Alfio Quarteroni

Modellieren der Realität mit Mathematik

SACHBUCH

Springer

Modellieren der Realität mit Mathematik

Alfio Quarteroni

Modellieren der Realität mit Mathematik

Springer

Alfio Quarteroni
École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Lausanne, Schweiz

Politecnico di Milano
Milan, Italien

Übersetzt von
Simon G. Chiossi
Departamento de Matemática Aplicada
Universidade Federal Fluminense
Niterói, Rio de Janeiro, Brasilien

ISBN 978-3-031-58402-2 ISBN 978-3-031-58403-9 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-031-58403-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über https://portal.dnb.de abrufbar.

Dieses Buch ist eine Übersetzung des Originals in Englisch „Modeling Reality with Mathematics" von Alfio Quarteroni, publiziert durch Springer Nature Switzerland AG im Jahr 2022. Die Übersetzung erfolgte mit Hilfe von künstlicher Intelligenz (maschinelle Übersetzung). Eine anschließende Überarbeitung im Satzbetrieb erfolgte vor allem in inhaltlicher Hinsicht, so dass sich das Buch stilistisch anders lesen wird als eine herkömmliche Übersetzung. Springer Nature arbeitet kontinuierlich an der Weiterentwicklung von Werkzeugen für die Produktion von Büchern und an den damit verbundenen Technologien zur Unterstützung der Autoren.

Planung/Lektorat: Francesca Bonadei
Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Nature Switzerland AG und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland

an Lara, Luca und Bianca Sofia,
meine kleinen Modelle

Vorwort

Noch nie stand die Mathematik so sehr im Mittelpunkt der Aufmerksamkeit aller wie nach der dramatischen Ausbreitung der COVID-19-Pandemie zu Beginn des Jahres 2020.

Ausdrücke wie *exponentiell, logistische Funktion, Extrema* und *Wendepunkt,* von denen wir bis zu diesem Zeitpunkt dachten, sie seien auf Klassenzimmer und Universitätshallen beschränkt, sind plötzlich in die politische Debatte eingetreten. Dies galt umso mehr in den Anfangsphasen der Epidemie, die durch eine große Unsicherheit hinsichtlich der Entwicklung der Ansteckung gekennzeichnet waren.

Doch selbst ein flüchtiger Beobachter[1] muss bemerkt haben, dass Mathematik in zunehmend durchdringender

[1] Anmerkung zur Übersetzung: Bei der Übersetzung von im Englischen nicht nach Geschlecht differenzierten Personenbezeichnungen wie „observer“ u. Ä. wurde im Deutschen meistens die männliche Form (hier „Beobachter“) verwendet, um den Text kürzer und besser lesbar zu machen. Selbstverständlich sind damit Personen jeden Geschlechts gemeint.

Weise in unserem täglichen Leben präsent ist. In den Medien wird über ungreifbare Algorithmen gesprochen, um einen Seelenverwandten zu finden, die perfekte Diät zusammenzustellen oder irgendeine Entscheidung zu treffen. Die Nachrichten berichten von Milliarden von Euro, die auf Börsen auf der ganzen Welt durch einen außer Kontrolle geratenen Algorithmus in Flammen aufgehen. Sie prahlen damit, wie *Big Data* (über das alle reden, obwohl nur sehr wenige wirklich etwas davon verstehen) für wirtschaftlichen und technologischen Fortschritt unerlässlich ist.

In diesem Buch, wie Sie vielleicht aus dem Titel entnommen haben, beabsichtige ich, eine Version der Mathematik zu präsentieren, die weniger feindselig und obskur ist. Oder besser gesagt, ich werde einen Bereich vorstellen, der als mathematische Modellierung bekannt ist und in den letzten Jahrzehnten die erste Reihe eingenommen hat. Ob wir uns dessen bewusst sind oder nicht (was häufiger der Fall ist), wir alle profitieren regelmäßig von mathematischen Modellen und Algorithmen, und ohne sie wäre unser Leben sehr anders. Hier sind einige Beispiele. Ohne mathematische Modelle wüssten wir nicht, wie das Wetter morgen aussehen wird. Wir könnten weder Fotos und Videos auf unseren Handys teilen noch so schnell im Internet surfen, wie wir es tun. Wir könnten uns nicht blind auf Navis verlassen, um unseren Weg durch Städte zu finden, in denen wir noch nie zuvor waren. Unsere Autos wären nicht so leise, komfortabel und effizient. Wir könnten weder CT-Scans verwenden, um einen Blick in unseren Körper zu werfen, noch hätte unsere Lieblingsfußballmannschaft eine Legion von *Spielanalysten,* die Strategien zur Steigerung der Wettbewerbsfähigkeit mit Hilfe der allgegenwärtigen *Big Data* studieren. Die Liste ähnlicher beeindruckender Errungenschaften könnte immer weiter gehen.

Mathematik ist – auch wenn Sie es nicht wissen, Sie können es leicht erraten – eine abstrakte Wissenschaft. Und das ist genau eine ihrer geheimen Waffen. Abstraktion ermöglicht es uns, Probleme in ihrer vollen Allgemeinheit zu studieren und hilft uns, ihre Schlüssel- und innersten Merkmale zu verstehen. Abstraktion kitzelt unsere Vorstellungskraft und Vorstellungskraft nährt Kreativität, die uns wiederum ermöglicht, den besten Weg zur Lösung unserer Probleme zu entdecken. Wir verlassen uns auf Abstraktion, um weitreichende Vermutungen zu formulieren, die manchmal so kompliziert sind, dass sie unseren Versuchen, sie zu lösen (oder zu widerlegen) für Jahrhunderte standhalten. Fermats letzter Satz beispielsweise wurde 1637 aufgestellt und erst 1994 vom britischen Mathematiker Andrew Wiles bewiesen. Die Riemann'sche Vermutung wurde erstmals 1859 veröffentlicht und ist immer noch ungelöst.

Mathematische Modelle zeichnen sich dadurch aus, dass sie konkret sind, denn sie müssen sowohl nützlich als auch von breitem Interesse sein. So seltsam es auch klingen mag, sie entstehen und gedeihen gerade wegen der Abstraktion. Um diese entscheidende Tatsache besser zu verstehen und sie in ihrer ganzen Kraft zu offenbaren, werden wir auf den nächsten Seiten versuchen zu klären, was ein mathematisches Modell wirklich ist, und einige Beispiele vorstellen.

Zuvor sollten wir uns jedoch an die zentrale Rolle von zwei Hauptakteuren in der Mathematik erinnern, die wir alle in der Schule kennengelernt haben, nämlich Zahlen und Gleichungen. *Zahlen* ermöglichen es uns, Entfernungen, Gewichte, Zeitintervalle und so weiter zu quantifizieren. *Gleichungen* beschreiben allgemein die Beziehungen, die natürliche Prozesse regeln (die Bewegung eines Gletschers, die Überschwemmungen, die durch einen Flussanstieg verursacht werden, die Ausbreitung von seismischen Wellen, aber auch die Kernfusion in der Sonne und sogar das Wachstum eines Waldes). Gleichungen ermöglichen es uns, die Bahnen von Satelliten und die Bahn von Formel-1-Rennwagen zu berechnen; sie steuern industrielle Prozesse und regulieren die Verhandlung komplexer Finanzinstrumente. Aufgrund von Gleichungen können wir wunderbare animierte Filme produzieren (deren Charaktere und Ereignisse, obwohl erstaunlich realistisch, Lösungen für mathematische Gleichungen sind), wir können die beste Taktik für ein Volleyballteam studieren und wir können sogar simulieren, wie lebenswichtige Organe wie das Herz oder das Gehirn funktionieren. All dies ist möglich, weil Gleichungen physikalische Gesetze, biologische Prozesse und soziales Verhalten in Symbole und mathematische Beziehungen übersetzen. Auf diese Weise ermöglichen sie es uns, eine virtuelle Welt (das Modell) aus der realen Welt zu konstruieren. Durch das Lösen von Gleichungen können wir Vorhersagen treffen (denken Sie an Wettervorhersagen), den Verlauf einer Krankheit simulieren oder berechnen, wie ein Vulkanausbruch die Asche in der Atmosphäre verteilen wird. Zusammenfassend sind die Gleichungen eines mathematischen Modells Teleskope, die in die Zukunft gerichtet sind.

Mathematik ist die älteste unter den Wissenschaften (die frühesten schriftlichen Dokumente wurden ungefähr 2000 v. Chr. in Ägypten und Mesopotamien gefunden), und wir können darauf wetten, dass sie diejenige sein wird, die alle anderen überlebt. Mathematik ist das einzige Feld, das sich autonom entwickeln kann, da alle anderen exakten Wissenschaften die Sprache und die Werkzeuge der Mathematik benötigen, um sich auszudrücken. Wir sollten also besser ihre Rolle anerkennen. Wenn Sie bereit sind, mich auf dieser Reise zu begleiten, beabsichtige ich, Ihnen zu helfen, die Mathematik durch eine andere Linse zu betrachten. Hoffentlich werde ich (noch einmal?) das Interesse derjenigen von Ihnen wecken, die sagen: „In der Schule habe ich Mathe verstanden, aber es gab einen Lehrer, der mich dazu gebracht hat, es zu hassen.“ (In jedem Leben gibt es immer einen Lehrer, der uns ein Fach lieben oder hassen lässt.)

Also lasst das Abenteuer beginnen: viel Spaß!

Mailand, Italien, 2022 Alfio Quarteroni

Danksagungen

Ich möchte meinen Kollegen danken:

- Luca Bonaventura für das Kapitel WETTERVORHERSAGEMODELLE
- Luca Dede' und Christian Vergara für das Kapitel EIN MATHEMATISCHES HERZ
- Nicola Parolini für das Kapitel MATHEMATIK IM WIND
- Gilles Fourestey, Nicola Parolini, Christophe Prudhomme und Gianluigi Rozza für das Kapitel FLIEGEN MIT SONNENENERGIE
- Luca Paglieri für das Kapitel DER GESCHMACK FÜR MATHEMATIK

Ein besonderer Dank geht an Francesca Bonadei von Springer Mailand: Ihre Hilfe und Unterstützung schätze ich sehr.

Inhaltsverzeichnis

1 Das Modell, auch bekannt als die Zauberbox 1
1.1 Anfangsdaten 5
1.2 Nähere es an, um es zu lösen 6
1.3 Wie viele Modelle für ein Problem? Wie viele Probleme für ein einziges Modell? 9
1.4 Die Phasen eines Modells 10

2 Wettervorhersagemodelle 13
2.1 Ein Modell basierend auf … dünner Luft 15
2.2 Die für die Meteorologie relevanten physikalischen Größen 16
2.3 Die Physik kommt uns zur Rettung 18
2.4 Die Anfangsdaten und die Randdaten 21
2.5 Numerische Modelle, vom D-Day bis von Neumann 23
2.6 Zunehmend ausgefeiltere Modelle: Lorenz' Schmetterlinge 26
2.7 Wettervorhersage heute 29
Literatur 31

3 Epidemien: Die Mathematik der Ansteckung 33
3.1 Räuber-Beute-Beziehung 34
3.2 Die epidemiologischen Modelle 37
3.3 Die kritische Populationsgröße: Der Fall Masern 38
3.4 Eine Welt anfälliger Individuen 39
3.5 Die Gleichungen der Ansteckung 43
3.6 Der Gipfel, das Plateau, die steilen Hänge (und die Aufstiege) 48
Literatur 51

4 Ein mathematisches Herz 53
4.1 Wie funktioniert das Herz-Kreislauf-System? Eine ewige Herausforderung für Philosophen, Ärzte und Mathematiker 56
4.2 Die Modelle heute 58
4.3 Mathematik im Operationssaal 62
4.4 Die Gleichungen des Blutes 64
4.5 Im Herzen des Problems 67
Literatur 73

5 Mathematik im Wind 75
5.1 Eine Sporttrophäe mit einer glorreichen Geschichte 77
5.2 Der Schweizer Außenseiter und die Mathematik der Segel 79
5.3 Die numerischen Simulationen 87
5.4 Wie ist es ausgegangen? 92
Literatur 93

6 Fliegen mit Sonnenenergie 95
6.1 Die Piccards, eine Familie von Entdeckern 97
6.2 Das Ende der Ära der fossilen Brennstoffe 100

6.3	Die Solar-Impulse-Mission: Die Herausforderungen	101
6.4	Mathematik kommt ins Spiel	104
6.5	Multidisziplinäre Optimierung	108
6.6	Ein Beispiel für eine Mehrzieloptimierung	111
	Literatur	114
7	**Der Geschmack für Mathematik**	115
7.1	Lebensmittelzubereitung	116
7.2	Mathematik und das Gehirn	118
7.3	Die „Formel des Geschmacks“	119
7.4	Optimierung der industriellen Lebensmittelproduktion	121
7.5	Mathematische Verpackung	124
7.6	Mathematik und Gesundheit	126
	Literatur	127
8	**Die Zukunft, die uns erwartet**	131
	Literatur	137

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1.1	Das Flussbett aufgeteilt in eine Ansammlung von winzigen Würfeln gleicher Größe	8
Abb. 2.1	Lorenz' schmetterlingsförmiges Diagramm (Foto: zentilia/Shutterstock)	28
Abb. 3.1	Das Verhalten der Populationen von Beute- und Raubtieren im Laufe der Zeit, nach dem Lotka-Volterra-Modell	36
Abb. 3.2	Die Ausbreitung der Ansteckung bei einer Epidemie mit $R_0 = 2$	42
Abb. 3.3	Ein symptomatischer und ansteckender Verlauf eines Patienten im Laufe der Zeit	46
Abb. 3.4	Das SUIHTER-epidemiologische Modell: S = Infizierbare, U = Unentdeckte, I = Isoliert zu Hause, R = Genesene, H = Hospitalisierte, T = Lebensbedrohung, E = Verstorbene	47