

Cathleen Heil & Dagmar Bönig (Hrsg.)

9

# **MATHEMATISCHE BEGEGNUNGEN MIT KINDERN SCHÄTZEN LERNEN**

Festschrift für Silke Ruwisch



WTM  
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien  
Münster

Cathleen Heil & Dagmar Bönig (Hrsg.)

**Mathematische Begegnungen  
mit Kindern  
schätzen lernen**

Festschrift für Silke Ruwisch

WTM  
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien  
Münster

## **Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über <http://dnb.de> abrufbar.

Umschlagfoto: Cathleen Heil mit Genehmigung von Familie Ottich & Kremlitschka

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster 2024 – E-Book  
Ferdinand-Freiligrath-Str. 26, 48147 Münster  
ISBN 978-3-95987-238-6  
<https://doi.org/10.37626/GA9783959872386.0>

## **Inhaltsverzeichnis**

*Cathleen Heil & Dagmar Bönig*

„3+1=4 Wir feiern mit dir!“ – Geleitwort zu dieser Festschrift ..... 1

Verzeichnis der beteiligten Autor:innen ..... 5

*Daniela Aßmus & Torsten Fritzlar*

Rechenoperationen experimentell erkunden..... 7

*Dagmar Bönig, Bernadette Thöne und Kerstin Gerlach*

Bilderbücher zur Unterstützung mathematischen Lernens einsetzen – vom Elternhaus bis in die Lehramtsausbildung ..... 17

*Michael Gaidoschik*

Umwandeln im metrischen System: Argumente und Ideen für eine systematisch(er)e Behandlung schon in der Grundschule ..... 29

*Maike Hagen & Hedwig Gasteiger*

„Obst aus aller Welt“ – Mathematisches Lernen im Sachunterricht ..... 43

*Friederike Heinz & Katja Lengnink*

Gut geschätzt ist halb gewonnen – Schätzen und Zählen beim Spielen mit dem „Mondsteinspender“ ..... 59

*Jessica Hoth & Aiso Heinze*

Welche Strategien verwenden Grundschulkinder beim Schätzen von Längen? Eine Machbarkeitsstudie auf Basis von Eyetracking-Analysen ..... 71

*Marianne Nolte & Benjamin Rott*

Ist Begabtenförderung noch zeitgemäß? Eine Diskussion häufig genannter Argumente ..... 83

*Roland Rink & Daniel Walter*

Das Verstehen und Bearbeiten problemhaltiger Sachaufgaben digital unterstützen..... 95

*Elisabeth Rathgeb-Schnierer & Charlotte Rechtsteiner*

Ein Sachkontext zur Förderung vielfältiger Teilkompetenzen ..... 107

*Sabrina Roos & Marcus Nührenbörger*

Mathematische Gespräche und kooperatives Arbeiten im inklusiven  
Mathematikunterricht..... 117

*Hans-Georg Weigand*

Symmetrie – Zur Entwicklung eines fundamentalen Begriffs am Übergang von  
der Grundschule zur Sekundarstufe I..... 133

*Dana Farina Weiher & Cathleen Heil*

Authentisch und vielfältig - Zum Schätzen von Längen in verschiedenen  
„großen“ Schätzsituationen..... 145

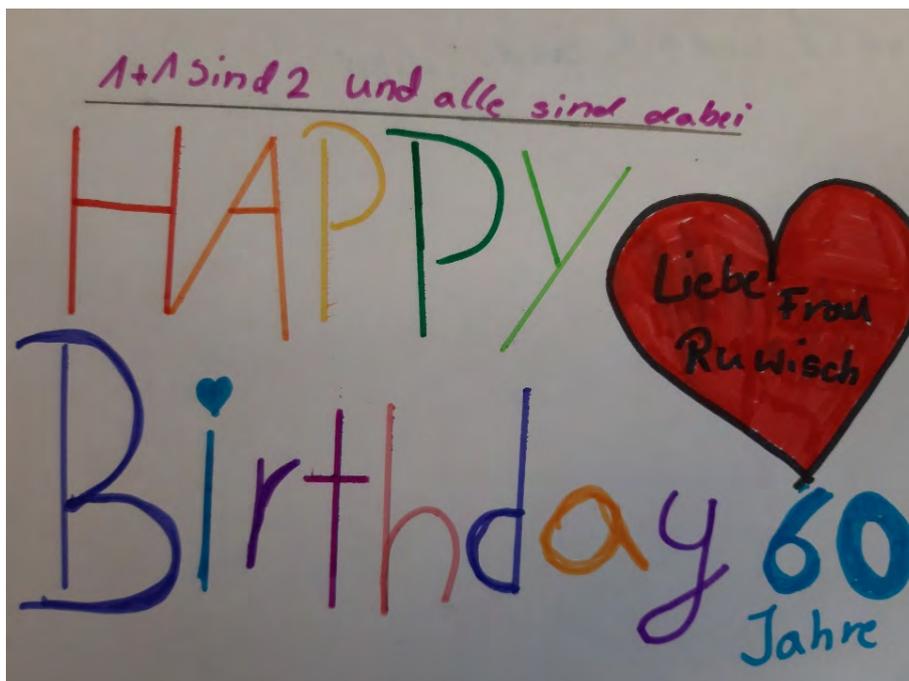
*Swantje Weinhold*

Was ist der Unterschied zwischen Mathe und Deutsch? – Vorstellungen und  
Vorlieben von Grundschulkindern..... 157

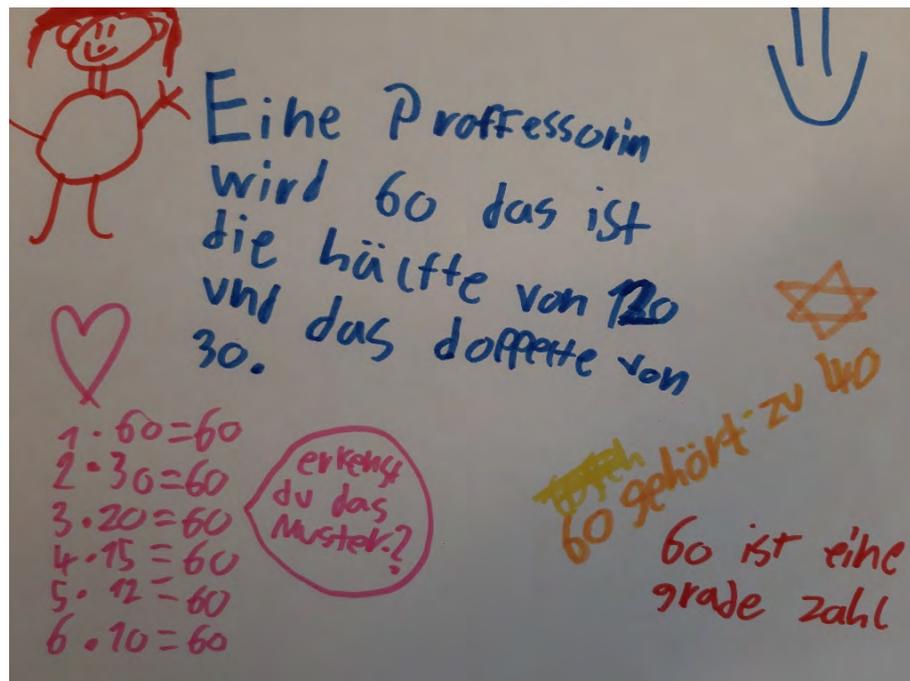
### „3+1=4 Wir feiern mit dir!“ – Geleitwort zu dieser Festschrift

Diese Festschrift ist Prof. Dr. Silke Ruwisch anlässlich ihres 60. Geburtstags im Februar 2024 gewidmet.

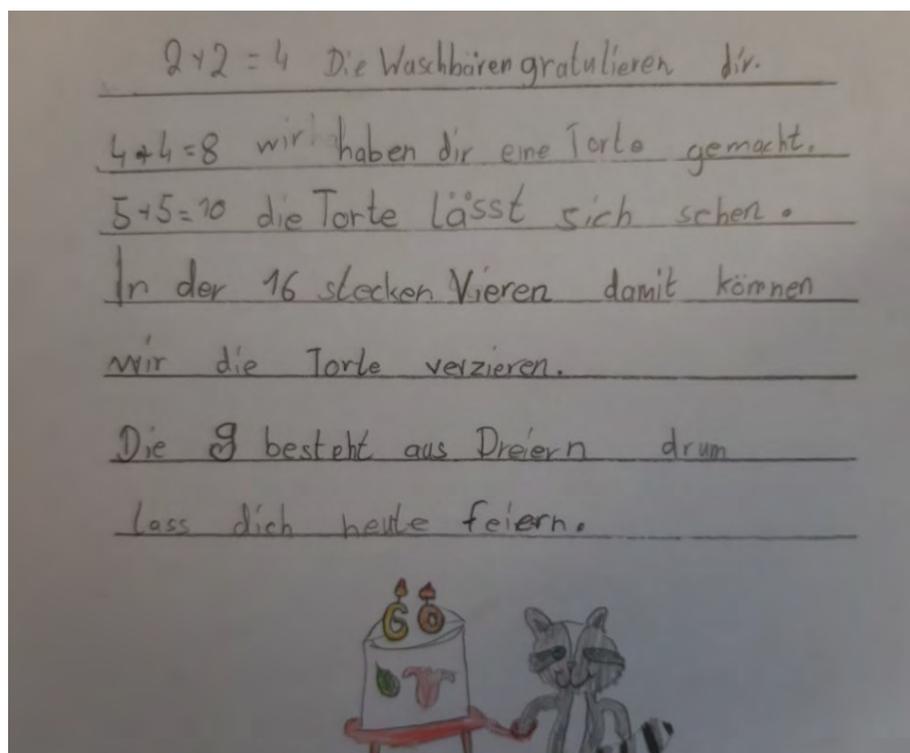
Wir fallen gleich mit der Tür ins (Puppen-)Haus: Nein, diese Festschrift möchte, soll und kann keine allumfassende Würdigung des wissenschaftlichen Lebenswerkes von Silke Ruwisch sein. Natürlich kommt eine solche Festschrift aber auch nicht ohne ein kleines bisschen Lobhudelei, Beifall und vor allem Glückwünsche aus. Eben jene möchten wir von einer ganz besonderen Gruppe voranstellen: den Kindern der „Waschbären“-Klasse der Grundschule in Seelscheid. Den Kindern war es ein Herzensanliegen, ganz besondere Glückwünsche an „ihre“ Mathematik-Professorin zu übersenden, bevor sie an die weiterführende Schule wechselten – schon lange vor der Fertigstellung dieses Buches.



Die vorliegenden Beispiele mathematischer Glückwünsche zeugen nicht nur von einem hohen künstlerischen wie kreativen Engagement der „Waschbären“, sondern auch von dem Wunsch, „ihrer“ Professorin zu zeigen, was sie in vier Jahren Zusammenarbeit gelernt haben: So finden wir schöne Päckchen, verliebte Zahlen, Wechsel in Darstellungsebenen, sprachlich-reimendes Spiel mit Zahlwörtern und kleine Rätsel wie Forscher:innenaufträge.



Auch ihre den Glückwünschen beigelegten Ideen zum Mathematiklernen zeigen, dass die „Waschbären“ ihren Mathematikunterricht als kognitiv wie kommunikativ fordernd, umweltbezogen, anwendungsorientiert, begründungsbasiert und für das Leben bereichernd schätzen gelernt haben – Silke Ruwischs Einfluss auf diese fachliche Sicht der Klasse spiegelt sich hier deutlich wider. Die „Waschbären“ sind damit Symbolbild der jahrelangen Forschungs-Praxis-Kooperation zwischen Silke Ruwisch und Sabrina Roos, die gegenseitig Früchte trägt.



Denn – so viel können wir an dieser Stelle sicherlich ausplaudern: die überschwänglichen und humorvollen Erfahrungsberichte von Silke Ruwischs Besuchen in Nordrhein-Westfalen, in denen sie wiederum gleichsam erstaunt, interessiert und analytisch auf die eigenen Beobachtungen in der Klasse schaut, sind ein Highlight im Arbeitsalltag am Institut. Hier spürt man, dass die pure Begeisterung an vielfältigen mathematischen Lernprozessen aus der Person spricht.

Silke Ruwischs wertschätzende und offene Grundhaltung, ihr Interesse an verschiedenen Perspektiven auf mathematisches Lehren und Lernen sowie die Sorgfalt und Verbindlichkeit, mit der sie an sie herangetragene Themen bearbeitet, sind sicherlich auch Prägungen ihres besonderen beruflichen Werdegangs. So studierte sie zunächst Heil- und Sonderpädagogik für das Lehramt an Sonderschulen an der Universität Gießen, absolvierte ergänzend zunächst ein Magisterstudium in Soziologie, Erziehungswissenschaften und Psychologie und später ein Aufbaustudium zu den Grundlagen der Praktischen Informatik und Angewandten Mathematik. In Gießen promovierte sie dann 1998 bei Marianne Franke zum Lösungsverhalten von Grundschulkindern beim Bearbeiten multiplikativer Sachsituationen. Die Zusammenarbeit mit ihrer Doktormutter hat Silke Ruwischs beruflichen Werdegang nachhaltig geprägt. So hat Silke Ruwisch 2010 die Aktualisierung des von Marianne Franke veröffentlichten Standardwerks zur *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* übernommen, da diese leider schon 2007 verstarb.

Nach ihrer Promotion verschlug es Silke Ruwisch zunächst fünf Jahre nach Köln, wo sie als wissenschaftliche Assistentin am Seminar für Mathematik und ihre Didaktik bei Siegbert Schmidt arbeitete und damit die bisherige Stelle der zweiten Herausgeberin fortführte. Der Wechsel ihrer bisherigen Wirkungsstätte sorgte für neue inhaltliche Impulse, die Zusammenarbeit mit Siegbert Schmidt war von großer gegenseitiger Wertschätzung geprägt. In dieser Zeit übernahm Silke Ruwisch auch zwei Vertretungsprofessuren in Gießen und in Dortmund.

Seit 2005 gestaltet sie die Professur für Mathematik und ihre Didaktik in der Fakultät Bildung an der Leuphana Universität Lüneburg aus. In nunmehr fast 20 Jahren Amtszeit entstanden hier eine Reihe an Dissertationen zum räumlichen Vorstellungsvermögen von Kindern, zum Schätzen von Größen, zum Verhältnissbegriff sowie zum Begründen.

Silke Ruwischs Begeisterung für vielfältige mathematische Lernprozesse und theoretisch fundierte Impulse für die Praxis fließen am Institut einerseits kontinuierlich in die Lehre ein, prägen andererseits aber auch ihre konzeptionelle Arbeit mit Praxispartner:innen und ihre herausgebende Tätigkeit in Verlagen. So entstanden in Zusammenarbeit mit Susanne Schaffrath die Fermi-Kartei für die Grundschule und die Kartei „Zootiere in Zahlen“ sowie in Kooperation mit Gudrun Häring die „Wahrscheinlichkeits-Box Grundschule“. Schier unzählbar und

in ihrer thematischen Vielfalt beeindruckend sind auch ihre Beiträge für die Zeitschrift *Grundschule Mathematik*, die sie als Herausgeberin zusammen mit Arne Pöhls, Charlotte Rechtsteiner und Simone Reinhold ebenso engagiert unterstützt.

In dieser Festschrift möchten wir aber auch würdigen, was Silke Ruwisch persönlich als geschätzte Kollegin der mathematikdidaktischen Gemeinschaft auszeichnet. So begegnen wir in Gesprächen mit Silke Ruwisch einer scharf nachdenkenden, kritisch nachfragenden, aber auch offenen, humorvollen und konstruktiven Diskussionspartnerin, die sich gern inspirieren lässt und bestehende Ideen vor dem Hintergrund ihres breiten Erfahrungsschatzes reichhaltig weiterspinnt oder in neue Kontexte setzt. Mit dieser Haltung bereichert sie seit vielen Jahren die Tagungen des Arbeitskreises Grundschule und Psychologie und unterstützt als Mit-Herausgeberin von *mathematica didactica* Publikationsvorhaben von der Einreichung bis zur finalen Fassung.

Seit über einem Jahrzehnt engagiert Silke Ruwisch sich auch in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), deren Aktivitäten sie über fünf Jahre als 2. Vorsitzende und nun ebenso lang als Beiratsmitglied unterstützt. Hier setzt sie sich unter anderem für die Nachwuchsförderung ein und unterstützt mit Lesegeuduld und Sorgfalt die Vergabe des GDM-Förderpreises. Sie holte die 55. GDM-Jahrestagung unter dem Motto „Perspektiven wechseln“ an den Standort Lüneburg. Obgleich das jährliche Treffen pandemiebedingt nicht wie gewohnt stattfinden konnte, bot der erste online GDM-Monat 2021 als partizipativer Ansatz Raum für Austausch rund um klassische und neu konzipierte Tagungsformate.

In den zahlreichen Beiträgen des vorliegenden Buches greifen Wegbegleiter:innen, Kolleg:innen, Freund:innen und Doktorand:innen auf verschiedenen Ebenen Silke Ruwischs Vorarbeiten, Vordenkereien und Publikationen auf und liefern Ansatzpunkte für eine gemeinsame Diskussion. So verstehen sich die Beiträge vor allem als Inspirationsquelle für die kommenden Arbeitsjahre, Diskussionsgrundlage für kommende Tagungen und Publikationsprojekte sowie individuelle Würdigung und Übersendung eigener mathematikdidaktischer Grußworte zum runden Geburtstag.

Wir, die Herausgeberinnen dieses Bandes, bedanken uns bei allen Autor:innen für ihre zuverlässige Zuarbeit und Geduld sowie bei Martin Stein für die Unterstützung von Seiten des Verlages.

In diesem Sinne wünschen wir allen, aber insbesondere natürlich dir, liebe Silke, eine anregende Lektüre, viel Freude beim gemeinsamen Diskutieren und Weiterdenken der hier vorgestellten Theorien, Studien und Praxisbeispiele – vielleicht bei einem Glas Kinderbowle und stets bester Gesundheit.

Lüneburg und Bremen im Herbst 2023,

*Cathleen Heil & Dagmar Bönig*

## **Verzeichnis der beteiligten Autor:innen**

*Daniela Aßmus*, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

*Dagmar Bönig*, Universität Bremen

*Torsten Fritzlär*, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

*Michael Gaidoschik*, Freie Universität Bozen

*Hedwig Gasteiger*, Universität Osnabrück

*Kerstin Gerlach*, Universität Bielefeld

*Maike Hagen*, Universität Hamburg

*Friederike Heinz*, Universität Siegen

*Aiso Heinze*, IPN Kiel

*Cathleen Heil*, Leuphana Universität Lüneburg

*Jessica Hoth*, Goethe-Universität Frankfurt

*Elisabeth Rathgeb-Schnierer*, Universität Kassel

*Katja Lengnink*, Justus-Liebig-Universität Gießen

*Marianne Nolte*, Universität Hamburg

*Marcus Nührenbörger*, Universität Münster

*Bernadette Thöne*, Universität Bremen

*Charlotte Rechtsteiner*, PH Ludwigsburg

*Roland Rink*, Universität Bremen

*Sabrina Roos*, Grundschule Seelscheid

*Benjamin Rott*, Universität zu Köln

*Daniel Walter*, TU Dortmund

*Hans-Georg Weigand*, Julius-Maximilians-Universität Würzburg

*Dana Farina Weiher*, Leuphana Universität Lüneburg

*Swantje Weinhold*, Universität Bremen



## Rechenoperationen experimentell erkunden

### 1. Karl und Jan erkunden die Rechenoperation $\textcircled{G}$

In einer Fördergruppe für mathematisch leistungsstarke Drittklässler:innen arbeiten die Kinder in Tandems am Computer. Arbeitsoberfläche ist eine Excel-Datei, in der „neue“ Operationen als Verkettung von Grundoperationen programmiert wurden. Werden zwei Rechenzahlen eingegeben, zeigt der Computer die Ergebniszahl an. Herausgefunden werden soll nun, wie die einzelnen Rechenoperationen funktionieren, was also das Programm jeweils rechnet.

Karl und Jan bearbeiten die Rechenoperation  $\textcircled{G}$ . Sie geben in die ersten drei Zeilen jeweils zwei gleiche Zahlen ein (s. Abb. 1) und äußern dabei verschiedene Vermutungen (nach der ersten Zeile: „immer plus 20“, nach der zweiten Zeile: „vielleicht geht es mit mal“). Beides wird verworfen, da es nicht auf alle Beispiele passt. Sie beschließen, verschiedene Zahlen zu nehmen und füllen Zeile 4 und 5 aus. Karl ist der Meinung, dass er die Lösung gefunden hat: „Man rechnet die zwei Zahlen zusammen, und die größere Zahl nochmal oben drauf.“

Gemeinsam prüfen sie dies für alle bereits berechneten Beispiele und sehen sich bestätigt. Zur Prüfung geben sie 0 und 1 in der nächsten Zeile ein. Danach wird 16 und 7 getestet und Karl vermutet als Ergebniszahl die 39. Das Programm zeigt allerdings 30 an.

Karl: „Häh? Das würde jetzt aber nicht stimmen. Denn sechzehn plus sieben, sechzehn plus sieben sind... na warte ... dreiundzwanzig und dreiundzwanzig plus sechzehn... Nee. Immer... immer nochmal plus die zweite Zahl... Die zweite Zahl war bisher immer die höhere.“ Zur Kontrolle testen sie noch die 2 und 1.

erste Zahl		zweite Zahl	=	Ergebnis
20	$\textcircled{G}$	20	=	60
1	$\textcircled{G}$	1	=	3
2	$\textcircled{G}$	2	=	6
1	$\textcircled{G}$	2	=	5
2	$\textcircled{G}$	3	=	8
0	$\textcircled{G}$	1	=	2
16	$\textcircled{G}$	7	=	30
2	$\textcircled{G}$	1	=	4

Abb. 1: Beispiele von Karl und Jan zur Operation  $\textcircled{G}$

Der Computer ermöglicht es, Karl und Jan die Operation  $\textcircled{G}$  und weitere unbekannte Rechenoperationen zum eigenständigen Erkunden zur Verfügung zu stellen. Dies wird von den beiden Kindern intensiv genutzt. In ihrem Vorgehen lassen sich typische Schritte identifizieren, die wir auch in vielen anderen Erprobungen

beobachten konnten und die eine wichtige Art der Auseinandersetzung mit noch unbekanntem mathematischen Inhalten charakterisieren: das mathematische Experimentieren.

Karl und Jan *generieren Beispiele*. Anscheinend sind sie es gewohnt, nach Mustern und Zusammenhängen zu suchen, denn sehr schnell werden erste *Vermutungen formuliert*, am nächsten Beispiel *geprüft* und *bewertet*. Dass ihre ersten Vermutungen falsch sind, scheint kein Problem für die beiden Kinder zu sein; sie setzen ihre Erkundung fort und variieren die Beispiele, indem sie erstmalig gezielt unterschiedliche Rechenzahlen einsetzen. Karl und Jan gelingt es nun durch *Analisieren von Beispielen*, einen für alle fünf vorhandenen Rechnungen passenden Zusammenhang zu konstruieren. Damit hören sie aber nicht auf, vielmehr prüfen sie diesen an weiteren Beispielen. Dabei beziehen sie auch die Null ein, vielleicht wegen ihrer besonderen Rolle bei den Grundrechenarten, und sie variieren ihre Beispiele noch einmal, indem sie anders als bisher zwei Rechenzahlen mit größerer Differenz einsetzen. Erst die letzte Rechnung ist ein Gegenbeispiel für den von Karl und Jan vermuteten Zusammenhang. Nach relativ vielen, in ihrer Art verschiedenen bekräftigenden Beispielen sind sie erstaunt, sofort analysieren sie die Rechnungen noch einmal und stellen schließlich fest, worin sich die letzte von allen vorherigen unterscheidet. Davon ausgehend gelingt es den beiden Jungen, ihre Vermutung zu variieren und einen für alle vorliegenden Beispiele passenden Zusammenhang zu formulieren. Dieser wird noch einmal überprüft, indem bei einem bereits vorhandenen Beispiel die beiden Rechenzahlen vertauscht werden. Die variierte Vermutung wird dadurch bekräftigt, ihre ursprüngliche Fassung noch einmal widerlegt. Nun ist die subjektive Überzeugung zur Richtigkeit ihrer Vermutung bei Karl und Jan offenbar so groß, dass sie ihr Experiment beenden.

## 2. Mathematisches Experimentieren

Silke Ruwisch hat sich beispielsweise im Rahmen der Entwicklung des didaktischen Materials „Parketto“ (Ruwisch, 2011a) mit spielerischem mathematischem Experimentieren beschäftigt. Die gerade geschilderten Erfahrungen zeigen exemplarisch, dass auch der Computer experimentelles mathematisches Arbeiten für Grundschüler:innen zugänglich macht. Die beteiligten kognitiven Prozesse lassen sich im Sinne Pólyas als induktives oder plausibles Schließen beschreiben,<sup>1</sup> das nicht nur in unser aller Alltag, sondern auch in der Mathematik eine große Rolle spielt:

„In der Tat hat die Mathematik zwei Aspekte; sie ist die strenge Wissenschaft Euklids, aber sie ist auch etwas anderes. Nach Euklid dargestellt, erscheint

---

<sup>1</sup> Auf eine Unterscheidung von Abduktion und Induktion nach Peirce wollen wir an dieser Stelle verzichten.

die Mathematik als eine systematische deduktive Wissenschaft; aber die Mathematik im Entstehen erscheint als experimentelle induktive Wissenschaft.“ (Pólya, 1980, S. 9)

An zahlreichen Beispielen konnte Pólya (1969, 1975) nachweisen, dass das induktive Vorgehen insbesondere für die Genese (subjektiv) neuer mathematischer Erkenntnisse von besonderer Bedeutung ist. Eine diesbezüglich wegweisende mathematikhistorische Fallstudie zu Entwicklungen in der Polyedergeometrie vom 18. bis zum 20. Jahrhundert wurde von Lakatos (1979) vorgelegt. Auch in aktuellen wissenschaftssoziologischen Untersuchungen von Heintz (2000) wird der hohe Stellenwert dieses quasi-empirischen Arbeitens deutlich und mit den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen ist schließlich die *Notwendigkeit* experimentell-induktives Arbeiten in der Mathematik als Ergänzung zum deduktiven Vorgehen bewiesen (Putnam, 1979).

Pólya kommt auch das Verdienst detaillierter Analysen des induktiven mathematischen Arbeitens bzw. des mathematischen Experimentierens zu, für das er zwei Phasen unterscheidet. Im Zentrum einer ersten Erkundungsphase steht die Beschäftigung mit Beispielen, das Beobachten, Ordnen, die Suche nach Mustern und Zusammenhängen. Sie gipfelt in einer Vermutung hinsichtlich einer allgemeingültigen Gesetzmäßigkeit. In einer zweiten Prüfphase wird diese Vermutung an weiteren Beispielen getestet, gegebenenfalls können dabei Sonderfälle oder in irgendeiner Weise extreme Beispiele einbezogen werden. Dabei wird mit jeder positiv ausgehenden Testung das subjektive Vertrauen in die Gültigkeit der Hypothese zunehmen – wobei das Ausmaß der Vertrauenszunahme mit der Art der Testbeispiele variieren kann –, bis diese als (vorläufig) bestätigt angesehen wird. Wichtig ist nach Pólya dabei eine „induktive Einstellung“, also die Bereitschaft, aktuelle Auffassungen möglichst effizient an neue Erfahrungen anzupassen, ständig von Beobachtungen zu Verallgemeinerungen auf- und von diesen wieder zu (kritischen) Beobachtungen abzusteigen (Pólya, 1969).

Ausgehend von den allgemeinen Überlegungen Pólyas, dem oben beschriebenen konkreten Vorgehen von Karl und Jan sowie ähnlichen weiteren Erfahrungen mit Dritt- und Viertklässler:innen erscheinen uns die folgenden Prozessschritte als wesentliche Elemente mathematischen Experimentierens (vgl. auch Fritzlar, 2016):

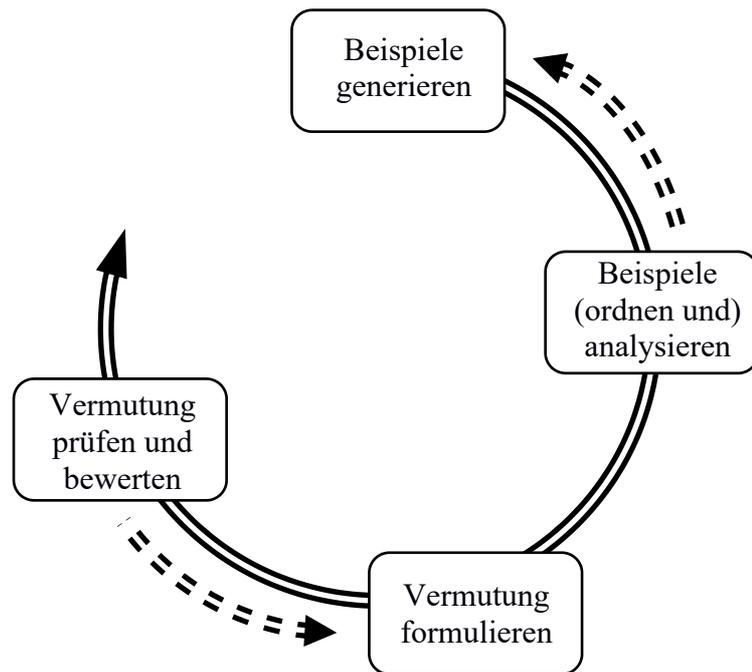


Abb. 2: Prozessschritte beim mathematischen Experimentieren

### 3. Empirische Erkundungen des Umgangs von Schüler:innen mit Beispielen und Vermutungen

Wir setzen die Lernumgebung zum Entschlüsseln „neuer“ Rechenoperationen regelmäßig in universitären Projekten zur Begabtenförderung mit Kindern des dritten und vierten Schuljahres ein. In regulären vierten Schulklassen kam sie ebenfalls erfolgreich zur Anwendung (siehe auch Abmus, 2020, 2023). Die folgenden Detailanalysen basieren allerdings ausschließlich auf Beispielen aus den Begabtengruppen, da nur dort Bildschirmaufzeichnungen realisiert werden konnten.

Üblicherweise arbeiten immer zwei Kinder gemeinsam an einem Computer oder Tablet, um so die Kommunikation der Kinder über die zu erforschenden mathematischen Rechenoperationen anzuregen. Auf unterschiedlichen Excel-Arbeitsblättern stehen fünf, aus unserer Sicht unterschiedlich schwierige Rechenoperationen zum Entschlüsseln zur Verfügung.<sup>2</sup> Im Anschluss können die Kinder auf dem Papier eigene Rechenoperationen erfinden. Nachfolgend soll nun analysiert werden, wie sich die oben beschriebenen Prozessschritte beim mathematischen Experimentieren in den Bearbeitungen der Kinder realisieren. Dazu wurden die Bildschirmaufzeichnungen gesichtet und diesbezüglich aussagekräftige Bearbei-

<sup>2</sup> Als eher leicht zu entschlüsselnde Operationen vermuten wir solche, bei denen das Ergebnis einer Grundoperation durch eine Konstante vergrößert oder verkleinert wird. Schwieriger scheint uns beispielsweise, wenn eine oder sogar beide eingegebenen Zahlen vor Anwendung der Grundoperation verändert werden. Auch die Größe der Veränderung könnte eine Rolle spielen.

tungen vollständig transkribiert. An diesen 14 Transkripten wurden für die einzelnen Prozessschritte sowie deren Zusammenwirken induktiv Kategorien der konkreten Umsetzung durch die Kinder gebildet. Diese Kategorien basieren ausschließlich auf verbalen Äußerungen der Kinder in Kombination mit den zugehörigen Eingaben am Computer; nicht sprachlich begleitete Eingaben wurden nicht kategorisiert. Das so entstandene Kategoriensystem bietet einen ersten empirisch gestützten Zugang zum Thema.

### 3.1 Beispiele generieren und analysieren

Vorweg sei angemerkt, dass manche Kinder nur sehr wenige Beispiele (zwei bis drei) zur Lösungsfindung benötigten und die genutzten Zahlen dabei willkürlich gewählt schienen. In diesen Fällen ließ sich häufig nicht rekonstruieren, welche Überlegungen zum Erfolg geführt haben. Es ist anzunehmen, dass gute Fähigkeiten im Erkennen und Nutzen von Zahl- und Operationsbeziehungen sowie möglicherweise auch eine besondere Intuition im Umgang mit mathematischen Inhalten (Käpnick, 2010) eine schnelle Lösungsfindung begünstigt haben.

Für das Generieren von Beispielen wurden die folgenden Kategorien gebildet:

1a	Willkürliche Wahl der Zahlen („schreib einfach was rein“, „okay, wir probieren einfach“)
1b	Kriteriums-basierte Wahl der Zahlen:
1b1	Erfahrungsbasiert als hilfreich/nicht hilfreich eingeschätzt („Nimm 2 und 4. Das waren gute Zahlen.“, „Lass klein beginnen. Die großen Zahlen haben eh nicht so viel geholfen.“, „Wir machen wieder eins und zwei. Eins und zwei sind immer gut.“)
1b2	Ähnlichkeit zu / Verschiedenartigkeit gegenüber bislang geprüften Beispielen:
1b2a	Gegenüber vorigen Zahlen gleiche/andere Zahlen („Ach nicht schon wieder elf.“)
1b2b	Beide Zahlen gleich/ungleich („Wir nehmen jetzt mal zwei gleiche Zahlen“, „Jetzt müssen wir aber bei ungleichen, ich mach mal 5 und du irgendeine andere Zahl außer 5.“)
1b2c	Abstand der Zahlen („Ne nicht beieinander liegende Zahlen.“, „Wir müssen ja nicht immer zwei Abstand nehmen.“)
1b2d	Größe der Zahlen („Nimm mal kleine Zahlen“, „Mach mal größere Zahlen, dass wir den Unterschied sehen. Sechs acht acht und sieben acht acht.“)
1b2e	Gerade/ ungerade („Wir haben es noch gar nicht bei einer geraden Zahl probiert. Wollen wir mal eine gerade Zahl nehmen?“, „Versuch mal eins, Irgendeins, das eine gerade Zahl ergibt.“ (gemeint ist die Summe beider Zahlen))
1b2f	Position der Zahl (z.B. an zweiter Stelle immer die größere Zahl bzw. gezielt nicht die größere Zahl), Vertauschen der Zahlen („Wir haben fünf und drei und das ist 12. Drei und fünf ist sechzehn. Komisch, aber naja.“)
1b3	Wahl bestimmter Zahlen wie Null oder 1. („Lass mich mal wieder etwas mit der 0 machen.“)

1c	Systematische Veränderung von Zahlen:
1c1	Systematisches Erhöhen einer Zahl um 1 (getestet wurde (1, 2), (1, 3), (1,4), (1,5) auf Nachfrage zu Gründen für die Wahl der Zahlen: „Ich dachte, das kann man dann vergleichen“)
1c2	Systematisches Erhöhen beider Zahlen um 1

Hervorzuheben ist insbesondere, dass mit zunehmender Erfahrung bevorzugt kleine Zahlen genutzt werden. Auch ansonsten leiten die bisherigen Erfahrungen das weitere Erkundungsverhalten der Kinder. So werden Zahlen oder Zahlenkombinationen eingesetzt, die zuvor als „gute“ Zahlen identifiziert wurden. Auffallend häufig wird dabei auf die 1 und die 0 zurückgegriffen. Insbesondere die 0 wird teilweise sehr systematisch geprüft (1. Zahl, 2. Zahl, beide Zahlen). Auch das Vertauschen von Zahlen spielt immer wieder eine Rolle. Bei vielen Tandems ist somit (zeitweise) eine gezielte Wahl von Zahlen erkennbar.

Üblicherweise erfolgt die Analyse nach jeder neu gefüllten Zeile, in seltenen Fällen entscheiden die Kinder sich jedoch bewusst dafür, erst einmal mehrere Beispiele einzugeben, bevor sie versuchen, neue Vermutungen zu entwickeln („Wollen wir mal ganz viel ausprobieren und dann gucken ob überhaupt, äh welche Zahlen es gibt?“ „Komm, wir machen jetzt noch drei Beispiele. Als erste Zahl nehmen wir jetzt immer eine eins. Und als zweite Zahl nehmen wir jetzt einfach noch die drei, vier und fünf.“).

Für die Analyse selbst lassen sich horizontale und vertikale Betrachtungen unterscheiden. Bei horizontaler Sicht werden die eingegebenen Zahlen auf selbstgewählte Weise verknüpft. Das errechnete Ergebnis kann dann mit der angezeigten Zahl in Beziehung gesetzt werden. Gegebenenfalls lassen sich dann Folgerungen über die Veränderung oder Erweiterung der gewählten Operation ziehen. Dieses Vorgehen basiert auf der funktionalen Grundvorstellung des Zuordnungsaspekts (Ruwisch, 2011b). Üblicherweise suchen die Kinder dabei zunächst nach einer Grundoperation, die sie nah ans angezeigte Ergebnis führt („Also, wenn man sechs mal fünf rechnet, ist man schon sehr nah bei der einunddreißig.“). Es ist anzunehmen, dass dabei auch Größenbeziehungen zwischen Rechenzahlen und angezeigtem Ergebnis eine Rolle spielen („Die Zahl ist aber groß. Das sieht nach mal aus.“). Teilweise werden auch erst die Rechenzahlen verändert und danach über eine Grundoperation verknüpft („Hier eine Zahl mehr, hier eine Zahl weniger würde die 49 erklären.“ (1. Zahl: 6, 2. Zahl: 8).

Seltener kommen vertikale Betrachtungen zum Einsatz. Dabei wird die Veränderung der eingegebenen Zahlen und deren Auswirkungen auf die jeweils angezeigte Ergebniszahl betrachtet, was der funktionalen Grundvorstellung des Veränderungsaspekts entspricht (Ruwisch, 2011b). Meist ist dieser Betrachtung eine