Formulierung beispielsweise so: „Wie komme ich in einem Graphen am schnellsten von einem Knoten zum anderen?“, „Wie kann ich die Knoten eines Graphen optimal einfärben?“, „Wie finde ich eine günstige Darstellung eines Graphen?“

3. **Netzwerktheorien und -modelle:** Noch praxisbezogener ist der dritte Teil, in dem wir uns ausführlich mit den verschiedensten Arten von großen Netzwerken der Praxis beschäftigen – so etwa mit Unternehmens- und Wissensnetzwerken oder auch sozialen und biologischen Netzwerken. Wir benutzen dabei die Sprache der Graphentheorie und kommen immer wieder auf die zentralen Anwendungsprobleme und Fragen aus dem zweiten Teil zurück.

Ein überaus spannender Aspekt bei Graphen und Netzwerken besteht darin, dass die erwähnten zentralen Fragen sich meist sehr einfach formulieren lassen, sich aber hinsichtlich der Komplexität ihrer Beantwortbarkeit durchaus unterscheiden können: Manche sind eindeutig und schnell lösbar, manche sind „schwer lösbar" – ein Begriff, den wir noch präzisieren müssen – manche sind auch mehrdeutig oder nachweisbar nicht lösbar. Für große Netzwerke in der Praxis muss man häufig auf numerische Simulationen zurückgreifen.

Was die Sprache betrifft, wie sie heute in der sogenannten diskreten Mathematik verwendet wird, kann man sagen, dass etwa zur Mitte des letzten Jahrhunderts eine Wiederentdeckung der Graphentheorie stattfand. Die vorgestellten Optimierungskonzepte, so etwa kürzeste Wege in Netzwerken, überschneidungsfreie Darstellungen oder Färbungsprobleme, sind von großem Interesse und die Algorithmen stetiger Aktualisierung und Verbesserung unterworfen. Seit dem Aufkommen des Internets sind empirische Daten für große Netzwerke der Praxis verfügbar, die Ende der 1990er-Jahre eine neue Welle der Netzwerktheorien angestoßen haben. Wir bleiben im gesamten Buch bei „praktischer Graphentheorie", selbst wenn die Graphentheorie auch und vor allem überreich an theoretischen, noch ungelösten Fragestellungen ist. Dabei lassen sich bereits zahlreiche Anwendungsbereiche identifizieren:

- Kürzeste-Wege-Probleme
- Rundreiseprobleme
- Straßenplanung, Ampelschaltungen
- Computernetzwerke, Schaltpläne
- Stundenpläne, Prüfungspläne
- Gozinto-Graphen, Produktionsplanung
- Breiten- und Tiefensuche
- Jobvermittlung, Partnersuche
- Müllabfuhr, Postbotentour
- ...

- Erzeugung von Netzwerken
- Robustheit von Netzwerken
- Ausbreitung in Netzwerken
- Suche in Netzwerken
- Soziale Netzwerke
- Transportprozesse
- Individuelles und kollektives Verhalten
- Verbreitung von Gerüchten
- Spieltheorie in Netzwerken
- ...

Das Selbststudium dieses Buches sollte in jedem Fall mit Kapitel 1 beginnen, da dort die fundamentalen Grundlagen für die Beschäftigung mit graphentheoretischen Problemen gelegt werden und eine Einführung in die Sprache der Graphen umfasst. Die weiteren Kapitel sind größtenteils voneinander unabhängig. Sie basieren auf entsprechenden Vorlesungen und Seminaren, die die Autoren an der Hochschule für angewandte Wissenschaften München halten.

Den Studierenden der Fakultät für Betriebswirtschaft der Hochschule München gilt unser besonderer Dank, da wir durch spannende Diskussionen in unseren Veranstaltungen interessante Ideen und wertvolle Anmerkungen für dieses Buch mitnehmen konnten. Herrn Bernhard Storf danken wir für die Durchsicht des Manuskripts und dem Hanser Verlag für die immer gute und flexible Zusammenarbeit.

München, im August 2014

André Krischke
Helge Röpcke

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen der Graphentheorie

In diesem ersten Teil sind die für die Praxisanwendungen wichtigen mathematischen Prinzipien der Graphentheorie zusammengestellt. Die Graphentheorie kommt mit wenigen zentralen Begriffen aus. Zuerst wird erklärt, was im Allgemeinen unter einem Graphen verstanden wird; anschließend werden einige spezielle Graphentypen näher erläutert. Wir werden uns Fragen stellen wie:

- Was versteht man unter einem Knotengrad?
- Wie sehen Bäume in der Graphentheorie aus?
- Unter welchen Voraussetzungen spricht man von nachbarschaftlichen Verhältnissen?

Ein interessanter Aspekt an der Graphentheorie ist, dass man im Wesentlichen ohne ein breites mathematisches Vorwissen auskommt. Zwar kann es an vielen Stellen hilfreich sein, über einige mathematische Grundkenntnisse zu verfügen. Wie man aber schnell feststellen wird, bedeutet die Beschäftigung mit der Graphentheorie, innerhalb der Sprache der Mathematik einen neuen Dialekt zu erlernen. Die Leserinnen und Leser werden merken, dass tatsächlich viele Begriffe in ihrer Darstellung genau ihrer Intuition oder Vorstellung entsprechen werden.

Kapitel zwei und drei geben einen Einblick in die Problematik der kürzesten Wege auf unbewerteten und bewerteten Graphen und stellen damit das Rüstzeug für den zweiten und den dritten Teil des Buchs zur Verfügung.

1 Grundbegriffe der Graphentheorie

Am Anfang einer neuen Theorie stehen oft wegbereitende Fragen und Beispiele, die die Menschen interessieren und beschäftigen. Nach diesem Prinzip gehen wir in diesem Buch vor: In allen nachfolgenden Kapiteln möchten wir mit einem solchen Beispiel beginnen – so auch in diesem ersten Grundlagenkapitel. Hier muss natürlich das wohl berühmteste Problem der Graphentheorie erwähnt werden, das in der Tat die Entwicklung der Graphentheorie erst angestoßen hat. Bezeichnend ist, dass es sich hierbei um ein Problem handelt, das wohl so mancher vielleicht als *typisch mathematisch* bezeichnen würde. Niemand aber vermutet, dass es irgendeinen Nutzen hätte, sich damit zu beschäftigen. Bekannt geworden ist das Problem unter dem Namen *Königsberger Brückenproblem.*

Wir gehen zurück in das Jahr 1737. Damals wurde an den zu seiner Zeit schon sehr berühmten Schweizer Mathematiker Leonhard Euler ein Problem herangetragen, das ihn schnell begeisterte und in dem er offenbar sehr viel mehr Tiefe und Struktur zu erkennen glaubte, als man auf den ersten Blick ahnen konnte. Das Problem ist schnell umschrieben: In der Stadt Königsberg, wo Euler damals tätig war, dem heutigen Kaliningrad, gab es sieben Brücken über den Fluss Pregel, die in der in *Bild 1.1* schematisch gezeigten Weise angeordnet waren. Die Einwohner von Königsberg rätselten schon seit geraumer Zeit über eine Frage, und zwar: *Gibt es einen Weg, der genau einmal über jede der sieben Brücken führt?* Oder: *Gibt es sogar einen solchen Weg, bei dem man am Ende wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt?* Niemand hatte bisher einen solchen Weg finden können, und so beauftragte man den Mathematiker Euler mit der Untersuchung dieses Phänomens.

Die Fragestellung war völlig anderer Natur als die bekannten geometrischen Probleme, etwa diejenigen aus der klassischen griechischen Geometrie. Hier kam es nämlich nicht auf Quan-

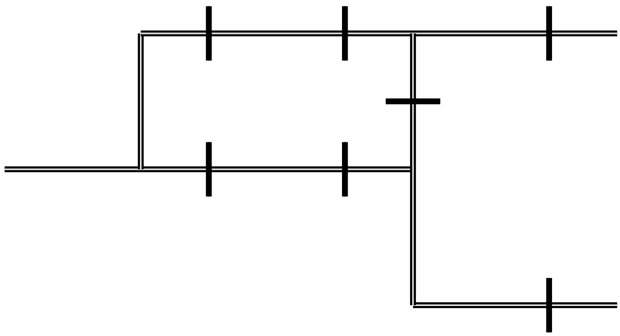


Bild 1.1 Schematische Darstellung der sieben Brücken von Königsberg: Gibt es einen Weg, der genau einmal über jede Brücke führt?

tifizierungen an, wie Euler schnell erkannte: Es war in der Tat völlig unerheblich, wie lang, wie weit voneinander entfernt oder wie sonst beschaffen die Brücken waren. Nur ihre gegenseitige Lage und welche Landteile sie miteinander verbanden schien eine Rolle zu spielen. Euler versuchte, an die Frage systematisch heranzugehen, und es gelang ihm auch, sie zu beantworten. (Gelingt es Ihnen auch?) Aber er hatte bei seinen Überlegungen mehr entdeckt: nämlich die wahren Strukturen hinter diesem Problem. Dass er diese erfassen und benennen konnte; dass er tiefer in die Thematik einstieg; dass er zum Schöpfer einer neuen Sprache wurde – dies war, darin stimmen die meisten Mathematiker überein, die Geburtsstunde der Graphentheorie.

1.1 Grundbegriffe für Graphen

In diesem Abschnitt führen wir die grundlegenden Begriffe und Notationen ein. Was ist eigentlich genau ein Graph, und was macht ihn aus? Erst mithilfe des nun folgenden Grundwerkzeugs können wir uns an die Formulierung und Lösung von Problemen aus der Anwendung machen.

1.1.1 Definition eines Graphen

Ein Graph ist schnell gezeichnet – tatsächlich gehört nichts weiter dazu als das Markieren einiger Punkte, die in diesem Zusammenhang meist *Knoten* (oder auch *Ecken*) genannt werden und von denen wiederum einige durch Linien, sogenannte *Kanten*, verbunden werden. Weder die Form oder Länge der Kanten noch die Anordnung der Knoten (etwa durch Angabe irgendwelcher Koordinaten) spielt dabei eine Rolle. Allein die Tatsache, welche seiner Knoten miteinander verbunden sind und welche nicht, charakterisiert einen Graphen und legt ihn fest.

Allein hier wird schon klar, dass man ein und denselben Graphen durch eine Unmenge verschiedener Zeichnungen realisieren kann. Jede solche Zeichnung, aus der die Verbindungen der Knoten und Kanten hervorgehen, nennen wir eine *Darstellung des Graphen*. Zwei verschiedene Darstellungen des gleichen Graphen werden wir der Einfachheit halber miteinander identifizieren; wir sagen dann auch einfach, die beiden Graphen sind *gleich*, so etwa die drei Graphen in *Bild 1.2*. Die intuitiv klare Definition eines Graphen können wir auch formaler angeben:

Graph

Ein *Graph* G ist ein Paar von Mengen

$$G = (V, E). \tag{1.1}$$

Dabei ist V eine Menge mit beliebig vielen Elementen, den sogenannten *Knoten* von G. Mit E wird die Menge aller *Kanten* bezeichnet. Eine Kante verbindet zwei (im Allgemeinen unterschiedliche) Knoten miteinander.

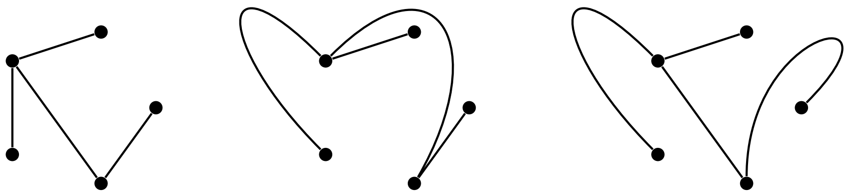


Bild 1.2 Drei verschiedene Darstellungen eines Graphen: Beschaffenheit der Kanten, Skalierung etc. machen keinen Unterschied.

Die hier gewählten Bezeichnungen sind in der Literatur so üblich; sie sind Abkürzungen der entsprechenden englischen Wörter: *vertex* für Knoten und *edge* für Kante. Man beachte, dass diese Definition eines Graphen auch den Fall eines oder mehrerer alleinstehender Knoten umfasst, wohingegen Kanten ohne Knoten nicht möglich sind: Es gibt kein alleinstehendes Kantenende und keine alleinstehende Kante.

Adjazenz und Inzidenz

Zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, oder zwei Kanten, die einen gemeinsamen Knoten besitzen, nennt man *benachbart* oder *adjazent*. Gehört ein Knoten zu einer Kante, so nennen wir die beiden *inzident*.

Bei der Modellierung des Königsberger Brückenproblems stellt man fest, dass es in Königsberg Landstücke (Knoten) gibt, die durch verschiedene Brücken (Kanten) miteinander verbunden sind. Das entspricht einem Graphen, bei dem es mehr als eine Kante zwischen zwei Knoten gibt. Dabei ist zu beachten, dass unsere Definition diesen Fall nicht ausschließt; häufig benutzt man aber zur Unterscheidung und näheren Bestimmung die Begriffe *Multigraph* für Graphen mit solchen Mehrfachkanten (vgl. Abschnitt 1.2.3) und *einfacher* oder *schlichter Graph* für den anderen Fall: Bei einem *einfachen* Graphen sind zwei unterschiedliche Knoten entweder durch *eine* Kante miteinander verbunden oder nicht.

Oft werden die Knoten eines Graphen auch benannt, manchmal in der Form $v_1, v_2, \ldots, v_n$, oder man nummeriert einfach schlicht mit Zahlen durch. In unseren Bildern ersetzen wir dann die Punkte durch kleine Kästchen oder Kreise, in denen der Name des Knotens steht (vgl. *Bild 1.3*). Die Kanten werden im Textfluss mit geschweiften Klammern bezeichnet, beispielsweise $\{1,2\}$

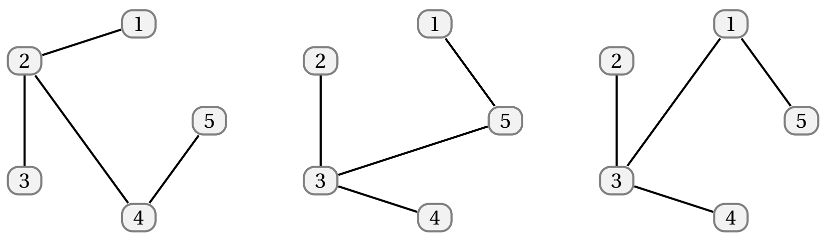


Bild 1.3 Drei Graphen mit Knotenbenennung; alle sind isomorph zueinander. Ohne Bezeichnung der Knoten wären die Graphen gleich, wenn auch nicht gleich dargestellt.

für die Kante, die die beiden Knoten 1 und 2 verbindet. Der linke Graph in *Bild 1.3* kann demnach beschrieben werden durch

$$V = \{1,2,3,4,5\} \qquad \text{und} \qquad E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{4,5\}\}.$$

Die Benennung von Knoten hat übrigens zur Folge, dass wir einen weiteren Begriff, den der *Isomorphie*, einführen müssen: Unterscheiden sich zwei Graphen G und G' höchstens in der Benennung ihrer Knoten, nicht aber in ihrer grundsätzlichen Struktur, so nennt man sie *isomorph* (also „im Wesentlichen gleich"):

Isomorphie von Graphen

Haben zwei Graphen G und G' die gleiche Anzahl von Knoten und gibt es darüber hinaus eine eineindeutige Zuordnung der Knoten von G und G', gemäß der die Kanten von G den Kanten von G' entsprechen, so nennt man die beiden Graphen *isomorph* und schreibt in diesem Fall $G \sim G'$.

Bild 1.3 macht dies deutlich: Die grundsätzliche Struktur aller drei dort abgebildeten Graphen ist identisch, aber die Graphen sind nicht gleich. Durch Umnummerierung der Knoten können sie aber ineinander übergeführt werden; so etwa der mittlere und der rechte durch Vertauschung der Knoten 1 und 5. Man beachte Folgendes: Würden wir die Bezeichnung der Knoten in *Bild 1.3* weglassen, dann wären die Graphen alle gleich, so wie in *Bild 1.2*, wenn auch nicht gleich dargestellt.

1.1.2 Grad eines Knotens

Sehr häufig ist es von Bedeutung, wie viele verschiedene Kanten von einem Knoten ausgehen. Damit kommen wir zu dem wichtigen Begriff des *Knotengrads* und einigen damit verbundenen Folgerungen.

Grad eines Knotens

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für jeden Knoten $v \in V$ definieren wir den *Grad von v* als die Anzahl der von v ausgehenden Kanten und schreiben dafür $d(v)$:

$$d(v) = |\{\{v,w\} \mid \{v,w\} \in E\}|. \tag{1.2}$$

Ein Graph, bei dem alle Knoten den konstanten Grad k haben, heißt *k-regulär*. Einen Knoten vom Grad 0 nennen wir *isoliert*.

Hin und wieder spielen auch der kleinste oder der größte Grad eines Knotens bzw. der durchschnittliche Knotengrad in einem Graphen eine Rolle:

Hierfür finden sich auch die Bezeichnungen $\delta(G)$ bzw. $\Delta(G)$ für den minimalen bzw. maximalen Grad eines Knotens von G oder $d(G)$ für den *Durchschnittsgrad von G*.

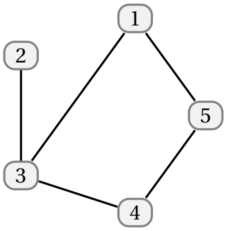


Bild 1.4 Ein Graph G mit Minimalgrad $\delta(G) = 1$ (bei Knoten 2), Maximalgrad $\Delta(G) = 3$ (bei Knoten 3) und Durchschnittsgrad $d(G) = \dfrac{1+2+2+2+3}{5} = 2$

Minimalgrad, Maximalgrad, Durchschnittsgrad eines Graphen

In einem Graphen $G = (V, E)$ bezeichnen wir mit

- $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$ den *Minimalgrad von G*,
- $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$ den *Maximalgrad von G*,
- $d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$ den *Durchschnittsgrad von G*.

In *Bild 1.4* sind diese Begriffe an einem konkreten Graphen verdeutlicht. In jedem Graphen gilt selbstverständlich

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

Offenbar gilt die wichtige Beziehung

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E| \tag{1.3}$$

bzw. über den Durchschnittsgrad ausgedrückt:

$$|V| \cdot d(G) = 2 \cdot |E|.$$

Die Summe aller Knotengrade in einem beliebigen Graphen entspricht also zweimal der Anzahl der Kanten – eine Tatsache, die man sich sehr schnell klarmachen kann, da jede Kante zwei Knoten miteinander verbindet und sich somit bei jedem dieser beiden Knoten der Knotengrad um 1 erhöht. Ein schöner Satz der aus der Gleichung (1.3) folgt, lautet:

Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad

In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Auch wenn in diesem Buch die Anwendungsaspekte im Vordergrund stehen sollen und es daher nicht um mathematische Beweise gehen soll, wollen wir uns dennoch an der einen oder anderen Stelle einige der Aussagen klarmachen, so auch hier (zumal man bei so viel „gerade", „ungerade" und „Knotengrad" schon einmal leicht den Überblick verlieren kann). Ausgehend von Gleichung (1.3) teilen wir die Menge unserer Knoten V in zwei Teilmengen auf, nämlich in die Teilmenge V_1, die alle Knoten mit geradem Grad enthält, und in die Teilmenge V_2, in welcher sich die Knoten mit ungeradem Grad befinden. Wir erhalten dann

$$2 \cdot |E| = \underbrace{\sum_{v \in V} d(v)}_{\text{gerade}} = \underbrace{\sum_{v \in V_1} d(v)}_{\text{gerade}} + \sum_{v \in V_2} \underbrace{d(v)}_{\text{ungerade}} \ .$$

Damit die rechte Seite der Gleichung ebenfalls eine gerade Zahl ergibt, muss auch der zweite Summand eine gerade Zahl ergeben (der erste Summand, eine beliebige Summe von geraden Zahlen ist immer gerade). Der zweite Summand (die Summe von ungeraden Zahlen) ist genau dann gerade, wenn die Anzahl der Summanden gerade ist. Anders ausgedrückt, von den Knoten mit ungeradem Grad muss es immer eine gerade Anzahl geben, und genau das wollten wir uns klarmachen.

Schon diese kleine, aber wichtige Aussage können wir an einem Praxisbeispiel verdeutlichen:

Beispiel 1.1

Eine Menge von sieben Unternehmen arbeitet in verschiedenen Kooperationen zusammen. Dabei unterhält jedes Unternehmen mit genau drei anderen Unternehmen engere Geschäftsbeziehungen. Ist dies möglich?

Modelliert man dieses Problem, wobei die Unternehmen durch Knoten und die bestehenden Geschäftsbeziehungen durch entsprechend verbindende Kanten beschrieben werden, so erhält man einen Graphen mit sieben Knoten, von denen jeder den Grad $d(v) = 3$ hat. In der Summe ergibt sich damit aber 21, eine ungerade Zahl: Ein solches Szenario kann es daher nicht geben, weil es einen entsprechenden Graphen nicht geben kann. ■

Betrachten wir eine kleine Modifikation von *Beispiel 1.1*, nämlich acht statt sieben Unternehmen. Was stellt man fest? Die Gradsumme ergibt nun 24, was zwar noch nicht automatisch bedeutet, dass es einen solchen Graphen gibt – aber es gibt ihn: In *Bild 1.5* ist eine schöne Darstellung und damit mögliche Lösung für acht Unternehmen (Knoten) mit jeweils exakt drei Geschäftsbeziehungen (Kanten) zu sehen. Der entstehende Graph ist 3-regulär.

Ähnlich kann man bei den unterschiedlichsten Fragestellungen argumentieren, sofern es um Verbindungen gewisser Objekte geht. Beispielweise kann es auch keine Gruppe von, sagen wir, neun Personen geben, in der jede Person exakt fünf der anderen Personen kennt (wobei wir annehmen, dass „Kennen“ eine symmetrische Relation ist). Behauptet dies eine der neun Personen dennoch, wissen wir jetzt aufgrund der Graphentheorie, dass sie die Unwahrheit sagt.

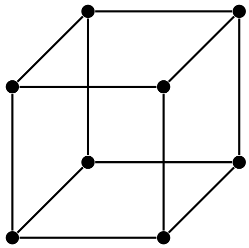


Bild 1.5 Ein 3-regulärer Graph mit 8 Knoten

1.1.3 Wege und Kreise

Zwei sehr elementare und gerade daher sehr wichtige Typen von Graphen wollen wir nun kurz vorstellen: die Wege und die Kreise. Unter einem *Weg* verstehen wir einen Graphen, der, kurz gesagt, aus „aneinander gehängten“ Kanten besteht. Damit gibt es bei einem Weg zwei ausgezeichnete Knoten, die wir als Endknoten auffassen können. Später, wenn wir orientierte Graphen betrachten, ist es sinnvoll, diese beiden Knoten mit *Start* bzw. *Ziel* zu bezeichnen; zunächst werden wir dies aber nicht tun. Wir geben die formale Definition:

Definition eines Wegs

Für $n \geq 2$ nennt man einen Graphen P_n mit der Knotenmenge $V(P_n) = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ und der Kantenmenge

$$E(P_n) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$$

einen *Weg (oder Pfad) der Länge n*, sofern keine Kante mehrfach durchlaufen wird. Knoten hingegen dürfen bei einem Weg mehrfach vorkommen (d. h., die Knoten v_i müssen nicht notwendig paarweise verschieden sein). Lässt man auch mehrfach durchlaufene Kanten zu, so spricht man von einem *Kantenzug*. Eine häufig genutzte Notation für einen solchen Weg ist die Tupelschreibweise seiner Knoten mithilfe runder Klammern:

$$P_n = (v_0, v_1, \ldots, v_n).$$

Meist fordert man zusätzlich explizit, dass $v_0 \neq v_n$ gelten muss, der Weg also *offen* ist.

Man beachte, dass laut Definiton für den Weg P_n die Knotenmenge aus höchstens $n+1$ Knoten und die Kantenmenge aus n Kanten besteht. *Bild 1.6* zeigt einige Darstellungen des Weges P_4; hier wird auch klar, dass die Anzahl der Knoten kleiner sein kann als $n+1$.

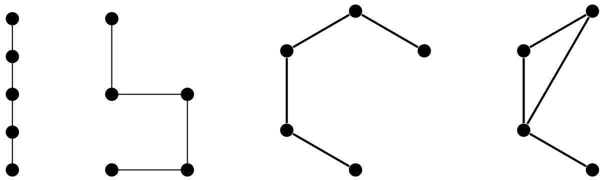


Bild 1.6 Verschiedene Darstellungen des Weges P_4: Alle haben vier Kanten, die Anzahl der Knoten beträgt fünf oder weniger, wie der Graph ganz rechts zeigt.

Besonders interessieren uns im Folgenden Wege als *Teilgraphen eines größeren Graphen G*. Wir sprechen in diesem Fall von einem „Weg auf G“. In *Bild 1.7* beispielsweise sehen wir eine Darstellung des P_4 und eine Darstellung eines P_4 als Weg innerhalb eines größeren Graphen, wobei die Kanten des P_4 hier fett dargestellt sind. Es ist sehr oft üblich, einen Weg mithilfe der Namen seiner Knoten zu benennen. In *Bild 1.7* würde man das Exemplar des P_4 beispielsweise kurz mit $(3, 2, 1, 4, 5)$ oder auch mit (32145) bezeichnen. Die Frage, welche Art von Wegen es auf einem gegebenen Graphen gibt, wird uns immer wieder beschäftigen.

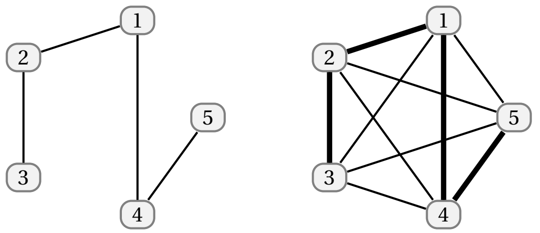


Bild 1.7 Darstellungen eines P_4 (links) und eines P_4 in einem größeren Graphen (rechts). Die Realisation des P_4 kann man in diesem Graphen über die Namen der Knoten konkretisieren: (32145).

Der Begriff des Weges legt dann noch einen weiteren sehr wichtigen Begriff nahe, den des *Zusammenhangs*:

Zusammenhang bei Graphen

Wir nennen einen Graphen G *zusammenhängend*, falls es zu je zwei verschiedenen Knoten $v, w \in V(G)$ einen Weg auf G mit v und w als Endknoten gibt. Ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von G heißt *Zusammenhangskomponente von* G.

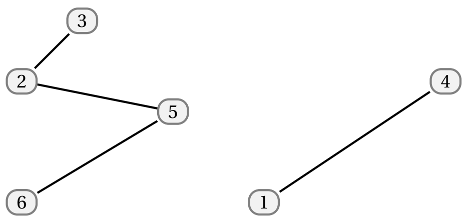


Bild 1.8 Ein nicht zusammenhängender Graph mit zwei Zusammenhangskomponenten; hier gibt es beispielsweise zwischen Knoten 4 und Knoten 5 keinen Weg.

In *Bild 1.8* ist beispielsweise ein nicht zusammenhängender Graph mit zwei Zusammenhangskomponenten dargestellt. Bisher haben wir nur zusammenhängende Graphen betrachtet, und wir werden dies auch weiterhin überwiegend tun. Wege fassen wir in der Regel immer als *offen* auf, was bedeutet, dass ihre Endpunkte stets verschieden sind. Lässt man diese Bedingung fallen, so erhält man *geschlossene Wege* oder *Kreise*:

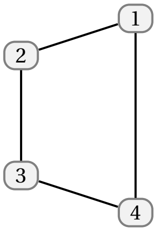
Definition eines Kreises

Für $n \geq 3$ heißt der Graph C_n mit $V(C_n) = \{v_0, v_1, \ldots, v_n = v_0\}$ und

$$E(C_n) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_0\}\}$$

Kreis der Länge n.

Auch hier interessieren wir uns vor allem für Kreise als Teilgraphen anderer Graphen G. *Bild 1.9* zeigt eine Darstellung des C_4 und eine Darstellung eines C_4 auf einem größeren Graphen (fett dargestellt).



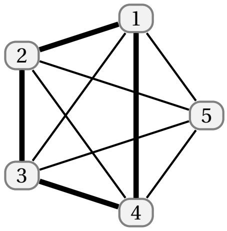


Bild 1.9 Darstellungen eines C_4 (links) und eines C_4 in einem größeren Graphen (rechts). Die Realisation des C_4 kann man wiederum über die Namen der Knoten konkretisieren: (12341).

1.2 Typen von Graphen

Da wir inzwischen die Grundbegriffe der Graphentheorie kennengelernt und den ein oder anderen Graph gesehen haben, lohnt es sich, einige Typen von Graphen etwas genauer zu betrachten. Bei der Modellierung von unterschiedlichen Problemstellungen aus der Praxis werden selbstverständlich auch ganz unterschiedliche Darstellungen von Graphen benötigt. Ein kleines Beispiel: Wenn wir mithilfe eines Graphen ein Zuordnungsproblem (Kinder sind auf Kindergartenplätze zu verteilen) darstellen möchten, dann hat der dazugehörige Graph mit Sicherheit eine andere Gestalt als die Darstellung eines Graphen zur Modellierung von Netzplänen im öffentlichen Nahverkehr (in denen wir zum Beispiel nach dem kürzesten Weg suchen könnten, wie man von einer beliebigen Station A zu einer anderen Station B gelangt).

Die jeweilige Problemstellung aus der Praxis gibt uns hierbei in den allermeisten Fällen den Graphentyp und die mit diesem verbundenen Eigenschaften vor. Mithilfe der bereits eingeführten Begriffe adjazent und inzident gehen wir auch auf eine andere Darstellung von Graphen in Form von Matrizen ein.

1.2.1 Vollständige Graphen

Der vollständige Graph bildet bei einer Reihe von Problemen die Grundlage der Modellierung.

Vollständiger Graph

Ein Graph, bei dem je zwei Knoten benachbart sind, heißt *vollständig*. Für $n \geq 2$ bezeichnen wir den vollständigen Graphen auf n Knoten mit K_n.

Die Definition umfasst nicht den Fall eines einzelnen alleinstehenden Knotens, den wir mit K_1 bezeichnen.

Betrachten wir einige vollständige Graphen für kleine Knotenzahlen, wie sie in *Bild 1.10* zu sehen sind. Dort erkennt man, dass der sogenannte K_1 keine, K_2 eine, K_3 drei, K_4 sechs, K_5 zehn und K_6 15 Kanten hat. Können Sie hieraus eine Vermutung formulieren, wie viele Kanten der K_7 hat?

Der Übergang von K_{n-1} zu K_n erfordert $n-1$ neue Kanten, denn der hinzugefügte Knoten ist mit jedem der bisher $n-1$ vorhandenen Knoten zu verbinden. Damit erhält man für die Kantenanzahl des K_n die Summe der Zahlen bis $n-1$: