Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

RESEARCH

Jascha Quarder

Mathematisches Modellieren mit digitalen Werkzeugen in der Lehrkräftebildung

Konzeption und Evaluation eines Lehr-Lern-Laborseminars

Springer Spektrum

Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

In der Reihe werden theoretische und empirische Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik – von der vorschulischen Bildung bis zur Hochschule – publiziert. Dabei kann eine Vernetzung innerhalb der Mathematikdidaktik sowie mit den Bezugsdisziplinen einschließlich der Bildungsforschung durch eine integrative Forschungsmethodik zum Ausdruck gebracht werden. Die Reihe leistet so einen Beitrag zur theoretischen, strukturellen und empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik im Zusammenhang mit der Qualifizierung von wissenschaftlichem Nachwuchs.

Jascha Quarder

Mathematisches Modellieren mit digitalen Werkzeugen in der Lehrkräftebildung

Konzeption und Evaluation eines Lehr-Lern-Laborseminars

Springer Spektrum

Jascha Quarder
Mathematik und Informatik
Universität Münster
Lübbecke, Deutschland

Dissertation am Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik der Universität Münster
Tag der mündlichen Prüfung: 19.02.2024
Erstgutachter: Prof. Dr. Gilbert Greefrath
Zweitgutachter: Prof. Dr. Hans-Stefan Siller

ISSN 2523-8604 ISSN 2523-8612 (electronic)
Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik
ISBN 978-3-658-44995-7 ISBN 978-3-658-44996-4 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-44996-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über https://portal.dnb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Karina Kowatsch
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Wenn Sie dieses Produkt entsorgen, geben Sie das Papier bitte zum Recycling.

Geleitwort

Das hier dargestellte Forschungsprojekt von Jascha Quarder beschäftigt sich mit den Zusammenhängen zwischen mathematischem Modellieren und digitalen Werkzeugen in der Lehrkräftebildung sowie der Förderung entsprechender professioneller Kompetenzen in Lehr-Lern-Laboren.

Die Arbeit befasst sich daher zentral mit dem mathematischen Modellieren. Es werden Ziele und Perspektiven des mathematischen Modellierens im Unterricht diskutiert sowie die Integration und Förderung des mathematischen Modellierens thematisiert. Darüber hinaus werden Potenziale und Herausforderungen diskutiert, die mit dem Einsatz digitaler Werkzeuge verbunden sind. Dabei werden die Begriffe Medien, digitale Medien, digitale Werkzeuge und digitale Lernumgebungen erläutert, voneinander abgegrenzt und wichtige Theorien wie die der instrumentellen Genese und der Cognitive Load Theory angemessen aufgegriffen.

Folgerichtig wird auch der Einsatz digitaler Werkzeuge beim mathematischen Modellieren behandelt. In der Arbeit wird eine neue Sichtweise auf den Modellierungskreislauf mit digitalen Werkzeugen dargestellt und das Simulieren genauer beleuchtet. Jascha Quarder bereitet verschiedene vorhandene Ansätze und Theorien zielgerichtet für die vorliegende Arbeit auf und nutzt sie.

Insbesondere werden in dieser Arbeit zwei Dimensionen der professionellen Kompetenz von Lehrkräften fokussiert: die diagnostische Kompetenz und die adaptive Interventionskompetenz. Es wird beschrieben, welche professionelle Kompetenz zum Lehren des mathematischen Modellierens sowie zum Lehren mit digitalen Werkzeugen notwendig ist. Schließlich werden die beiden letzten Kompetenzbereiche miteinander verknüpft. Dadurch wird die professionelle

Kompetenz zum Lehren des Simulierens und mathematischen Modellierens mit digitalen Werkzeugen betont.

Im Kern der Arbeit geht es dann um drei sehr gut herausgearbeitete Fragenkomplexe zur Wissensstruktur, zur Wissensentwicklung und zu Einflussfaktoren auf die Wissensentwicklung des fachdidaktischen Wissens über digitalgestützte Simulations- und Modellierungsaufgaben und über adaptive Interventionen beim Simulieren und mathematischen Modellieren mit digitalen Werkzeugen, wobei ein besonderer Fokus auf dem für die Studie entwickelten und mehrfach durchgeführten Lehr-Lern-Laborseminar zum mathematischen Modellieren mit digitalen Werkzeugen liegt.

Die Ergebnisse werden inhaltlich interpretiert, indem sie in bereits vorhandene theoretische Erkenntnisse und empirische Befunde aus der Literatur eingeordnet werden. Außerdem werden das Studiendesign, die Rahmenbedingungen, das Messinstrument und die Auswertungsmethodik im Hinblick auf die Ergebnisse beleuchtet und kritisch hinterfragt.

Die Arbeit zeigt insgesamt sehr gut und auf hohem Niveau die umfangreichen Untersuchungen zu Lehr-Lern-Laboren zum mathematischen Modellieren mit digitalen Werkzeugen im Rahmen des Projekts *Dealing with Diversity* der Qualitätsoffensive Lehrerbildung an der Universität Münster.

Münster
im April 2024

Gilbert Greefrath

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen eines dreijährigen Einzelprojektes am Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik der Universität Münster. Das Einzelprojekt war Teil des interdisziplinären Verbundprojekts *DwD.LeL* (Dealing with Diversity. Lehr-Lern-Labore, Lernwerkstätten und Learning-Center), das im Rahmen der *Qualitätsoffensive Lehrerbildung* von Bund und Ländern mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert wurde (Förderkennzeichen: 01JA1921). Bei der Durchführung des Projekts und der Erstellung der Arbeit haben mich in den drei Jahren viele Menschen aus meinem beruflichen und privaten Umfeld unterstützt, denen ich an dieser Stelle danken möchte.

Allen voran danke ich meinem Erstgutachter und Doktorvater Prof. Dr. Gilbert Greefrath, der mir großes Vertrauen entgegengebracht und mich mit seiner fachlichen Expertise stets hervorragend beraten hat. Durch gemeinsame Lehrveranstaltungen, Publikationen und Konferenzvorträge konnte ich viel von ihm lernen, wofür ich ihm sehr dankbar bin. Besonders hervorzuheben sind seine kritisch-konstruktiven, aber wertschätzenden Rückmeldungen, die mich sowohl fachlich als auch motivational stets weitergebracht haben.

An zweiter Stelle möchte ich mich bei meinem Zweitgutachter Prof. Dr. Hans-Stefan Siller und seinem Doktoranden Sebastian Gerber von der Universität Würzburg bedanken. Unsere standortübergreifende Zusammenarbeit habe ich als sehr fruchtbar und bereichernd erlebt. Durch unsere regelmäßigen Treffen – sei es in Form von Zoom-Meetings oder Präsenztreffen – konnten wir viele Ideen bündeln und Synergien nutzen. Der intensive Austausch mit Sebastian hat letztendlich zu einer Freundschaft geführt, die mir sehr am Herzen liegt und von der ich hoffe, dass sie auch über unsere Dissertationsprojekte hinaus bestehen bleibt.

Danken möchte ich auch meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut. Zum einen bin ich Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow, meinem Drittgutachter, zu großem Dank verpflichtet. Insbesondere in methodischen Fragen war er stets ein verlässlicher und kompetenter Ansprechpartner, der sich viel Zeit für mich genommen hat. Zum anderen möchte ich mich bei den anderen Promovierenden des Instituts bedanken. Der regelmäßige Austausch, sei es formell im Rahmen von Arbeitsgruppensitzungen oder informell auf dem Flur, war für mich sehr inspirierend und wertvoll. Besonders hervorzuheben ist hier mein Büropartner Maurice Krause. Mit ihm und unserer Studienrätin Dr. Katharina Kirsten habe ich viele spannende und zum Teil lange Diskussionen zu inhaltlichen und methodischen Fragen geführt.

Nicht nur aus dem beruflichen, sondern auch aus dem privaten Umfeld habe ich viel Unterstützung bei der Durchführung des Projektes und der Erstellung der Arbeit erfahren. An erster Stelle ist hier meine Familie zu nennen. Meine Eltern und meine beiden Schwestern haben mich gerade in den herausfordernden Phasen der Promotion mit ihren warmen Worten aufgebaut und ermutigt. Vielen Dank dafür! Außerdem danke ich Julian Rahe, der mir als guter Freund zur Seite stand und mich durch seine eigene Promotion auch inhaltlich beraten konnte. Mein Dank gilt auch Katharina Rahe und Malte Albrecht. Sie haben mich nicht nur als gute Freunde begleitet, sondern darüber hinaus den Text der Arbeit sprachlich gründlich Korrektur gelesen. Für diese Hilfe bin ich sehr dankbar.

Zum Schluss möchte ich noch ein paar Worte an meine Freundin Inga richten. Ihr gilt mein größter Dank. Inga, du warst während der gesamten Promotionszeit eine unverzichtbare und tragende Säule in meinem Leben. Dein uneingeschränkter Rückhalt, dein immerwährender Zuspruch und deine mitfühlende Art haben mich sehr motiviert und mir viel Kraft gegeben. Als Sozialarbeiterin in einem Alten- und Pflegeheim konntest du mir mit deinem pädagogischen Einfühlungsvermögen besonders in belastenden Momenten zur Seite stehen und mich aufbauen. Dich an meiner Seite zu haben, macht mich sehr glücklich. Ich freue mich auf unsere gemeinsame Zukunft.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Einleitung

1

Mathematisches Modellieren ist eine von derzeit sieben prozessbezogenen Kompetenzen, die in den deutschen Bildungsstandards für das Fach Mathematik für die Sekundarstufe I (vgl. KMK, 2022a) als verbindliche Anforderungen an Schülerinnen und Schüler beschrieben sind. Aber nicht nur im deutschen Bildungssystem, sondern weltweit hat das mathematische Modellieren in den vergangenen Jahrzehnten in viele nationale Curricula von der Primarstufe bis zur Oberstufe Einzug gehalten (Kaiser, 2020). Auch für den institutionalisierten Vorschulbereich wird das mathematische Modellieren im Rahmen der frühkindlichen Förderung diskutiert (Eilerts & van der Velden, 2018). Die weitreichende Integration in den Bildungsbereich lässt sich unter anderem mit der lebens- und berufsbezogenen Relevanz begründen (Blum, 1985; Niss et al., 2007; Winter, 1995). Mathematisches Modellieren kann dazu beitragen, Phänomene aus der eigenen Lebenswelt besser zu verstehen und Herausforderungen aus dem (späteren) beruflichen Umfeld zu bewältigen (Maaß, 2004; Siller, 2015; Winter, 1995). Auf diese Weise kann dem Mathematiklernen ein Sinn gegeben und die in der alltäglichen Schulpraxis häufig gestellte Frage „Wofür brauchen wir das eigentlich?“ in authentischer Form begegnet werden (Kaiser & Stender, 2015). Nicht zuletzt durch die Coronapandemie ist das öffentliche Bewusstsein für den Nutzen mathematischer Modelle, mit deren Hilfe beispielsweise Fallzahlen für die Zukunft simuliert werden, in der Gesellschaft spürbar gestiegen (Cevikbas et al., 2023; Elschenbroich, 2020; Ossadnik & Roth, 2023; Siller, Geiger, et al., 2023).

Im Kontext des mathematischen Modellierens werden zudem in den letzten Jahren vermehrt die Potenziale digitaler Werkzeuge diskutiert (u. a. Geiger, 2017; Cevikbas et al., 2023). Beispielsweise können große Datensätze, wie sie in realen Problemstellungen häufig vorkommen, mit digitalen Werkzeugen leichter verarbeitet und visualisiert werden (Greefrath & Siller, 2018). Auch im

J. Quarder, *Mathematisches Modellieren mit digitalen Werkzeugen in der Lehrkräftebildung*, Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik, https://doi.org/10.1007/978-3-658-44996-4_1

Umgang mit Funktionen, die komplexe Phänomene der Realität beschreiben, bieten digitale Werkzeuge Vorteile. Beispielsweise kann die Lösung anspruchsvoller Funktionsgleichungen an das digitale Werkzeug ausgelagert und so beschleunigt werden (Thurm, 2020). Für bestimmte Modellierungen, die etwa eine erhebliche Rechenleistung erfordern, ist der Einsatz digitaler Werkzeuge sogar unerlässlich (Siller & Greefrath, 2010). Da auch die Nutzung digitaler Werkzeuge in den oben genannten Bildungsstandards durch die prozessbezogene Kompetenz *Mit Medien mathematisch arbeiten* beschrieben wird (KMK, 2022a), ist es ein legitimes Unterrichtsziel, das mathematische Modellieren mit dem Einsatz digitaler Werkzeuge zu verknüpfen. Umgesetzt werden kann dieses Ziel mit sogenannten digitalgestützten Modellierungsaufgaben. Mit ihnen ist es möglich, die Potenziale digitaler Werkzeuge beim mathematischen Modellieren zu adressieren und zwei verbindliche prozessbezogene Kompetenzen gleichzeitig zu fördern. Unterstützt wird dieses Vorhaben durch aktuelle empirische Studien. So konnte in einer quantitativen Interventionsstudie gezeigt werden, dass die zusätzliche Nutzung digitaler Werkzeuge die Förderung klassischer Modellierungskompetenzen nicht mindert und somit mathematisches Modellieren und der Umgang mit digitalen Werkzeugen gleichzeitig erlernt werden können (Greefrath et al., 2018; Hankeln, 2019; Hankeln & Greefrath, 2021, S. 23).

Allerdings wird in der Studie auch berichtet, dass der Erfolg der gewünschten gleichzeitigen Förderung der beiden prozessbezogenen Schülerkompetenzen entscheidend von der Qualität der Aufgabe und ihrer Implementierung in den Unterricht abhängt (Hankeln, 2019). Die Lehrkraft spielt also eine zentrale Rolle (Hattie, 2009; Lipowsky, 2006). Konkret bedeutet dies, dass sich die Potenziale digitalgestützter Modellierungsaufgaben nur dann entfalten können, wenn die Lehrkraft über entsprechende professionelle Kompetenzen verfügt (Gerber et al., 2023). Die Lehrkraft muss wissen, wie sie geeignete digitalgestützte Modellierungsaufgaben auswählen, anpassen und entwickeln kann (Quarder et al., 2023) und wie sie die Lernenden bei der Bearbeitung dieser Aufgaben sinnvoll begleiten und unterstützen kann (Gerber et al., 2023).

Zur Förderung solcher bereichsspezifischen professionellen Kompetenzen eignen sich sogenannte Lehr-Lern-Laborseminare, die im Rahmen der ersten Phase der Lehrkräftebildung an der Universität für Lehramtsstudierende angeboten werden (Quarder & Greefrath, 2024; Roth & Priemer, 2020). In den vergangenen Jahren haben sich – auch dank der intensiven finanziellen Förderung durch die *Qualitätsoffensive Lehrerbildung* – zahlreiche solcher Lehr-Lern-Labore in der deutschen Hochschullandschaft etabliert (vgl. Priemer & Roth, 2020). In Abgrenzung zu einer klassischen Vorlesung, die primär auf die Vermittlung verschiedener Wissensarten ausgerichtet ist, steht bei diesem Veranstaltungsformat der Erwerb praxisorientierter Handlungskompetenzen im Vordergrund (Brüning et al., 2020). Erreicht werden soll dies durch die Integration schulpraktischer Elemente (z. B. Praxisphase mit Schülerinnen und Schülern), welche mit komplexitätsreduzierenden Bedingungen (z. B. Betreuung von Kleingruppen statt ganzer Schulklassen) verknüpft werden (Dohrmann & Nordmeier, 2020; Marohn et al., 2020).

In Bezug auf das Lehren des mathematischen Modellierens ohne digitale Werkzeuge konnten Raphael Wess (2020) und Heiner Klock (2020) bereits Ergebnisse erzielen, die im Kontext dieser Arbeit als richtungsweisend betrachtet werden können. Im Rahmen ihrer Dissertationen haben sie jeweils ein Lehr-Lern-Laborseminar zur Förderung von Teilaspekten dieser bereichsspezifischen professionellen Kompetenz konzipiert, durchgeführt und durch eine quantitative Begleitforschung systematisch evaluiert. Auf diese Weise konnten sie nachweisen, dass die modellierungsspezifische professionelle Aufgabenkompetenz (vgl. Wess, 2020) und adaptive Interventionskompetenz (vgl. Klock, 2020) durch spezifische Lehr-Lern-Laborseminare gezielt gefördert werden können.

Angesichts der genannten Potenziale digitaler Werkzeuge beim mathematischen Modellieren stellt sich nun die Frage, inwieweit auch ein Lehr-Lern-Laborseminar zur Förderung der professionellen Kompetenz zum Lehren des mathematischen Modellierens mit digitalen Werkzeugen entwickelt und wirksam implementiert werden kann. Diese Frage bildete den Ausgangspunkt für das Projekt *MiRA-digital* (Mathematik in realen Anwendungen unter Berücksichtigung digitaler Werkzeuge), welches dieser Arbeit zugrunde liegt. Im Rahmen des Projekts wurde das Lehr-Lern-Laborseminar *MiRA-digital* konzipiert und ab 2021 an der Universität Münster für Mathematiklehramtsstudierende angeboten. Parallel dazu wurde ein Messinstrument zur Erfassung der professionellen Kompetenz zum Lehren des mathematischen Modellierens mit digitalen Werkzeugen entwickelt (vgl. Gerber & Quarder, 2022). Mit Hilfe dieses Messinstruments wurden im Rahmen einer quantitativen Interventionsstudie im Prä-Post-Design Daten von Lehramtsstudierenden erhoben, um die Wirksamkeit des Seminars MiRA-digital zu evaluieren.

Ziel der vorliegenden empirischen Arbeit ist es, die Konzeption des Seminars vorzustellen und zentrale Ergebnisse zur Wirksamkeit des Seminars hinsichtlich ausgewählter Kompetenzaspekte zu präsentieren. Bei den ausgewählten Kompetenzaspekten handelt es sich um das fachdidaktische Wissen über digitalgestützte Simulations- und Modellierungsaufgaben und das fachdidaktische Wissen über adaptive Interventionen beim Simulieren und mathematischen Modellieren mit digitalen Werkzeugen. Beide Konstrukte basieren ebenso wie das Seminar MiRA-digital auf Vorarbeiten von Raphael Wess (2020) und Heiner Klock (2020).

Zur besseren theoretischen Erfassung dieser Konstrukte werden in der vorliegenden Arbeit in einem Theorieteil zunächst die Begriffe mathematisches Modellieren, digitale Werkzeuge und professionelle Kompetenz geklärt, um anschließend mit Hilfe dieser Begriffe die beiden fachdidaktischen Wissensarten abzuleiten. Außerdem werden im Theorieteil die Merkmale und Besonderheiten von Lehr-Lern-Laborseminaren diskutiert. Es folgt ein Kapitel mit einer Zusammenfassung der dargestellten theoretischen Erkenntnisse und einer darauf aufbauenden Herleitung der Forschungsfragen. Anschließend wird in einem Methodenteil die Methodik zur Beantwortung der Forschungsfragen vorgestellt. Dazu gehören unter anderem die Beschreibung der Treatments und der Stichprobe sowie die Darstellung der Erhebungs- und Auswertungsmethoden. Im darauffolgenden Kapitel werden die zentralen Ergebnisse der Studie entlang der Forschungsfragen präsentiert. Gegenstand der Ergebnispräsentation sind sowohl deskriptive als auch inferenzstatistische Befunde. Im nächsten Kapitel werden die Ergebnisse und die Methodik diskutiert. Dies schließt auch eine Auseinandersetzung mit den Grenzen der Studie ein. Ein abschließendes Kapitel gibt einen Ausblick, der sowohl Implikationen für die Praxis als auch für die Forschung enthält.

2 Mathematisches Modellieren

Mathematisches Modellieren hat sich in den letzten Jahrzehnten sowohl in der fachdidaktischen Forschung als auch in der Schulpraxis zu einem zentralen Thema entwickelt. Zum einen zeigt sich dies an den zahlreichen wissenschaftlichen Publikationen, die in den letzten Jahren zu diesem Thema erschienen sind. Zum anderen ist das mathematische Modellieren in vielen Ländern in den nationalen Curricula verankert, zum Beispiel in den US-amerikanischen *Common Core Standards in Mathematics* oder den deutschen Bildungsstandards im Fach Mathematik, und damit an vielen Orten der Welt fester Bestandteil der täglichen Unterrichtspraxis (Kaiser et al., 2023). Im Rahmen dieser Arbeit ist es nicht möglich, auf die Vielzahl an Forschungsbeiträgen und die umfangreichen Diskussionen rund um das mathematische Modellieren im Detail einzugehen, geschweige denn die historische Entwicklung nachzuzeichnen. Vielmehr werden in diesem Kapitel ausgewählte theoretische Hintergründe zum mathematischen Modellieren dargestellt, die im Zusammenhang mit der später vorgestellten empirischen Untersuchung und der Konzeption der betrachteten Lehrveranstaltungen stehen.

Für ein einheitliches Begriffsverständnis werden dazu zunächst die Begriffe Modell, Modellieren, Modellierungskreisläufe und -kompetenz geklärt. Darüber hinaus wird erörtert, welche Ziele und Perspektiven das mathematische Modellieren im Unterricht haben kann und wie die Integration sowie Förderung im Unterricht gelingen kann. Abschließend werden Modellierungsaufgaben betrachtet, da diese die Modellierungsaktivitäten von Schülerinnen und Schülern im Unterricht initiieren. Dabei werden zunächst verschiedene Typen von Aufgaben mit Realitätsbezug im Allgemeinen vorgestellt und anschließend Kriterien von Modellierungsaufgaben im Speziellen diskutiert.

J. Quarder, *Mathematisches Modellieren mit digitalen Werkzeugen in der Lehrkräftebildung*, Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik, https://doi.org/10.1007/978-3-658-44996-4_2

2.1 Begriffsklärung

2.1.1 Modell

Mathematisches Modellieren ist semantisch eng mit dem Begriff des mathematischen Modells verbunden. Dies zeigt sich schon daran, dass der Begriff *Modell* im ersten Teil des Wortes *Modellieren* enthalten ist. Im Allgemeinen sind Modelle „eine vereinfachende, nur gewisse, einigermaßen objektivierbare Teilaspekte berücksichtigende Darstellung der Realität“ (Henn & Maaß, 2003, S. 2). Bezogen auf dieses Begriffsverständnis stellt eine handelsübliche Landkarte ein Beispiel für ein Modell dar (Henn, 2002). Auf ihr wird ein Ausschnitt der Realität vereinfacht und stark verkleinert abgebildet. Dabei werden für einen bestimmten Zweck wesentliche Teilaspekte der Realität berücksichtigt (z. B. Bewaldung und Höhenprofil), die meisten Aspekte der Realität aber bewusst vernachlässigt. Gemäß der zuspitzenden Aussage „all models are wrong, but some are useful“ (Box, 1979, S. 2) sind Modelle daher nie vollständig korrekt, aber geeignet, komplexe Phänomene aus der Welt für den Menschen gezielt zu vereinfachen und so auf bereits bekannte Probleme zurückzuführen (Velten, 2009).

Mathematische Modelle stellen eine Teilmenge der Modelle im Allgemeinen dar. Sie können formal als ein Tripel (R, M, f) aufgefasst werden, wobei R ein Ausschnitt aus der Realität, M ein Teil der mathematischen Welt und f eine geeignete Abbildung zwischen R und M ist (Niss et al., 2007). Mathematische Modelle enthalten also Elemente der Mathematik (z. B. geometrische Figuren, Funktionsgraphen oder Gleichungen), die unter bestimmten Gesichtspunkten geeignet sind, Ausschnitte oder Phänomene der Realität angemessen zu erfassen (Blum, 1985). Abbildung 2.1 zeigt als Beispiel ein mathematisches Modell aus dem Bereich der Geometrie. Drei zusammengesetzte geometrische Figuren, zwei Rechtecke und ein Dreieck, stellen näherungsweise die komplexe Form der Vereinigten Staaten von Amerika (USA)[1] dar.

[1] Die beiden Bundesstaaten Alaska und Hawaii, die nicht im Kerngebiet der USA liegen, werden in Abbildung 2.1 nicht berücksichtigt.

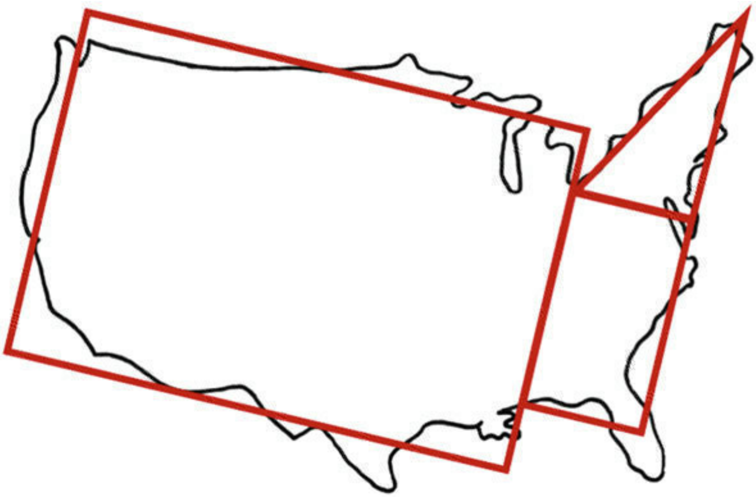

Abbildung 2.1 Geometrisches Modell zur Beschreibung der Topografie der Vereinigten Staaten von Amerika (USA)

Mathematische Modelle zeichnen sich also dadurch aus, dass mit ihnen eine realitätsbezogene Fragestellung (in diesem Beispiel die Beschreibung der Topografie der USA) unter Anwendung von Mathematik bearbeitet werden kann. Das Beispiel aus der Abbildung 2.1 macht aber auch deutlich, dass mathematische Modelle nicht eindeutig sind. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die topografische Form der USA mit geometrischen Figuren anzunähern. Demselben Sachverhalt kann also mit unterschiedlichen, mehr oder weniger komplexen Modellen begegnet werden (Greefrath, 2018). Außerdem fällt auf, dass das geometrische Modell in diesem Fall nicht versucht, die Realität selbst zu beschreiben, sondern bereits auf einem nicht-mathematischen Modell basiert, nämlich einer Umrisszeichnung der USA. Das Land in seiner vollen Größe geometrisch zu beschreiben, ist nicht denkbar. Bei der Bearbeitung eines realitätsbezogenen Problems ist es daher nicht ungewöhnlich, mehrere mathematische und nicht-mathematische Modelle zu konstruieren (Niss et al., 2007).

Je nach dem Zweck, der mit einer Modellkonstruktion verfolgt wird, können verschiedene Arten von Modellen unterschieden werden. Grundsätzlich lassen sich die Modellarten dabei in *normative Modelle* und *deskriptive Modelle* unterteilen (Winter, 2007). Normative Modelle geben vor, wie in einer konkreten Situation in der Realität zu handeln ist, und prägen somit die Realität

(Büchter & Henn, 2015, S. 34). Als Beispiel für ein normatives Modell wird häufig der Einkommenssteuersatz genannt (Greefrath & Weigand, 2012). Durch eine mathematische Berechnungsvorschrift legt er fest, welchen Anteil des Bruttoeinkommens eine natürliche Person an den Fiskus abführen muss. Im Gegensatz dazu versuchen deskriptive Modelle, Teilaspekte der Realität nachzuahmen (Greefrath, 2018). Die deskriptiven Modelle lassen sich wie folgt weiter ausdifferenzieren (Büchter & Henn, 2015, S. 34):

- Beschreibende Modelle (z. B. „Wie hat sich die Weltbevölkerung in den letzten zehn Jahren entwickelt?“)
- Vorhersagende Modelle (z. B. „Wie wird sich die Weltbevölkerung in den nächsten zehn Jahren entwickeln?“)
- Erklärende Modelle (z. B. „Welche Faktoren beeinflussen die Entwicklung der Weltbevölkerung und wie wirken sie zusammen?“).

Wie bereits oben angedeutet, werden bei der Bearbeitung realitätsbezogener Probleme häufig mehrere Modelle konstruiert. Modelle sind damit integraler Bestandteil des mathematischen Modellierens (Niss et al., 2007), das im nachfolgenden Abschnitt beschrieben wird.

2.1.2 Modellieren

Beim *mathematischen Modellieren* handelt es sich um einen Bearbeitungsprozess, bei dem Modelle und Mathematik verwendet werden, um ein realitätsbezogenes Problem zu lösen (Beckschulte, 2019; Henn & Maaß, 2003; Jessen et al., 2015; Niss et al., 2007). Das mathematische Modellieren ist ein Teilgebiet der angewandten Mathematik, bei dem es jedoch weniger um bestimmte mathematische Inhalte und ihre Anwendung geht, sondern um den Prozess selbst (Greefrath, Kaiser, et al., 2013). Damit unterscheidet sich der Begriff des mathematischen Modellierens von dem der Anwendungen. Während Anwendungen ihren Ausgangspunkt innerhalb der Mathematik haben, ist es beim mathematischen Modellieren stets ein außermathematischer Sachverhalt, der den Startpunkt markiert. Anwendungen betonen also die Richtung „von der Mathematik zur Realität" und beschäftigen sich mit der Frage: „Kann die gelernte Mathematik in der Realität angewendet werden?“. Mathematisches Modellieren hingegen fokussiert die andere Richtung, also „von der Realität zur Mathematik“, und geht der Frage nach: „Kann Mathematik bei einem vorliegenden Problem aus der Realität hilfreich sein?“ (Durandt & Lautenbach, 2020; Niss et al., 2007). Tatsächlich