Valentin L. Popov
Markus Heß
Emanuel Willert

Handbuch der ebenen Kontaktmechanik

Exakte Lösungen ebener Kontaktprobleme

Springer Vieweg

Handbuch der ebenen Kontaktmechanik

Valentin L. Popov · Markus Heß ·
Emanuel Willert

Handbuch der ebenen Kontaktmechanik

Exakte Lösungen ebener Kontaktprobleme

Springer Vieweg

Valentin L. Popov
Institut für Mechanik, Sekretariat C8-4
Technische Universität Berlin
Berlin, Deutschland

Markus Heß
Institut für Mechanik, Sekretariat C8-4
Technische Universität Berlin
Berlin, Deutschland

Emanuel Willert
Institut für Mechanik, Sekretariat C8-4
Technische Universität Berlin
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-662-69000-0 ISBN 978-3-662-69001-7 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-69001-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über https://portal.dnb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Michael Kottusch
Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Tribologie ist überall. Die Breite der Anwendungsbereiche, in denen Phänomene der Grenzflächenmechanik – Reibung, Adhäsion, Verschleiß u. v. m. – eine wichtige Rolle spielen, ist kaum überschaubar und reicht von klassischen technischen Disziplinen – Lager und Getriebe im Maschinenbau, Bremsen und Rollkontakte im Verkehrswesen, oder Festplatten in der Mikroelektronik – über biotechnologische Systeme – z. B. künstliche Gelenke – bis zur Bio- und Nanotribologie einzelner Zell- oder Molekülcluster. Exakte (also vollständige und analytische) Lösungen sind dabei zum Testen numerischer Modelle und für das schnelle „analytische Verständnis“ komplexer Systeme von großer Bedeutung.

Vor etwa 6 Jahren erschien deswegen das „Handbuch der Kontaktmechanik“, in dem wir es uns zur Aufgabe gemacht hatten, ein vollständiges Nachschlagewerk der existierenden exakten Lösungen *axialsymmetrischer* Kontaktprobleme zu schaffen, um die Vielzahl dieser – mehr oder weniger bekannten – Lösungen für die Anwendung in Forschung, Lehre und Praxis verschiedenster Fachrichtungen verfügbar und einfach verständlich zu machen. Das „Handbuch“ sollte einerseits „alle wichtigen“ bekannten Lösungen axialsymmetrischer Kontaktprobleme, die seit der Etablierung der Kontaktmechanik als rigorose Wissenschaft vor etwa 140 Jahren gefunden wurden, sammeln und strukturiert katalogisieren; andererseits sollte ein einheitlicher Formalismus (mit der Methode der Dimensionsreduktion) demonstriert werden, um diese Lösungen auf möglichst einfache Weise herzuleiten.

Unabhängig davon, ob das Buch diesen selbstgesteckten Zielen gerecht werden konnte, war es als „Handbuch der Kontaktmechanik“ durch die Beschränkung auf axialsymmetrische Probleme in jedem Fall unvollständig; schließlich gibt es eine ganze weitere Symmetrieklasse von Problemen, die eine exakte Lösung zulassen und deswegen in einem „Handbuch der Kontaktmechanik“ (im umfassenden, enzyklopädischen Sinn) dokumentiert werden sollten: *ebene* Kontakte.

Diese offenkundige Unvollständigkeit möchten wir mit dem vorliegenden Buch – einer Enzyklopädie der exakten Lösungen ebener Kontaktprobleme – überwinden. In diesem

Sinn kann man es als zweiten Teil des nunmehr zweibändigen „Handbuchs der Kontaktmechanik“ auffassen. Da die Mechanik axialsymmetrischer (Punkt-) und die ebener (Linien-)Kontakte – sowohl als Forschungsfelder als auch in Bezug auf die entsprechenden bekannten exakten Lösungen – im Umfang ähnlich aber formal-mathematisch durchaus unterschiedlich sind, hat es dabei Sinn, beide Symmetrieklassen in getrennten Bänden zu behandeln.

Die Ansprüche an die Darstellung für dieses Buch decken sich weitgehend mit denen des „ersten Bandes“: Zum einen wollen wir „alle wichtigen“ bekannten exakten Lösungen ebener Kontaktprobleme systematisch dokumentieren; zum anderen soll aber nicht nur die endgültige Lösung aufgeführt, sondern auch der vollständige Lösungsweg auf möglichst nachvollziehbare Weise dargestellt werden.

Wie im axialsymmetrischen Fall erscheint die zweite Forderung zunächst kaum erfüllbar – angesichts der Tatsache, dass die Lösung eines einzigen Kontaktproblems in der Literatur häufig ganze umfangreiche Publikationen füllt. Doch die beiden mächtigen Werkzeuge, dank derer diese Systematisierung der Lösungswege bereits für viele axialsymmetrische Probleme gelingen konnte – nämlich die Superposition inkrementeller Flachstempeleindrücke und die Rückführung zahlreicher Klassen von Kontaktproblemen auf den reibungs- und adhäsionsfreien Normalkontakt – sind auch für ebene Probleme anwendbar. Wir können uns daher in der Systematik der Darstellung eng an die Struktur des „ersten Bandes“ anlehnen.

Diese Monografie ist in einer Phase großer Herausforderungen – sowohl im akademischen Bereich als auch gesamtgesellschaftlich – entstanden. Wir danken der Technischen Universität Berlin und insbesondere den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Fachgebiets Systemdynamik und Reibungsphysik für die mittelbare und unmittelbare Unterstützung beim Verfassen des Buchs.

Berlin
im Januar 2024

Valentin L. Popov
Markus Heß
Emanuel Willert

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Zum Ziel dieses Buches

Dies ist der zweite Teil des „Handbuchs der Kontaktmechanik“. Im ersten Band haben wir versucht, eine – im Rahmen der Möglichkeiten der „linearen“ Buchform – umfassende und strukturierte Enzyklopädie aller im Laufe der inzwischen 140-jährigen Geschichte der Kontaktmechanik – seit ihrer Grundsteinlegung als mathematisierte Wissenschaft durch Hertz (1882) und Boussinesq (1885) – gefundenen exakten Lösungen *axialsymmetrischer* mechanischer Kontaktprobleme zu schaffen. Unabhängig davon, ob, bzw. in welchem Maße, der erste Band dieser selbstgesteckten Aufgabe gerecht geworden ist, besteht die exakte (analytische) Kontaktmechanik nicht nur aus axialsymmetrischen Problemen. Eine zweite, sehr große Klasse von Kontaktaufgaben, die eine exakte mathematische Lösung zulassen, bilden *ebene* Kontaktprobleme. Diesen ist der vorliegende zweite Band des „Handbuchs der Kontaktmechanik“ gewidmet.

Die Ansprüche an dieses „Handbuch“, die wir zu Beginn des ersten Bandes formuliert haben, wollen wir auch für den zweiten Teil beibehalten. Das betrifft sowohl die Gesamtstruktur des Buches, als auch die Detaildarstellung der konkreten behandelten Kontaktprobleme. Die äußere Struktur soll möglichst übersichtlich sein und unnötige Dopplungen, die sich z. B. durch Rückgriffe auf frühere Kapitel ergeben, vermeiden; trotzdem sollen alle Abschnitte für sich – ohne die chronologische Lektüre des Bandes als Ganzes – verständlich sein, um dem Charakter (und der Funktion) eines „Handbuchs“ gerecht zu werden. In der Detaildarstellung umfasst eine behandelte Kontaktaufgabe die Formulierung des Problems, die Angabe der Lösung und deren Erstpublikation, sowie, nach Möglichkeit, die Darstellung des, nach unserer Auffassung, einfachsten Lösungswegs – der nicht unbedingt mit dem Lösungsweg in der Erstpublikation übereinstimmen muss.

V. L. Popov et al., *Handbuch der ebenen Kontaktmechanik*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-69001-7_1

Axialsymmetrische und ebene Kontaktprobleme haben mehrere Gemeinsamkeiten. Beide Klassen von Aufgaben sind zweidimensional und können sogar unter Umständen – wie von Aleksandrov (1961) demonstriert – ineinander „übersetzt" werden. Außerdem ist eine der mächtigsten Methoden zur Lösung von axialsymmetrischen Kontaktproblemen – die Superposition starrer Flachstempelverschiebungen – auch für sehr viele ebene Probleme anwendbar. Eine weitere Gemeinsamkeit ist, dass die entsprechende Symmetrie oft tatsächlich nur näherungsweise besteht und im formal-mathematischen Sinn eigentlich gebrochen ist, z. B. bei „axialsymmetrischen" Kontakten durch eine die Isotropie aufhebende Tangentiallast, oder bei „ebenen" Problemen durch eine endliche Ausdehnung der kontaktierenden Körper entlang der Symmetrieachse. Trotzdem sind bei vielen dieser – nicht im strengen Sinn symmetrischen – Kontakte Spannungen und Verschiebungen lokal in sehr guter Näherung symmetrisch verteilt, weswegen wir diese Probleme in dem entsprechenden „Handbuch" mitberücksichtigen.

Es gibt aber zwischen axialsymmetrischen und ebenen Kontaktaufgaben auch mehrere qualitative Unterschiede. So sind ebene Probleme in mehrfacher Hinsicht gleichzeitig einfacher und – paradoxerweise oft aus dem gleichen Grund – schwieriger als axialsymmetrische. Beispielsweise gibt es für den ebenen Normalkontakt einen direkten integralen Zusammenhang zwischen der Druckverteilung und dem Kontaktprofil (d. h., der Lücke zwischen den kontaktierenden Oberflächen im Moment der ersten Berührung) – während man im axialsymmetrischen Fall nur durch eine Folge von zwei separaten Integraltransformationen einen Zusammenhang zwischen der Druckverteilung und dem Profil herstellen kann. Aber die Integraltransformation zwischen Druck und Profil ist im ebenen Fall, wegen der Struktur der Grundgleichungen der ebenen Elastizitätstheorie, stark singulär; sie kann daher nur im Sinn von Hauptwerten ausgewertet werden, was die exakte Lösung mathematisch wiederum schwieriger macht als die Auswertung der beiden entsprechenden Transformationen des axialsymmetrischen Problems.

Ein wesentlicher physikalischer Unterschied zwischen ebenen und axialsymmetrischen Problemen betrifft die makroskopischen relativen Verschiebungen zwischen den Kontaktkörpern, z. B. die Eindrucktiefe: Für Kontakte zwischen einem starren Eindruckkörper und einem elastischen Halbraum, die im mathematisch strengen Sinn eben – also entlang der Symmetrieachse unendlich ausgedehnt – sind, lassen sich die makroskopischen relativen Verschiebungen gar nicht absolut definieren! Physikalische Verschiebungen ergeben sich erst durch die Berücksichtigung der endlichen Ausdehnung der Körper, bzw. ihrer globalen Form. Das vereinfacht einerseits die Angabe der Lösung des ebenen Problems, da mit der Last und der Breite des Kontaktgebiets nur noch zwei (anstatt drei) makroskopische Kontaktgrößen miteinander in Relation gesetzt zu werden brauchen; andererseits ist die Bestimmung von makroskopischen Verschiebungen (und damit auch von Steifigkeiten und Energien) in „ebenen" (im abgeschwächten Sinn) Kontaktproblemen – die in jeder anderen Hinsicht, z. B. in Bezug auf die Druckverteilung, in sehr guter Näherung als ideal eben (im mathematisch strengen Sinn) behandelt werden können – eine deutlich kompliziertere Aufgabe als im axialsymmetrischen Fall.

Im Rahmen des vorliegenden Buches werden wir an geeigneter Stelle auf diese Spezifika ebener Kontaktprobleme gesondert und gezielt eingehen.

Neben der Behandlung konkreter Kontaktprobleme wurden im ersten Teil des „Handbuchs der Kontaktmechanik“ auch sehr ausführliche Einführungen zur physikalischen Natur verschiedener, kontaktmechanisch relevanter Phänomene – wie Adhäsion, Reibung oder Viskoelastizität – gegeben. Auf diese Einführungen werden wir in dem vorliegenden zweiten Teil weitgehend verzichten, um Dopplungen zu vermeiden. Alle für die Lösung konkreter ebener Kontaktprobleme nötigen allgemeinen Relationen in Bezug auf diese Phänomene werden wir allerdings auch in den einführenden Abschnitten der Kapitel des vorliegenden Buches angeben.

Wie der erste Band ist dieser Teil des „Handbuchs“ vorrangig als Nachschlagewerk für Forschung und Praxis mit (direktem oder indirektem) Bezug zu kontaktmechanischen Fragestellungen gedacht.

1.2 Zur Benutzung dieses Buches

Die Struktur dieses zweiten Teils des „Handbuchs der Kontaktmechanik“ orientiert sich sehr eng an dem Aufbau des ersten Bandes. Entsprechend ist die Verwendung des vorliegenden Buches völlig analog zu der des ersten Teils.

Die Kap. 2 bis 8 sind verschiedenen Klassen von Kontaktproblemen mit dem einfachsten und am weitesten verbreiteten Materialmodell gewidmet: dem homogenen, isotropen, linear-elastischen Halbraum (bzw. der entsprechenden Halbebene). Die Kap. 9 bis 11 behandeln anschließend jeweils weitere Materialgesetze, die eine exakte Lösung des Kontaktproblems zulassen. Alle Kapitel sind nach verschiedenen Aspekten der jeweils behandelten Klasse von Kontaktproblemen in Unterkapitel gegliedert, die wiederum – in der Regel – nach der speziellen Profilgeometrie in einzelne Abschnitte geteilt sind. Jeder Abschnitt (bzw. jedes konkrete Kontaktproblem) sollte für sich allein verständlich sein; alle zur Lösung nötigen Rückgriffe auf frühere Abschnitte des Buches (z. B. vorher dargestellte allgemeine Lösungen) sind so eindeutig und nachvollziehbar wie möglich dargestellt.

Literatur

Aleksandrov, A.I.: Solution of axisymmetric problems of the theory of elasticity with the aid of relations between axisymmetric and plane states of stress. PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **25**(5), 1361–1375 (1961) https://doi.org/10.1016/0021-8928(61)90013-2

Boussinesq, J.: Application des Potentiels a L'etude de L'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques. Gauthier-Villars, Paris (1885)

Hertz, H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **92**, 156–171 (1882)

2 Linienbelastung eines elastischen Halbraums

In diesem Kapitel werden noch keine konkreten Kontaktprobleme gelöst. Stattdessen wollen wir die fundamentalen Grundlagen für die folgenden Kapitel legen und einige grundsätzliche Aspekte von ebenen Kontaktproblemen kurz diskutieren.

2.1 Ebener Verzerrungszustand und ebener Spannungszustand

Für (linear-elastische) ebene strukturmechanische Probleme gibt es in der Regel zwei unterschiedliche Konfigurationen, den ebenen Verzerrungszustand (EVZ) und den ebenen Spannungszustand (ESZ). Die Lösungen für beide Fälle können grundsätzlich exakt ineinander umgerechnet werden. Dazu betrachte man das Hookesche Gesetz für die Komponenten des Verzerrungstensors, ε_{ij}, und des Spannungstensors, σ_{ij}, in einem isotropen, linear-elastischen Medium mit dem Elastizitätsmodul E und der Poissonzahl ν in den kartesischen Koordinaten $\{x, y, z\}$, wobei z die Symmetrieachse des ebenen Problems repräsentiere,[1]

[1] Die Schubkomponenten in z-Richtung sind weggelassen, da sie für das ebene Problem grundsätzlich verschwinden.

V. L. Popov et al., *Handbuch der ebenen Kontaktmechanik*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-69001-7_2

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right],\\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right],\\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right],\\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Für den EVZ ist außerdem $\varepsilon_{zz} = 0$ und damit

$$
\sigma_{zz} = \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right). \tag{2.2}
$$

Das Materialgesetz für die verbleibenden Komponenten des Verzerrungstensors ist deswegen

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx}\left(1 - v^2\right) - \nu\sigma_{yy}(1+\nu)\right],\\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy}\left(1 - v^2\right) - \nu\sigma_{xx}(1+\nu)\right],\\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Für den ESZ ist wiederum $\sigma_{zz} = 0$. Die Gleichungen für die Komponenten des ebenen Verzerrungstensors vereinfachen sich daher zu

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{\hat{E}}\left[\sigma_{xx} - \hat{\nu}\sigma_{yy}\right],\\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{\hat{E}}\left[\sigma_{yy} - \hat{\nu}\sigma_{xx}\right],\\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1+\hat{\nu}}{\hat{E}}\sigma_{xy},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

wobei zum Zweck der besseren Differenzierung zwischen den beiden Problemklassen die Materialkenngrößen im ESZ mit einem „Dach“ versehen wurden. Die Relationen in den Gleichungen (2.3) und (2.4) sind einander vollständig äquivalent, falls

$$
\hat{E} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \hat{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}, \tag{2.5}
$$

beziehungsweise,

$$
E = \hat{E}\frac{1+2\hat{\nu}}{(1+\hat{\nu})^2}, \quad \nu = \frac{\hat{\nu}}{1+\hat{\nu}}. \tag{2.6}
$$

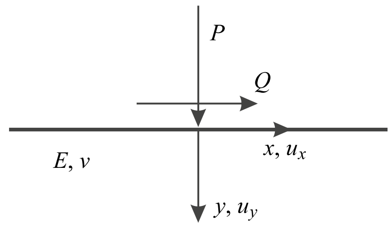

Abb. 2.1 Belastung einer elastischen Halbebene $y \geq 0$ mit dem Elastizitätsmodul E und der Poissonzahl ν durch eine Linienlast mit den Komponenten P und Q

Man kann daher immer aus der Lösung für das EVZ-Problem die für das ESZ-Problem erhalten, indem man in der EVZ-Lösung für E und ν die Relationen aus den Gleichungen (2.6) verwendet. Umgekehrt ergibt sich aus jeder ESZ-Lösung die entsprechende EVZ-Lösung durch Einsetzen der Relationen (2.5).

Bei mechanischen Kontaktproblemen ergibt sich (näherungsweise) ein EVZ, wenn die Ausdehnung der kontaktierenden Körper in Richtung der Symmetrieachse sehr viel größer ist als die Länge des Kontaktgebiets in den Ebenen quer zur Symmetrieachse. Ein ESZ stellt sich wiederum näherungsweise ein, wenn die Ausdehnung der kontaktierenden Körper in Symmetrierichtung deutlich kleiner ist als die charakteristische Länge des Kontaktgebiets. Da solche Konfigurationen nur sehr selten anzutreffen sind, werden wir in den folgenden Kapiteln grundsätzlich nur den EVZ betrachten, d. h., annehmen, dass die Kontaktpartner in Symmetrierichtung sehr lang sind.[2]

2.2 Fundamentallösung für die Linienbelastung eines elastischen Halbraums

Eine wichtige Grundlage für die Behandlung von ebenen Kontaktproblemen in der Näherung des ebenen Verzerrungszustands sind die Verschiebungen der Oberfläche eines homogenen, isotropen, linear-elastischen Halbraums mit dem Elastizitätsmodul E und der Poissonzahl ν unter der Wirkung einer gleichmäßig in z-Richtung verteilten Linienlast an der Oberfläche des elastischen Halbraums.

Der Ursprung des ebenen kartesischen Koordinatensystems liege auf der Angriffslinie der Linienlast; y bezeichne dabei die *in den Halbraum* gerichtete Normal-Achse der Halbraumoberfläche und entsprechend sei x die tangentiale Koordinate[3]. Die Komponenten der Linienlast seien P in y-Richtung und Q in x-Richtung (siehe die Skizze in Abb. 2.1).

Die sich ergebenden Verschiebungen u in x- und y-Richtung sind (Barber 2018, S. 113)

[2] In der Regel werden wir sogar annehmen, dass das Problem „echt" eben ist, d. h., dass die kontaktierenden Körper in Symmetrierichtung unendlich ausgedehnt sind; siehe auch das Unterkapitel 2.3.

[3] Für die Gültigkeit der Halbraumnäherung müssen die Ausdehnungen der kontaktierenden Körper auch in x- und y-Richtung sehr viel größer sein als die charakteristische Länge des Kontaktgebiets.

$$
\begin{aligned}
u_x &= -\frac{P(1+\nu)(1-2\nu)}{2E}\operatorname{sgn}(x) - \frac{2Q\left(1-\nu^2\right)}{\pi E}\ln\left(\frac{|x|}{x_0}\right), \quad |x| > 0, \\
u_y &= -\frac{2P\left(1-\nu^2\right)}{\pi E}\ln\left(\frac{|x|}{x_0}\right) + \frac{Q(1+\nu)(1-2\nu)}{2E}\operatorname{sgn}(x), \quad |x| > 0.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{sgn}(x)$ die Vorzeichenfunktion; x_0 ist eine Integrationskonstante, die vorläufig unbestimmt bleiben muss (siehe das Unterkapitel 2.3).

Für zwei elastische Körper, die den Anforderungen der Halbraumnäherung genügen und die durch eine Linienlast mit den Komponenten P und Q wechselwirken, sind damit die entsprechenden relativen Verschiebungen (die Indizes „1“ und „2“ beziehen sich auf die jeweiligen Körper)

$$
\begin{aligned}
u_x &:= u_{x,1} - u_{x,2} = -\frac{\beta P}{E^*}\operatorname{sgn}(x) - \frac{2Q}{\pi E^*}\ln\left(\frac{|x|}{x_0}\right), \quad |x| > 0, \\
u_y &:= u_{y,1} - u_{y,2} = -\frac{2P}{\pi E^*}\ln\left(\frac{|x|}{x_0}\right) + \frac{\beta Q}{E^*}\operatorname{sgn}(x), \quad |x| > 0,
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

mit dem effektiven Elastizitätsmodul

$$
E^* := \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-1} \tag{2.9}
$$

und Dundurs‘ (1969) zweiter Konstante

$$
\beta := E^*\left[\frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{2E_1} - \frac{(1-2\nu_2)(1+\nu_2)}{2E_2}\right]. \tag{2.10}
$$

Es ist offensichtlich, dass man die relativen Verschiebungen in den Gleichungen (2.8) als Fundamentallösung *einer* elastischen Halbebene mit den elastischen Konstanten E^* und β auffassen kann. Der ebene Kontakt elastischer Körper im Rahmen der Halbraumnäherung kann daher grundsätzlich auf einen äquivalenten Kontakt zwischen einem starren Eindruckkörper und einem elastischen Halbraum (bzw. zwischen einem starren ebenen Profil und einer elastischen Halbebene) zurückgeführt werden.

Durch Ableitung der Gleichungen (2.8) und Anwendung des Superpositionsprinzips erhält man schließlich die folgenden Ausdrücke für die Ableitungen der relativen Verschiebungen unter der Wirkung einer Druckverteilung $p(x)$ und Reibspannungen $q(x)$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} &= -\frac{2\beta}{E^*}p(x) - \frac{2}{\pi E^*}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(\xi)\mathrm{d}\xi}{x-\xi}, \\
\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{2}{\pi E^*}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(\xi)\mathrm{d}\xi}{x-\xi} + \frac{2\beta}{E^*}q(x),
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

die die Grundlage aller exakten Lösungen von ebenen Kontaktproblemen homogener, isotroper, linear-elastischer Medien bilden[4].

2.3 Unbestimmtheit der makroskopischen Verschiebungen

Die Fundamentallösung (2.7) hat eine sehr bemerkenswerte Eigenschaft: Durch das Auftreten des Logarithmus sind die elastischen Verschiebungen „im Unendlichen" unbeschränkt, während die Spannungen und Deformationen mit dem Inversen des Abstands verschwinden (was bereits aus Einheitenerwägungen klar ist, da das in Abb. 2.1 dargestellte Fundamentalproblem keine intrinsischen Längenskalen besitzt). Deswegen kann auch die Integrationskonstante x_0 in den Gleichungen (2.7) nicht aus der Forderung bestimmt werden, dass die Verschiebungen „im Unendlichen" verschwinden, wie das bei der Punktbelastung eines elastischen Halbraums der Fall wäre.

Die Verschiebungen in der Fundamentallösung (2.7) sind also wegen ihrer logarithmischen Divergenz nur relativ zu einem festen (aber unbestimmten) Bezugspunkt $x_0$definiert. Eine Konsequenz dieses Phänomens ist, dass die Eindrucktiefe (oder auch eine makroskopische relative tangentiale Verschiebung) für ein (im mathematisch strengen Sinn) ebenes Kontaktproblem zwischen einem ebenen starren Profil und einer elastischen Halbebene nicht eindeutig definiert werden kann. In der Regel beschränken wir uns in diesem Buch daher bei der Darstellung einer Kontaktlösung auf die Angabe der Zusammenhänge zwischen den Linienlasten, den charakteristischen Längen (bzw. Breiten) des Kontaktgebiets und den Spannungsverteilungen.

Eine physikalische Eindrucktiefe ergibt sich erst, wenn man die endliche Ausdehnung der Kontaktpartner (in lateraler Richtung, d. h., entlang der Symmetrieachse, oder in der Symmetrieebene) berücksichtigt. Dies ist aber in der Regel in analytisch geschlossener Form nur durch (asymptotische) Näherungslösungen möglich. Eine ausführlichere Darstellung dieses Sachverhalts wird im Unterkapitel 3.7 gegeben.

2.4 Bestimmung der Spannungen im Inneren des elastischen Halbraums

Muskhelishvili (1953, S. 282 ff.) hat gezeigt, wie man bei Kenntnis der Verteilungen $p(x)$ und $q(x)$ auch die Spannungen im Inneren der elastischen Halbebene ohne große Schwierigkeiten bestimmen kann. Dazu definiert man das komplexwertige Potential (Muskhelishvili 1953, S. 286)

[4] Diese Gleichungen sind stark singulär. Die auftretenden Integrale sind deswegen nur im Sinne des Cauchy-Hauptwertes definiert (und eben in diesem Sinne gemeint). Eine Auflistung der in diesem Buch verwendeten Cauchy-Hauptwerte bestimmter Integrale ist im Anhang gegeben.

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-p(\xi) + iq(\xi)}{\xi - \zeta} \,\mathrm{d}\xi, \quad \zeta := x + iy, \quad i = \sqrt{-1}, \\ \overline{\phi}(\zeta) &:= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-p(\xi) - iq(\xi)}{\xi - \zeta} \,\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Die (reellen) Spannungen im Inneren der Halbebene ergeben sich dann aus den Gleichungen (Muskhelishvili 1953, S. 282)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x,y) + \sigma_{yy}(x,y) &= 4\mathrm{Re}\{\phi(\zeta)\}, \\ \sigma_{yy}(x,y) - \sigma_{xx}(x,y) + 2i\sigma_{xy}(x,y) &= 2\big[(x - iy)\phi'(\zeta) + \psi(\zeta)\big], \end{aligned} \tag{2.13}$$

mit (Muskhelishvili 1953, S. 285)

$$\psi(\zeta) = -\phi(\zeta) - \overline{\phi}(\zeta) - \zeta\phi'(\zeta), \tag{2.14}$$

wobei der Hochstrich die Ableitung nach dem jeweiligen Argument bezeichnet. Dabei ist wegen der Wahl des Koordinatensystems des Kontaktes $\sigma_{yy}\,(x, y = 0) = -p(x)$ und $\sigma_{xy}\,(x, y = 0) = -q(x)$.

Es sei außerdem angemerkt, dass die zweite der Gleichungen (2.13) komplexwertig ist und deswegen in zwei reelle Gleichungen (jeweils eine für den Real- und Imaginärteil) zerfällt. Im Fall des ebenen Verzerrungszustands ergibt sich außerdem σ_{zz} aus Gleichung (2.2).

Literatur

Barber, J.R.: *Contact Mechanics*. Springer International Publishing, Basel (2018) https://doi.org/10.1007/978-3-319-70939-0

Dundurs, J.: *Discussion on "Edge-Bonded Dissimilar Orthogonal Elastic Wedges Under Normal and Shear Loading"*. Journal of Applied Mechanics, **36**(3), 650–652 (1969) https://doi.org/10.1115/1.3564739

Muskhelishvili, N.I.: *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity: fundamental equations, plane theory of elasticity, torsion, and bending*. P. Noordhoff Ltd, Groningen (1953), Übersetzung der 3. Auflage des russischen Originals von 1949 durch J.R.M. Radok

3 Reibungsfreier Normalkontakt ohne Adhäsion

3.1 Einführung

Wir beginnen unsere Darstellung konkreter Kontaktprobleme mit der Behandlung des *Normalkontaktproblems*. In vielen tribologischen Systemen ist die Etablierung des direkten Kontakts durch eine Kompressionskraft senkrecht zur Kontaktebene die Grundlage verschiedenster tribologischer Phänomene, wie Reibung oder Verschleiß.

Damit es sich wirklich um ein reines Normalkontaktproblem handelt – d. h., dass der Spannungsvektor in der Kontaktfläche nur eine Komponente senkrecht zur Kontaktfläche aufweist – muss entweder die Berührungsfläche zwischen den kontaktierenden Körpern reibungsfrei sein, oder Dundurs‘ zweite Konstante, siehe Gleichung (2.10), welche die Kopplung zwischen normalen Lasten und tangentialen relativen Verschiebungen – sowie *vice versa* – charakterisiert, muss verschwinden. Letzteres ist der Fall für Materialpaarungen, die die Bedingung

$$\frac{1-2\nu_1}{G_1} = \frac{1-2\nu_2}{G_2}, \tag{3.1}$$

mit den Poissonzahlen υ und Schubmoduln G, erfüllen, und die man einander „elastisch ähnlich“ nennt. Die Bedingung (3.1) ist unter anderem erfüllt für den Kontakt gleicher oder inkompressibler Materialien oder den zwischen einem inkompressiblen Medium mit einem deutlich festeren, z. B. zwischen Gummi und einem „harten“ Festkörper.

In Kontakten elastisch unterschiedlicher Materialien kommt es auch bei einer reinen äußeren Normalbelastung zu relativen tangentialen Verschiebungen zwischen den kontaktierenden Oberflächen; ist die Grenzfläche reibungsbehaftet, führen diese relativen Verschiebungen zu Reibspannungen im Kontakt, die wegen der elastischen Kopplung wiederum die Konfiguration des Normalkontakts beeinflussen. Die elastische Kopplung zwischen den normalen und tangentialen Komponenten des Kontaktproblems erschwert

V. L. Popov et al., *Handbuch der ebenen Kontaktmechanik*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-69001-7_3

dessen exakte Lösung deutlich und führt zu mehr oder weniger starken Korrekturen der entsprechenden reibungsfreien Lösung. Dieses Phänomen werden wir ausführlich im nächsten Kapitel diskutieren; zunächst konzentrieren wir uns auf den (deutlich einfacheren) reibungsfreien (oder elastisch entkoppelten) Fall.

3.2 Anwendungsgebiete

Ebene Normalkontakte sind in vielen Ingenieurdisziplinen verbreitet; sei es der Kontakt zwischen parallelen Zylindern in einem Rollenlager, das Schneiden mit einem keilförmigen Eindruckkörper oder die Indentierung durch einen langen quaderförmigen (flachen) Kontaktpartner – wie sie in vielen formschlüssigen Verbindungen, z. B. Schaufelfüßen von Turbinen, auftritt.

Diese drei idealen Basisformen – ebener flacher Stempel (siehe Abschn. 3.4.1), Keil (siehe Abschn. 3.4.2) und Zylinder (siehe Abschn. 3.4.3) – bilden den ersten Grundstock von ebenen Kontaktaufgaben. Tatsächlich werden aber reale Kontaktprofile mehr oder weniger stark von diesen idealen Formen abweichen. Beispielsweise ist keine reale Kante ideal „scharf", sondern immer mehr oder weniger abgerundet. Entsprechend ergeben sich die Kontaktprobleme des Keils mit abgerundeter Spitze (siehe Abschn. 3.4.11) und des flachen Stempels mit abgerundeten Kanten (siehe Abschn. 3.4.8). Letzterer hat – besonders im Kontext von Fretting-Kontakten – über mehrere Jahrzehnte sehr viel wissenschaftliche Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Eine andere Form der „Imperfektion" der idealen Grundkörper ist das Glattschleifen, z. B. durch Gleitverschleiß; den Keil mit flacher Grundfläche betrachten wir in Abschn. 3.4.9, und den entsprechenden Zylinder in Abschn. 3.4.10.

Ein Kontaktproblem, das im Zusammenhang mit adhäsiven Systemen und Festigkeit häufig auftritt, ist die Frage nach der Form des Eindruckkörpers, die eine (näherungsweise) konstante Verteilung des Kontaktdrucks erzeugt; diese betrachten wir in Abschn. 3.4.7. Außerdem ist jedes glatte Kontaktprofil in einer Taylor-Reihe entwickelbar. Als Grundlage der dazugehörigen Kontaktlösung benötigt man dann die Lösung für die Indentierung durch ein Profil in der Form eines Potenzgesetzes (siehe Abschn. 3.4.6).

Da ein *axialsymmetrisches* Normalkontaktproblem durch eine exzentrische Belastung seine Symmetrie verliert (was die exakte Lösung massiv erschwert), haben wir im ersten Teil dieses „Handbuchs der Kontaktmechanik" solche Fälle – z. B. die Indentierung durch einen gekippten Kegel – nicht diskutiert. Ein ebener Normalkontakt mit einem um die Symmetrieachse gekippten Eindruckkörper bleibt aber ein ebener Normalkontakt (der auch nicht wesentlich komplizierter zu lösen ist). Da eine reale Ausrichtung zweier Kontaktkörper nicht immer ideal senkrecht zur Kontaktebene sein wird, kommt dieser Frage ebenfalls eine große technische Bedeutung zu; wir behandeln deswegen mehrere „gekippte" Normalkontaktprobleme ausführlich im Unterkapitel 3.5. Das Unterkapitel 3.6 beschäftigt sich mit periodischen Kontakten, z. B. mit gewellten Oberflächen.

3.3 Allgemeine Lösung für einzelne Kontakte von unendlicher Länge

3.3.1 Lösung der Integralgleichung

Wir betrachten den reibungsfreien Normalkontakt zwischen einem in der z-Richtung unendlich ausgedehnten starren Indenter mit einem elastischen Halbraum. Wie im zweiten Kapitel dargelegt, ist der Verzerrungszustand eben und wir können den Kontakt eines ebenen starren Profils mit einer unendlichen elastischen Halbebene betrachten. Die Lücke zwischen dem starren Profil und der elastischen Halbebene im Moment des ersten Kontaktes habe die Form $f(x)$[1]. In der aktuellen Kontaktkonfiguration sei das Kontaktgebiet ein Streifen $-b < x < a$. Dann folgt aus der im letzten Kapitel erläuterten Fundamentallösung – siehe die Gleichungen (2.11) – dass sich die allgemeine Lösung des Kontaktproblems für die Druckverteilung aus der Lösung der singulären Integralgleichung

$$\int_{-b}^{a} \frac{p(\xi)d\xi}{x-\xi} = \frac{\pi}{2} E^* f'(x), \quad -b < x < a, \tag{3.2}$$

mit dem effektiven Elastizitätsmodul E^* – siehe Gleichung (2.9) – ergibt. Der Hochstrich bezeichnet in dem vorliegenden Buch grundsätzlich die Ableitung nach dem jeweiligen Argument. Muskhelishvili (1953, S. 292 ff.) hat gezeigt, dass man diese Gleichung explizit nach der Druckverteilung auflösen kann (Barber 2018, S. 80),

$$p(x;P) = \frac{1}{\pi\sqrt{x+b}\sqrt{a-x}}\left[P - \frac{E^*}{2}\int_{-b}^{a} \frac{\sqrt{\xi+b}\sqrt{a-\xi}}{x-\xi} f'(\xi)\mathrm{d}\xi\right], \quad -b < x < a, \tag{3.3}$$

wobei die gesamte Linienlast P als Integral der Druckverteilung gegeben ist,

$$P := \int_{-b}^{a} p(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

Unter Umständen kann es hilfreich sein, eine etwas „symmetrischere" Formulierung von Gleichung (3.3) zu wählen. Dazu führt man die Hilfsgrößen

$$\hat{x} := x - \frac{a-b}{2}, \quad \hat{a} := \frac{a+b}{2}, \quad \hat{f}(\hat{x}) = f(x) \tag{3.5}$$

ein und erhält dann die Druckverteilung

$$p(\hat{x};P) = \frac{1}{\pi\sqrt{\hat{a}^2-\hat{x}^2}}\left[P - \frac{E^*}{2}\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} \frac{\sqrt{\hat{a}^2-\xi^2}}{x-\xi} \hat{f}'(\xi)\mathrm{d}\xi\right], \quad |\hat{x}| < \hat{a}. \tag{3.6}$$

[1] Im Fall des Kontaktes zweier elastischer Körper, die den Einschränkungen der Halbraumnäherung genügen, ist $f(x){:} = y_2(x) - y_1(x)$ die Form der Lücke zwischen den (undeformierten) kontaktierenden Oberflächen im Moment des ersten Kontakts, $y_1(x)$ und $y_2(x)$.

Im Fall symmetrischer Profile mit $\hat{f}'(-\xi) = -\hat{f}'(\xi)$ ist außerdem

$$\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} \frac{\sqrt{\hat{a}^2 - \xi^2}}{x - \xi} \hat{f}'(\xi) \mathrm{d}\xi = 2 \int_0^{\hat{a}} \frac{\xi \sqrt{\hat{a}^2 - \xi^2}}{x^2 - \xi^2} \hat{f}'(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{3.7}$$

Der Nachteil der Formulierung besteht allerdings darin, dass der Ursprung der Koordinate $\hat{x}$ im Allgemeinen nicht *a priori* bekannt ist, da das Kontaktgebiet (ausgedrückt durch die Längen a und b) im Allgemeinen aus dem Profil und der Steuerungsgröße der Indentierung (der Linienlast P) bestimmt werden muss.

3.3.2 Randbedingungen

Wenn die Ränder $x = -b$ und $x = a$ nicht durch scharfe Kanten des Indenters vorgegeben sind, wird der Druck an diesen Stellen (im Fall des nicht-adhäsiven Kontaktes) verschwinden. Die Werte von a und b müssen dann im Laufe der Lösung des Kontaktproblems ermittelt werden; im Gegenzug ergeben sich aus der Gebundenheit des Druckes am Rand des Kontaktes weitere Bedingungen, die die zusätzlichen Freiheitsgrade der Lösung wieder einschränken.

Falls ein Rand gebunden und ein Rand (durch eine scharfe Kante) singulär ist, liefert die Bedingung für die Beschränktheit des Druckes einen Zusammenhang zwischen der Linienlast und der Koordinate des gebundenen Kontaktrands. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der gebundene Rand bei $x = a$; der Rand $x = -b$ sei also singulär und damit fest. Da $p(x = a) = 0$ sein muss, folgt aus Gleichung (3.3) der Zusammenhang

$$P = \frac{E^*}{2} \int_{-b}^{a} \frac{\sqrt{\xi + b}}{\sqrt{a - \xi}} f'(\xi) \mathrm{d}\xi = P(a) \tag{3.8}$$

und die Druckverteilung ergibt sich zu[2]

$$p(x; a) = -\frac{E^*}{2\pi} \frac{\sqrt{a - x}}{\sqrt{x + b}} \int_{-b}^{a} \frac{\sqrt{\xi + b}}{\sqrt{a - \xi}} \frac{f'(\xi)}{x - \xi} \mathrm{d}\xi, \quad -b < x \leq a. \tag{3.9}$$

Den Prozess der Indentierung bis zur Kontaktbreite $(a + b)$ kann man als Folge von inkrementellen Flachstempeleindrücken mit wachsender Laufvariable $\tilde{a}$ auffassen. Das Inkrement der Druckverteilung zwischen zwei infinitesimal benachbarten Kontaktkonfigurationen beträgt wegen der Lösung für den Flachstempelkontakt (siehe Abschn. 3.4.1)

$$\mathrm{d}p(x; \tilde{a}) = \frac{\mathrm{d}P(\tilde{a})}{\pi \sqrt{x + b} \sqrt{\tilde{a} - x}}, \quad -b < x < \tilde{a}, \tag{3.10}$$

[2] Die allgemeine Darstellung der Druckverteilung in Abhängigkeit von der Kontaktlänge ist einfacher als die in Abhängigkeit von der Linienlast; sie wird daher im Folgenden für alle gebundenen Probleme bevorzugt.

und die gesamte Druckverteilung am Ende der Indentierung ist entsprechend

$$p(x;a) = \frac{1}{\pi}\int_x^a \frac{P'(\tilde{a})\mathrm{d}\tilde{a}}{\sqrt{x+b}\sqrt{\tilde{a}-x}}, \quad -b < x \le a. \tag{3.11}$$

Die Formulierung in Gleichung (3.11) ist natürlich äquivalent zu der in Gleichung (3.9), hat aber den Vorteil, dass die Wurzel-Singularität des Integranden in Gleichung (3.11) eine schwache Singularität darstellt, und man deswegen zur Ermittlung der Druckverteilung nicht auf die Bestimmung von Cauchy-Hauptwerten zurückgreifen muss.

Wenn der Druck an beiden Kontakträndern beschränkt ist, liefert die Bedingung $p(x = -b) = 0$ eine weitere Forderung für die Linienlast P,

$$P = -\frac{E^*}{2}\int_{-b}^a \frac{\sqrt{a-\xi}}{\sqrt{\xi+b}} f'(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{3.12}$$

Wenn man P aus den Gleichung (3.8) und (3.12) eliminiert, erhält man folgende Konsistenzbedingung für die Längen b und a (Barber 2018, S. 83):

$$\int_{-b}^a \frac{f'(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi+b}\sqrt{a-\xi}} = 0. \tag{3.13}$$

Eine alternative Darstellung der Last P ist dann wiederum (Barber 2018, S. 83)

$$P = \frac{E^*}{2}\int_{-b}^a \frac{\xi f'(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi+b}\sqrt{a-\xi}} = P(a,b) \tag{3.14}$$

und die Druckverteilung ist gegeben durch

$$p(x;a,b) = -\frac{E^*}{2\pi}\sqrt{x+b}\sqrt{a-x}\int_{-b}^a \frac{f'(\xi)}{\sqrt{\xi+b}\sqrt{a-\xi}}\frac{\mathrm{d}\xi}{x-\xi}, \quad -b \le x \le a. \tag{3.15}$$

3.3.3 Vollständig symmetrische Probleme

Wenn das Problem geometrisch und in der Last symmetrisch bezüglich $x = 0$ ist, ist die Konsistenzbedingung grundsätzlich durch ein symmetrisches Kontaktgebiet mit $b = a$ erfüllt. Für die Linienlast lässt sich in diesem Fall der vereinfachte Ausdruck (Barber 2018, S. 83)

$$P = E^*\int_0^a \frac{\xi f'(\xi)}{\sqrt{a^2-\xi^2}}\mathrm{d}\xi = P(a) \tag{3.16}$$

angeben und die Druckverteilung kann man wiederum durch eine geeignete Superposition von inkrementellen symmetrischen Flachstempeleindrücken ermitteln,

$$p(x;a) = \frac{1}{\pi}\int_{|x|}^{a} \frac{P'(\tilde{a})\mathrm{d}\tilde{a}}{\sqrt{\tilde{a}^2 - x^2}}, \quad |x| \le a. \tag{3.17}$$

Die Umkehrung von Gleichung (3.16) ist (Popov 2018).

$$f(x) = \frac{2|x|}{\pi E^*}\int_0^{|x|} \frac{P(\tilde{a})\mathrm{d}\tilde{a}}{\tilde{a}\sqrt{x^2 - \tilde{a}^2}}. \tag{3.18}$$

Während die Eindrucktiefe und die Verschiebungen außerhalb des Kontaktes sich für „echte" ebene Kontakte (d. h. solche mit unendlicher Länge), wie im zweiten Kapitel beschrieben, nicht in absoluten Werten definieren lassen, da sie selbst bei beliebig kleinen Linienlasten bezüglich der ursprünglichen Lage logarithmisch divergieren, gilt das nicht für die vom tiefsten Punkt des Eindrucks gemessene Position $h(x)$ der deformierten Oberfläche der Halbebene (siehe Abb. 3.1, links); diese kann auch für Kontakte unendlicher Länge explizit und absolut angegeben werden. Für die Bestimmung dieser Position eignet sich wiederum die Idee der Superposition von inkrementellen symmetrischen Flachstempeleindrücken. Mit der in Abschn. 3.4.1 angegebenen Lösung für $h(x)$ bei der Indentierung durch einen starren Flachstempel erhält man für den allgemeinen symmetrischen Fall

$$\begin{aligned} h(x;a) &= \frac{2}{\pi E^*}\int_0^{a} \operatorname{arcosh}\left(\frac{|x|}{\tilde{a}}\right) P'(\tilde{a})\mathrm{d}\tilde{a}, \quad |x| \ge a \\ &= \frac{2}{\pi E^*}\left[P(a)\operatorname{arcosh}\left(\frac{|x|}{a}\right) + |x|\int_0^{a} \frac{P(\tilde{a})\mathrm{d}\tilde{a}}{\tilde{a}\sqrt{x^2 - \tilde{a}^2}}\right], \end{aligned} \tag{3.19}$$

wobei angenommen wurde, dass $\lim\limits_{\tilde{a}\to 0}[P(\tilde{a})\ln(2|x|/\tilde{a})] = 0$. Man beachte, dass sich der *Areakosinus hyperbolicus* nach der Vorschrift

$$\operatorname{arcosh}(z) = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \quad z \ge 1, \tag{3.20}$$

direkt in den natürlichen Logarithmus umrechnen lässt. Außerdem erhält man aus den Gleichung (3.18) und (3.19) für die Lücke zwischen den deformierten Oberflächen außerhalb des Kontakts

$$f(x) - h(x;a) = \frac{2}{\pi E^*}\left[|x|\int_a^{|x|} \frac{P(\tilde{a})\mathrm{d}\tilde{a}}{\tilde{a}\sqrt{x^2 - \tilde{a}^2}} - P(a)\operatorname{arcosh}\left(\frac{|x|}{a}\right)\right]. \tag{3.21}$$

Die Superposition von inkrementellen Flachstempeleindrücken liefert die korrekte Kontaktlösung für vollständig symmetrische Probleme auch dann, wenn das Profil des Eindruckkörpers an einer Stelle $|x| = A$ „abbricht" (der Eindruckkörper ist dann ein Flachstempel mit einer z. B. keilförmigen Kappe, siehe Abb. 3.1, rechts). Im Fall des vollständigen Kontaktes ist das Problem dann im Allgemeinen an beiden Kontakträndern singulär. Der Übergang zwischen beidseitig gebundenen und beidseitig singulären Konfigurationen wird erreicht, wenn der Kontaktradius des gebundenen Problems gerade den Wert $a = A$ annimmt. Die dazugehörige Linienlast $P_1 = P_1(A)$, Druckverteilung

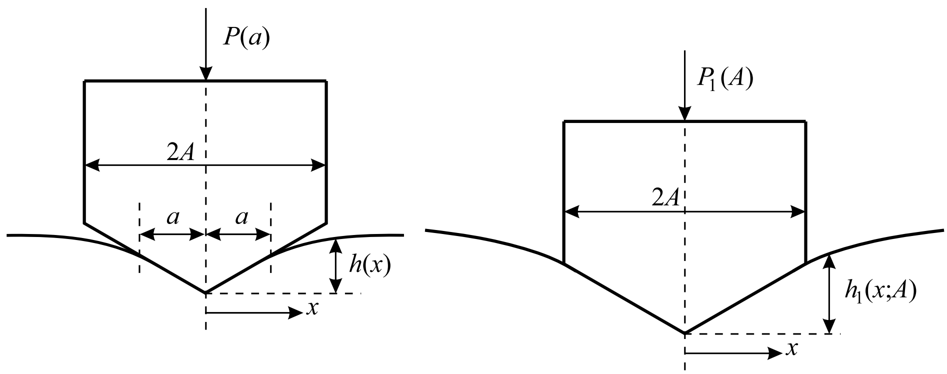

Abb. 3.1 Indentierung einer elastischen Halbebene durch einen symmetrischen Eindruckkörper, der an der Stelle $|x| = A$ in einen Flachstempel übergeht **links:** beidseitig gebundene Kontaktkonfiguration mit der Halbbreite des Kontaktes a **rechts:** Kontaktkonfiguration des Übergangs, bei der die Halbbreite des Kontaktes gerade den Wert $a = A$ erreicht

$p_1(x) = p_1(x;A)$ und Position der Oberfläche $h_1(x) = h_1(x;A)$ können mithilfe der Gleichungen (3.16) bis (3.19) bestimmt werden. Wird die Linienlast anschließend noch um $P - P_1(A)$ erhöht, ist die letztliche Druckverteilung

$$p(x;P) = p_1(x;A) + \frac{P - P_1(A)}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, \quad P \geq P_1(A), \quad |x| < A, \tag{3.22}$$

und die Position der Oberfläche der elastischen Halbebene

$$h(x;P) = h_1(x;A) + \frac{2}{\pi E^*}[P - P_1(A)] \operatorname{arcosh}\left(\frac{|x|}{A}\right), \quad P \geq P_1(A), \quad |x| \geq A. \tag{3.23}$$

Es sei angemerkt, dass die Gleichungen (3.22) und (3.23) bereits durch die Gleichungen (3.17) und (3.22) erfasst sind, wenn man die auftretenden Integrale über die *abgeschlossenen* Intervalle auswertet.

3.3.4 Bestimmung der Spannungen im Inneren

Mithilfe der im Unterkapitel 2.4 aufgeführten allgemeinen Gleichungen lässt sich auch der Spannungszustand im Inneren der elastischen Halbebene bestimmen. Das Muskhelishvili-Potential aus den Gleichungen (2.12) vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)}{\xi - \zeta}\,\mathrm{d}\xi, \quad \zeta := x + iy, \quad i = \sqrt{-1}, \\ \overline{\phi}(\zeta) &= -\frac{i}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)}{\xi - \zeta}\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{3.24}$$