



Charlotte Rechtsteiner (Hg.)

Rechnen richtig lernen –

*flexibel, für alle
und von Anfang an*

Fachdidaktische Hintergründe und
Lernangebote für die Grundschule

Charlotte Rechtsteiner (Hg.)

Rechnen richtig lernen – flexibel, für alle und von Anfang an

Fachdidaktische Hintergründe und Lernangebote für die Grundschule

Unter **www.friedrich-verlag.de** finden Sie Materialien zum Buch als Download.
Bitte geben Sie den achtstelligen Download-Code in das Suchfeld ein:

d31860mfx

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Impressum

Charlotte Rechtsteiner (Hg.)
Rechnen richtig lernen – flexibel, für alle und von Anfang an
Fachdidaktische Hintergründe und Lernangebote für die Grundschule

1. Auflage

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen (gemäß § 60 a UrhG) bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.
Das gedruckte Werk unterliegt den Regelungen für den Einsatz an Schulen, weitere Infos siehe www.schulbuchkopie.de.
Der Verlag untersagt ausdrücklich das Herstellen von digitalen Kopien des ganzen Werkes, das Speichern und Zurverfügungstellen dieses Werkes in Netzwerken (das gilt auch für Schulserver, Cloudsysteme und Intranets sonstiger Bildungseinrichtungen), per E-Mail, Internet oder sonstigen elektronischen Medien außerhalb der gesetzlichen Grenzen.
Sofern vorhanden: Es dürfen zur Verfügung gestellte Kopiervorlagen / Schülermaterialien für alle Teilnehmenden der eigenen Klasse / des eigenen Kurses für derzeitige und zukünftige Lerngruppen (auch digital) vervielfältigt/bereitgestellt werden.
Dies gilt jedoch nicht für Musikstücke. Die digitale Weitergabe der Kopiervorlagen / der Schülermaterialien an die Teilnehmenden (z. B. über E-Mail, Schulserver, LMS, Cloud-Systeme etc.) muss dabei unter Zugriffsbeschränkungen für den Kreis der Berechtigten erfolgen.
Die (analoge wie digitale) Weitergabe von Kopiervorlagen / Schülermaterialien an Kolleg:innen, Eltern oder Schüler:innen anderer Lerngruppen ist nicht gestattet. Editierbare Kopiervorlagen / Dateien dürfen zusätzlich bearbeitet, gespeichert und für Schüler:innen der eigenen Lerngruppe vervielfältigt werden. Die Lizenzinformation und Quellenhinweise des Werkes dürfen nicht entfernt werden.
Die digitale Ausgabe (PDF) dürfen Sie auf Ihren Endgeräten speichern, jedoch nicht weitergeben.
Alle weiteren Bedingungen gelten wie oben entsprechend.
Die automatisierte Analyse des Werkes, um daraus Informationen insbesondere über Muster, Trends und Korrelationen gemäß § 44b UrhG („Text- und Datamining“) zu gewinnen, ist untersagt.

© 2025. Kallmeyer in Verbindung mit Klett
Friedrich Verlag GmbH
Luisenstraße 9
D-30159 Hannover
Alle Rechte vorbehalten.
www.friedrich-verlag.de

Redaktion: Dirk Haupt, Berlin
Druck: Beltz Grafische Betriebe GmbH, Am Fliegerhorst 8, 99947 Bad Langensalza
Printed in Germany

Für Fragen oder Hinweise zur Produktsicherheit unserer Publikationen wenden Sie sich bitte an folgende E-Mail-Adresse:
produktsicherheit@friedrich-verlag.de.
Unsere Produkte erfüllen die Anforderungen der EU-Produktsicherheitsverordnung (GPSR).

ISBN (Print): 978-3-7727-1860-1
ISBN (E-Book): 978-3-7727-1861-8

Charlotte Rechtsteiner (Hg.)

Rechnen richtig lernen – flexibel, für alle und von Anfang an

Fachdidaktische Hintergründe und Lernangebote
für die Grundschule

Inhalt

Übersicht der Downloadmaterialien	6
---	---

Vorwort	7
----------------------	---

Flexibles Rechnen – eine Basiskompetenz?	7
--	---

Charlotte Rechtsteiner & Silvia Wessolowski

1 Flexibles Rechnen entwickeln	9
---	---

1.1 Flexibles Rechnen – was verstehen wir darunter?	9
---	---

1.2 Flexibles Rechnen anregen – wie und ab wann?	13
--	----

2 Flexibles Zahlverständnis – in Kindergarten und Grundschule	17
--	----

Charlotte Rechtsteiner

2.0 Theoretische Hintergründe zur Zahlbegriffsentwicklung	18
---	----

Julia Böhringer & Dorothea Hertling

2.1 Flexibles Rechnen anbahnen – bereits im Kindergarten?	21
---	----

Stephanie Schuler

2.2 Ein Zahlverständnis aufbauen im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule	31
---	----

Kerstin Hager

2.3 Einen tragfähigen Zahlbegriff entwickeln – vielfältige Zerlegungen anregen	40
--	----

Leonie Brumm

2.4 Schätzen von Anzahlen als Beitrag zum Zahlverständnis	48
---	----

3 Flexibles Denken und Rechnen – in der Grundschule und Sekundarstufe	57
--	----

Charlotte Rechtsteiner

3.0 Theoretische Hintergründe zum Rechnen	58
---	----

Sebastian Wartha, Axel Schulz & Christiane Benz

3.1 Grundvorstellungen zur Subtraktion und Addition untersuchen, aufbauen und anwenden	61
---	----

Uta Häsel-Weide, Stephan Hußmann & Marcus Nührenbörger

3.2 Flexibles Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis 100	71
---	----

Anna Körner & Dagmar Bönig

3.3 Erst anschauen, dann rechnen!	81
---	----

	Solveig Jensen & Hedwig Gasteiger	
3.4	Sinnvoller Einsatz schriftlicher Rechenverfahren	91
	Charlotte Rechtsteiner & Alexandra Scherrmann	
3.5	„Aufgabenfamilien legen“ – Chancen und Herausforderungen für das Erklären mathematischer Strukturen	101
	Gerald Wittmann	
3.6	Zahlenblick bei Bruchzahlen	111
	Daniela Götze	
3.7	Sprachbewusste Förderung des flexiblen Rechnens	121
	Henning Sievert & Aiso Heinze	
3.8	Flexibles Rechnen im Schulbuch – Lerngelegenheiten und ihre Bedeutung für den Lernerfolg	131
4	Flexibles Rechnen mit allen Kindern	141
	Charlotte Rechtsteiner	
4.0	Hintergründe zum konstruktiven Umgang mit Heterogenität	142
	Timo Flückiger	
4.1	Diagnose flexibler Rechenkompetenzen	145
	Andreas Eichler & Dorothee Cosima Stylianou	
4.2	Entwicklung zu flexiblen Mathematiker:innen – die Matheforscher:innen	155
	Charlotte Rechtsteiner	
4.3	Flexibles Rechnen auch mit Kindern, die besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zeigen?!	165
	Silke Ruwisch	
4.4	Inklusiv und kooperativ die Welt der Zahlen erkunden	175
	Silke Friedrich	
4.5	Flexibles Rechnen natürlich differenziert – Aktivitäten in heterogenen Lerngruppen	193
	Charlotte Rechtsteiner	
5	Flexibles Rechnen – eine Basiskompetenz!	203
	Epilog	206
	Literatur	208

Übersicht der Downloadmaterialien



Kapitel 2.1

M1 Kartensatz zum Regelspiel „Schüttelbecher“

Kapitel 2.2

M1 Würfelbilderspielkarten 1–6

M2 Andere Zahlbilder 1–6

M3 Fingerbilderspielkarten 1–10

M4 Würfelbilderspielkarten 1–12

M5 Zehnerfeldkarten Block

M6 Zehnerfeldkarten Reihe

M7 Zehnerfeldkarten gemischt

Kapitel 3.2

M1 Einfache Aufgaben mit 10

M2 Aufgabenkarten/Zahlenbilder zu Aufgaben mit „5 und mit 1“, „10 und doppelt“, „gleich 10 und gleich 20“

Kapitel 3.3

M1 Unter 10, gleich 10 oder über 10?

M2 Geht über den Zehner oder nicht?

M3 Abziehen oder Ergänzen?

M4 Im Kopf oder schriftlich?

M5 Im Kopf oder schriftlich?

Kapitel 3.4

M1 Subtraktion: Kann das stimmen?

M2 Schriftliche Subtraktion – Überschlag

M3 Im Kopf oder schriftlich?

M4 Im Kopf oder schriftlich?

Kapitel 3.5

M1 Kärtchen zur Aufgabenfamilie $6 \cdot 8$

M2 Mathematisches Potenzial des Aufgabenformats

M3 Schaubild Erklären Wie + Warum

M4 Vorschlag für einen Wortspeicher

Kapitel 3.6

M1 Welcher Bruch ist größer?

M2 Welche Brüche gehören zur selben Bruchzahl?

M3 Brüche in gemischter Schreibweise addieren

M4 Aufgaben vor dem Rechnen sortieren

M5 Das Ergebnis einer Aufgabe abschätzen

M6 Aufgaben nach ihrem Ergebnis sortieren

M7 Aufgabe und Ergebnis zuordnen

M8 Aufgaben nach ihrem Ergebnis sortieren

Kapitel 3.7

M1 Karten zuordnen

Kapitel 3.8

M1 Kriterienraster zur Bewertung der themenspezifischen Schulbuchqualität ausgewählter Inhaltsbereiche

Kapitel 4.1

M1 Handreichungen für das Interview

Kapitel 4.3

M1 Aufgaben sortieren

M2 Aufgabengenerator

Kapitel 4.4

M1 Vorlage Mindmap

M2 Vorlage Table-Sets

M3 Table-Set Tannenbäume

M4 Tannenbäume Tippstreifen

M5 Tannenbäume Profistreifen

Kapitel 4.5

M1 Ziffernkarten „Kombi“

M2 Tabellarischer Unterrichtsverlauf zum Lernangebot „Kombi-Gleichungen“

Vorwort

Flexibles Rechnen – eine Basiskompetenz?

Die Antwort auf diese Frage hängt ganz davon ab, welche Ziele wir im Mathematikunterricht verfolgen wollen. Geht es – nur – darum, dass Kinder Aufgaben schnell und richtig lösen können, dann ist flexibles Rechnen sicherlich als „die rote Kirsche obendrauf“ zu betrachten. Schön, wenn das auch noch klappt! Dieser Perspektive ist entgegenzuhalten, dass wir heute, im Zeitalter von Smartphone, Computer und einer nahezu vollständig modellierten Welt, keine (Aus-)Rechenkompetenzen mehr benötigen. Vielmehr ist es zentral, mit den Rechnungen und Lösungen anderer umgehen zu können, ihre Richtigkeit einzuschätzen, zu prüfen und zu hinterfragen sowie Muster und Strukturen darin zu deuten und zu nutzen. Dafür benötigen wir mathematisches Verständnis von Zahlen, Rechenoperationen und dem Rechnen sowie die Fähigkeit zum mathematischen Arbeiten. Bezogen auf das Rechnen bedeutet dies, einen fundierten, flexiblen Zahlbegriff und ein ebensolches Operationsverständnis aufzubauen sowie die Kompetenz, Zahl- und Aufgabenmerkmale wahrzunehmen und für das aufgabenadäquate Rechnen zu nutzen, also flexibel zu rechnen. Damit geht stets das Beschreiben und Begründen von Rechenwegen, das (systematische) Ausprobieren sowie das kritische Reflektieren von Lösungen und Lösungswegen einher.

Dieses Buch möchte einen Beitrag dazu leisten, dass flexibles Rechnen zu einer mathematischen Basiskompetenz für alle Kinder werden kann. Dazu wird der Begriff des flexiblen Rechnens theoretisch fundiert und die Zahlenblickschulung als Konzeption zur Förderung flexibler Rechenkompetenzen für alle Kinder vorgestellt. Es spannt den Bogen vom Kindergarten bis zum Beginn der Sekundarstufe I, wobei der Schwerpunkt auf der Grundschule liegt. Dies ermöglicht einen Überblick darüber, mit welchem Vorwissen die Kinder in die Schule kommen, welche Aspekte auch für die Kooperation zwischen Kindergarten und Schule entscheidend sind und wie die bereits entwickelten Kompetenzen in der Grundschule aufgegriffen und weiterentwickelt werden können. Beim Übergang in die Sekundarstufe wird am Beispiel der Bruchrechnung gezeigt, wie die Konzeption der Zahlenblickschulung in der Sekundarstufe fortgeführt werden kann und es, wie in der Grundschule auch, darauf ankommt, Zahl- und Aufgabenmerkmale vor oder bestenfalls beim Lösen von Aufgaben wahrzunehmen. Daneben werden Perspektiven auf zentrale Querschnittsthemen eingenommen, wie Sprache und Mathema-

tik, die Schulbuchqualität, die Diagnose flexibler Rechenkompetenzen, Kinder mit Schwierigkeiten beim – flexiblen – Rechnen und die Frage der Differenzierung in heterogenen Klassen. Alle Beiträge enthalten zahlreiche Ideen für die Praxis, zu denen teilweise auch im Download (📥) Kopiervorlagen zur Verfügung stehen. Im Einzelnen gliedern sich die Kapitel folgendermaßen:

- Im ersten Kapitel finden sich theoretische Hintergründe zum flexiblen Rechnen. Außerdem wird die Zahlenblickschulung als Konzeption, die sich durch den Unterricht hindurchzieht, vorgestellt. Die in den Kapiteln 2 bis 4 beschriebenen Aktivitäten basieren hierauf.
- Im zweiten Kapitel steht die Entwicklung eines kardinalen Zahlbegriffs, der im Kindergarten grundgelegt und in der Grundschule weiter aufgebaut wird, im Mittelpunkt. Dabei fokussieren die Beiträge auf ein umfassendes Teile-Ganzes-Konzept, was eine wesentliche Grundlage auf dem Weg zum Rechnen darstellt.
- Kapitel 3 widmet sich dem Rechnenlernen von der ersten bis zur sechsten Klasse. Es werden die Entwicklung von Operationsverständnis und von strategischen Werkzeugen in verschiedenen Zahlenräumen in den Blick genommen sowie Fragen zu einem sprachförderlichen Unterricht und zum Mathematikbuch im Kontext des flexiblen Rechnens angesprochen.
- Im vierten Kapitel steht im Mittelpunkt, mit allen Kindern flexibel rechnen zu lernen. Zunächst geht es um die Diagnose von Rechenkompetenzen und schließlich um Möglichkeiten für einen konstruktiven Umgang mit Heterogenität im Unterricht.

Elisabeth Rathgeb-Schnierer hat im Laufe ihrer wissenschaftlichen Karriere die Auseinandersetzung und die Gespräche zum flexiblen Rechnen durch ihre Veröffentlichungen und Vorträge bei Tagungen sowie im kollegialen Austausch auch international geprägt und das Verständnis für einen anderen Blick auf Rechnen befördert. Bis heute ist ihr die Förderung aller Schüler:innen immer ein zentrales Anliegen geblieben. Dabei nimmt sie die Rechenwege und das Denken der Kinder stets genau in den Blick und analysiert diese detailliert, um zu verstehen, wie Kinder rechnen. Ihre Arbeiten bilden auch für dieses Buch eine wesentliche Grundlage, was sich in den zahlreichen Verweisen auf ihre Veröffentlichungen zeigt. Wir hoffen sehr, dass sie diese Diskussion weiterhin so konstruktiv führt und damit verbunden auch unser Nachdenken weiter anregt. Dieses Buch ist ihr gewidmet.

Zum 60. Geburtstag gratulieren wir Elisabeth Rathgeb-Schnierer herzlich!!!

Charlotte Rechtsteiner
Ludwigsburg, Juni 2025

Charlotte Rechtsteiner & Silvia Wessolowski

1 Flexibles Rechnen entwickeln

„Die Abhängigkeit aufgabenadäquater Rechenwege von erkannten und genutzten Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen verdeutlicht die Relevanz einer fundierten Schulung des Zahlenblicks.“

(Elisabeth Rathgeb-Schnierer 2006a, S. 299)

Rechnen lernen und dabei Flexibilität entwickeln sind DIE bedeutsamen Ziele des Arithmetikunterrichts in der Grundschule. Ist nun aber das Rechnenlernen der erste Schritt, an den sich als zweiter Schritt die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen anschließt? Ist flexibel rechnen zu können, ein grundlegendes Ziel für alle Kinder oder im Sinne einer „Kür“ ohnehin nur von leistungsstarken zu erreichen? Und wie lässt sich flexibles Rechnen im schulischen Alltag entwickeln? Sind dafür zusätzliche Lernangebote erforderlich oder sind die nötigen Aktivitäten Teil des Rechnenlernens? Diesen Fragen soll in Kap. 1 nachgegangen werden. In den nachfolgenden Kapiteln wird anhand von Praxisbeispielen, die auf der Grundlage aktueller Forschungsergebnisse konzipiert wurden, gezeigt, wie der Zahlbegriff (Kap. 2) und das Rechnen (Kap. 3) so entwickelt werden können, dass Kinder zu flexiblen Rechner:innen werden. Außerdem wird den Fragen nachgegangen, wie das Mathematiklernen von Kindern diagnostiziert werden kann und wie Unterricht gestaltet werden muss, damit möglichst alle Kinder flexible Rechenkompetenzen aufbauen können (Kap. 4).

1.1 Flexibles Rechnen – was verstehen wir darunter?

Beim Lösen der Aufgabe $46 - 19$ notiert Eva diese zunächst, zieht einen Strich darunter und zerlegt sie in zwei Teilaufgaben: $46 - 10 =$ und $36 - 9 =$ (Abb. 1). Auf die Frage, wie sie die einzelnen Aufgaben gelöst hat, beschreibt sie, dass sie bei der ersten Teilaufgabe den Minuenden in 40 und 6 zerlegt und somit $40 - 10$ gerechnet hat, um anschließend

$$46 - 19 = 27$$

$$46 - 10 = 36$$

$$36 - 9 = 27$$

9, 18, 27, 36, 45

Abb. 1: Evas Lösungsweg

die Sechs wieder zu addieren. Bei der zweiten Teilaufgabe rechnet sie minus zehn und addiert eins. Dabei streicht sie zunächst die Drei an der Zehnerstelle durch und ersetzt diese durch eine Zwei. Danach notiert sie für den Einer + 1 und ersetzt die Sechs durch die Sieben. Die beiden unteren Pfeile deuten an, dass sie daraus das Ergebnis 27 bildet. Auf Nachfrage begründet sie ihr Vorgehen damit, dass die Neun keine „komplette“ Zehn ist und sie daher wieder plus eins rechnen muss (Rechtsteiner & Millich 2024).

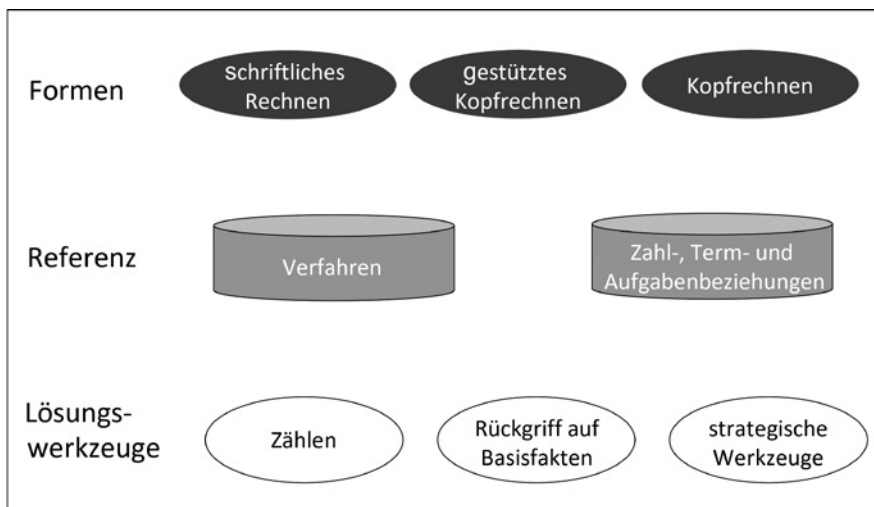


Abb. 2: Ebenen beim Analysieren von Lösungswegen (modifiziert nach Rathgeb-Schnierer 2011b, S. 16)

Versuchen wir, Evas Lösungsweg auf der Grundlage des Modells „Ebenen beim Analysieren von Lösungswegen“ (Abb. 2) zu beschreiben, ist anhand des notierten Lösungsweges erkennbar, dass sie das gestützte Kopfrechnen als Form (Abb. 2) nutzt. Um jedoch zu erfahren, wie sie tatsächlich vorgegangen ist, müssen die genutzten Lösungswerkzeuge betrachtet werden: Dabei zeigt sich, dass sie zunächst den Subtrahenden zerlegt und zwei Teilaufgaben notiert, was auch als schrittweises Vorgehen – im Sinne eines erlernten Verfahrens – beschrieben wird. Ob sie die Teilaufgaben zählend löst, Fakten abrufen, strategische Werkzeuge nutzt oder diese zum Rechnen kombiniert, wird erst durch das anschließende Nachfragen erkennbar. Dabei wird deutlich, dass sie neben der direkt sichtbaren Gliederung in zwei Teilaufgaben in der ersten auch den Minuenden in Zehner und Einer zerlegt und für die zweite die Nachbarbeziehung der 9 zur 10 nutzt.

Rechnet Eva nun also flexibel oder mechanisch?

Würden wir erwarten, dass sie sofort die Nähe der 19 zur 20 erkennt, oder deuten wir das Erkennen der Beziehung zwischen $26 - 9$ und $26 - 10$ auch bereits als flexibel? So einfach lässt sich dies wohl nicht beantworten, da flexibles Rechnen kein „Alles-oder-nichts-Phänomen“ (Rathgeb-Schnierer 2006a, S. 271) ist. Aus Evas Erklärungen lässt sich schließen, dass die Zerlegung von $46 - 19$ in zwei Teilaufgaben auf der Referenzebene (Abb. 2) als gelerntes Verfahren angesehen werden kann: „Das machen wir immer so.“ Auch die Zerlegung des Minuenden in 40 und 6 scheint ein verfahrensorientierter Lösungsweg zu sein. Bei der zweiten Teilaufgabe $36 - 9$ stützt sie sich jedoch auf eine Zahlbeziehung und erkennt die Nähe von der Neun zur Zehn, weshalb sie die Nachbarbeziehung der Aufgaben $36 - 9$ und $36 - 10$ nutzt. Dies begründet sie schließlich auch ausführlich und meint: „Weil die Neun fast eine 10 ist, aber eben keine komplette 10 ist, muss ich dann wieder plus Eins rechnen.“

Was verstehen wir unter flexiblem Rechnen?

Vergleicht man verschiedene Definitionen für das flexible Rechnen, wird darin stets der Wechsel zwischen Lösungswegen hervorgehoben (flexibility). Gleichzeitig stellt sich jedoch immer auch die Frage, ob dieser Wechsel aufgabenadäquat ist (adaptivity). Eine Möglichkeit, Adäquatheit zu definieren, besteht darin, den Referenzkontext zu betrachten – also der Frage nachzugehen, ob sich der oder die Lösende auf ein Verfahren oder auf Zahl- und Aufgabenbeziehungen stützt (s. die Nachfrage an Eva), die auf den wahrgenommenen Aufgabenmerkmalen basieren (Rathgeb-Schnierer & Green 2015). Flexibles Rechnen heißt also, Aufgaben auf der Basis von wahrgenommenen Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen im Kopf oder auf Notation gestützt zu lösen, wobei Basisfakten und strategische Werkzeuge eingesetzt werden (durchgezogene Linien, Abb. 3). Aufgabenadäquat heißt aber auch, Aufgaben dann schriftlich zu lösen, wenn die Aufgabenmerkmale dieses erfordern (gestrichelte Linie, Abb. 3).

Eva nimmt die Nähe der Neun zur Zehn wahr und nutzt die Beziehungen zwischen Nachbaraufgaben. Wir könnten also sagen, dass Eva zunächst verfahrensorientiert vorgeht, bis sie an einen Punkt kommt, bei dem sie ein Aufgabenmerkmal erkennt, dieses zum Lösen nutzt und das Abweichen vom bisherigen Lösungsweg – sie markiert das selbst deutlich dadurch, dass sie den Strich unter der Aufgabe durchstreicht – auf der Basis dieser wahrgenommenen Beziehungen begründet. Genau an dieser Stelle agiert Eva flexibel. Natürlich würden wir uns langfristig wünschen, dass sie dieses Merkmal bereits bei der Ursprungsaufgabe erkennen und nutzen würde. Ihr Lösungsweg kann aber als erster Schritt dorthin gesehen werden und als Ausgangspunkt

dienen, ihren Blick für Zahl- und Aufgabenbeziehungen (vgl. Kap. 1.2) weiterzuentwickeln.

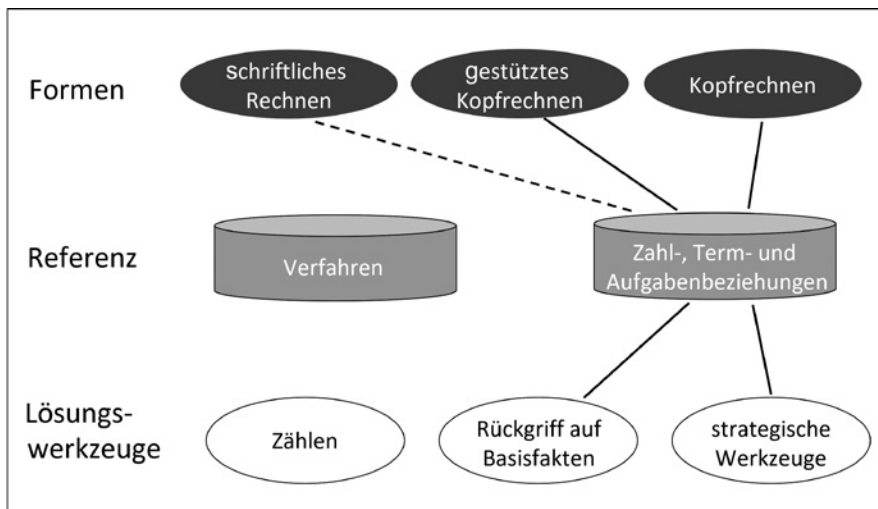


Abb. 3: Ebenen beim Analysieren von Lösungswegen – flexibles Rechnen

Wovon hängen flexible Rechenwege bei Kindern ab?

Die Wahl des Rechenwegs hängt offenbar davon ab, welche Zahl- und Aufgabenmerkmale Kinder wahrnehmen (Blöte et al. 2001, Rathgeb-Schnierer 2006a). Dies wird bei Eva sehr deutlich. Zunächst erkennt sie anscheinend keine besonderen Zahl- und Aufgabenmerkmale. Doch in dem Moment, in dem sie auf die Subtraktion der 9 stößt, sieht sie die Nähe zur 10 und nutzt diese schließlich auch im Löseprozess. Die Nähe zu einer Zehnerzahl war für sie bei der 19 noch nicht offensichtlich, weshalb sie hier die Nachbaraufgabe noch nicht nutzen konnte, obwohl sie dieses strategische Werkzeug offenbar kennt. Es wird deutlich, dass das Kennen strategischer Werkzeuge allein nicht ausreicht, sondern auch die Wahrnehmung der Aufgabenmerkmale zentral ist, um zu sehen, welches strategische Werkzeug hilfreich sein könnte (Rathgeb-Schnierer 2006a). Neben diesen Aspekten ist der Lösungsweg außerdem stark vom Lösungskontext abhängig, also beispielsweise davon, ob die Lösung schnell und unter Druck gefunden werden muss oder ob eine entspannte Atmosphäre beim Aufgabenlösen vorherrscht. Dabei zeigen sich auch individuelle Präferenzen bei den Kindern (ebd.). Wie Flexibilität im Unterricht kontinuierlich angeregt werden kann, betrachten wir in Kap. 1.2.

1.2 Flexibles Rechnen anregen – wie und ab wann?

Wenn flexibles Rechnen mit dem Wahrnehmen und dem Nutzen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen (Referenzkontext) verknüpft ist, bedeutet dies für die Förderung, dass dem Erkennen und Nutzen von Zahl- und Aufgabenmerkmalen bei der Entwicklung strategischer Werkzeuge eine zentrale Rolle zukommt.

Bereits Menninger (1940) weist darauf hin, wie wichtig der Zahlenblick für geschicktes Rechnen ist.

„Diese Faustregel lehrt dich, die Zahlen vor dem Rechnen **a n z u s c h a u e n**, und das ist das Wichtigste, wenn du ein guter Rechner werden willst! Aber wie wenige tun das! Sie gehen blindlings auf die Zahlen los, fahren ihre Kanonen genau so gut gegen Zahlenelefanten auf wie gegen Zahlenmäuschen, die sie, wenn sie nur **s e h e n** wollten, im Nu erledigten. Nur der lernt vorteilhaft rechnen, der diesen Zahlenblick entwickelt.“ (Menninger 1940, S. 10 f.; Hervorhebungen im Original)

Unter Zahlenblick verstehen wir im eigentlichen Sinne des Wortes einen Blick für Zahlen (Rathgeb-Schnierer 2008). Schütte (2002, 2008) stellt dabei das Wahrnehmen und das augenblickliche Nutzen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen im Löseprozess in den Mittelpunkt.

Wie kann der Zahlenblick geschult werden?

Während Menninger (1940) die Kinder ermahnt, sich die Zahlen und Aufgaben vor dem Rechnen anzuschauen, entwickelt Schütte (2002) Aktivitäten, die so aufgebaut sind, dass sie den Rechendrang aufhalten und stattdessen den Blick auf Beziehungen und Zusammenhänge richten. Dies gelingt, indem diese Aktivitäten auf Tätigkeiten wie das (strukturierende) Sehen, das Sortieren oder das Strukturieren abzielen (Rechtsteiner-Merz 2013).

In Abb. 4 ist ein Modell zur Zahlenblickschulung dargestellt. Es umfasst die genannten Tätigkeiten und sowohl die Aufgabe der Lehrperson als auch die der anderen Kinder, eine Reflexion der ausgeführten Tätigkeiten anzuregen. Mit der Entwicklung des Zahlenblicks geht auch das Entwickeln metakognitiver Kompetenzen einher. Wie auf der linken Seite im Modell zu sehen ist (Abb. 4), beziehen sich die genannten Tätigkeiten in Kombination mit kognitiv anregenden Fragen auf alle arithmetischen Inhalte der Grundschule (und darüber hinaus). Es wird deutlich, dass die Zahlenblickschulung als grundlegende Konzeption gedacht ist, die sich durch die gesamte Grundschulzeit zieht, wobei die verschiedenen Aktivitäten einerseits aufeinander aufbauen und sich andererseits auch wechselseitig ablösen, teilweise überlappend (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner 2018a, Schütte 2002).

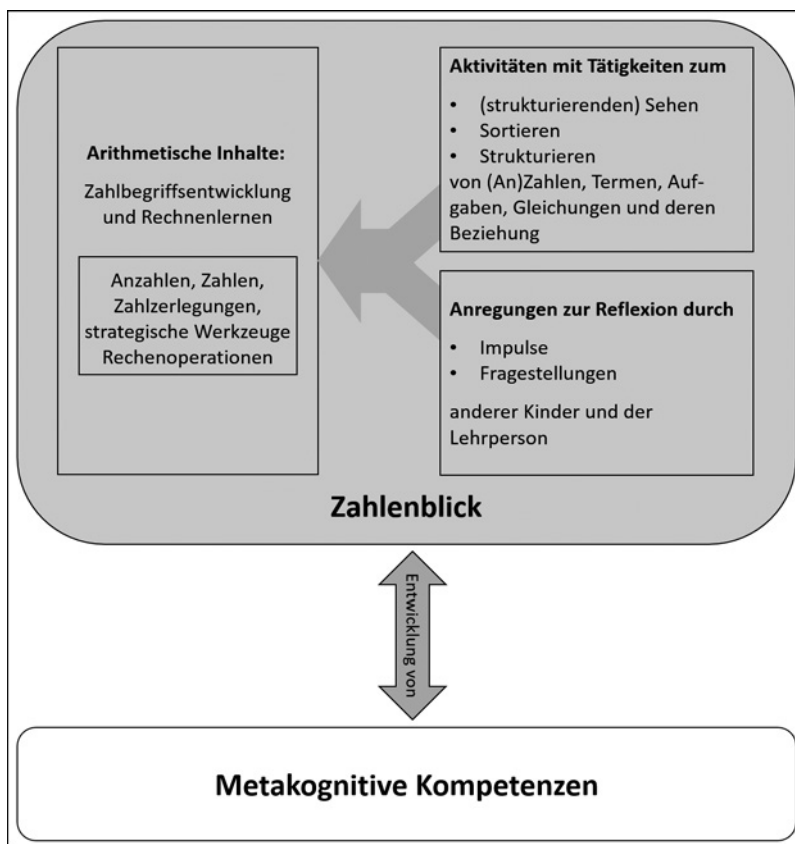


Abb. 4: Modell zur Zahlenblickschulung (Rechtsteiner & Scheffknecht 2023, S. 4; modifiziert nach Rechtsteiner-Merz 2013, S. 103)

Wie im Modell beschrieben, ist die Auseinandersetzung mit den Inhalten stets mit Aufforderungen zum (strukturierenden) Sehen, zum Sortieren oder zum Strukturieren verknüpft, wodurch der Rechendrang aufgehalten wird. Neben diesen Tätigkeiten spielen aber auch die Impulse der Lehrkraft eine zentrale Rolle. Durch Fragen wie „Bist du sicher?“, „Warum passen die Zahlen/Aufgaben zusammen?“, „Hilft dir eine der Aufgaben beim Lösen einer anderen?“ etc. werden die Kinder immer wieder aufgefordert, sich die Aufgaben und deren mögliche Beziehungen gezielt anzuschauen, um dann ggf. das Entdeckte zum Lösen zu nutzen.

Diese Art der Auseinandersetzung mit Inhalten regt die Kinder kontinuierlich zum Nachdenken über den eigenen Lösungsweg, über Alternativen dazu oder über den Weg von anderen an. Dieses Nachdenken fördert zum einen

die Entwicklung allgemeinerer – algebraischer – Sichtweisen und zum anderen die Entwicklung metakognitiver Kompetenzen (Abb. 4).

Ein Beispiel

Wie eine solche Aktivität aussehen kann, möchten wir an einem Beispiel zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum 100 zeigen, bei der die folgende Problemstellung im Mittelpunkt steht: Was passiert eigentlich, wenn ...? (Rathgeb-Schnierer 2004). Die Kinder werden aufgefordert zu untersuchen, was mit dem Ergebnis passiert, wenn die Einer bei einer Additions- bzw. einer Subtraktionsaufgabe getauscht werden, wenn also beispielsweise aus der Aufgabe $36 + 58$ die Aufgabe $38 + 56$ gebildet und analog dazu aus der Aufgabe $72 - 48$ die Aufgabe $78 - 42$ wird. Die Aktivität spricht einen Inhalt an, der viele Kinder herausfordert: die Kommutativität der Addition, die nicht auf die Subtraktion übertragbar ist. Zunächst geht es darum, die Struktur der Aufgaben zu analysieren und Hypothesen aufzustellen (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner 2018a, S. 201 ff.). Während des Austausches im Plenum können folgende Fragen und Impulse zur weiteren Vertiefung anregen:

- Was verändert sich zwischen den Aufgaben? Was hat diese Veränderung mit dem Ergebnis zu tun? Warum ist das so?
- Treffen eure Entdeckungen bei allen Subtraktionsaufgaben (bei allen Additionsaufgaben) zu? Ist das immer so? Warum?
- Worauf muss man also beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben achten?

Mit Aufforderungen zum (strukturierenden) Sehen und zum reflektierten Erproben in Verbindung mit den vorgestellten Impulsen regen Sie als Lehrkraft einen diskursiven Austausch an und ermöglichen den Lernenden ein zunehmend allgemeineres Verständnis der Zusammenhänge (Götze 2019, vgl. Kap. 3.7). In der Auseinandersetzung reflektieren die Kinder ihr Denken, vergleichen dieses mit ihren bisherigen Erkenntnissen und entwickeln daraus Schlüsse für ihr künftiges Handeln.

Aber können das alle Kinder oder ist das eher etwas für Leistungsstarke? Und wann beginnen wir damit?

Betrachten wir die Zahlbegriffsentwicklung vom Kindergarten in die Grundschule, so weisen verschiedene Studien (u. a. Lüken 2012, Mulligan et al. 2006, Wijns et al. 2021) darauf hin, dass mit der Entwicklung eines flexiblen Zahlverständnisses in Verbindung mit einer breiten inhaltlichen Auseinandersetzung mit Zahlen die Entwicklung eines Musterverständnisses einhergehen sollte (vgl. Kap. 2.1, 2.2, 2.3). Dies gilt ebenso für die Ablösung vom Zählen im Zahlenraum bis 10 und 20: Zusammen mit den inhaltlichen Herausforderungen – Zahlbegriffsentwicklung und Verständnis für die Rechenoperationen

nen aufbauen – muss auch die Wahrnehmung von Beziehungen und Strukturen entwickelt werden (Rechtsteiner-Merz 2013) (vgl. Kap. 4.3). Vor diesem Hintergrund ist es zentral, dass die Kinder von Beginn an, aber auch über die gesamte Grundschulzeit hinweg (Körner 2024) angeregt werden, den Blick auf Zahl- und Aufgabeneigenschaften zu richten und sich darüber mit ihren Mitschüler:innen und Ihnen als Lehrkraft auszutauschen. Da Sie hierbei die Expertin sind, können Sie diesen Blick durch gezielte Fragen und Impulse weiten und weiterentwickeln (vgl. Kap. 3.7). Gerade Kinder mit Schwierigkeiten beim Rechnenlernen benötigen hierbei eine kontinuierliche Anregung durch Aktivitäten, die den Zähl- bzw. Rechendrang aufhalten und dadurch den Blick auch auf beziehungsorientierte Merkmale lenken, die auch zunehmend verallgemeinert werden können (Rechtsteiner & Scheffknecht 2023).

Studien machen deutlich, dass leistungsstarke Kinder ganz unabhängig vom Unterricht flexible Rechenkompetenzen entwickeln. Kinder mit durchschnittlichen mathematischen Kompetenzen benötigen hierfür einen guten Unterricht (Heinze et al. 2009, Torbeyns et al. 2009) und Kinder, die besondere Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen, benötigen gezielte Anregungen für die Ablösung vom Zählen und damit verbunden natürlich auch für die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen (u. a. Rechtsteiner-Merz 2013).

Die Schulung des Zahlenblicks erweist sich als eine Grundkonzeption, die flexibles Rechnen nachhaltig unterstützt (u. a. Rathgeb-Schnierer 2006a, Körner 2024). Das bedeutet, dass Kinder auch über die Einführung der schriftlichen Rechenverfahren hinaus, auf der Grundlage wahrgenommener Zahl- und Aufgabenmerkmale Lösungswege aufgabenadäquat nutzen (Grüßing et al. 2013, Körner 2024). Körner (2024) hat in ihrer Studie die Lernprozesse von Kindern einer Klasse untersucht, die über die gesamte Grundschulzeit hinweg mit Aktivitäten zur Zahlenblickschulung unterrichtet wurden (vgl. Kap. 3.3). Sie konnte u. a. zeigen, dass die Kinder ihre flexiblen Vorgehensweisen kontinuierlich weiterentwickeln und sich keine Unterschiede zwischen der Addition und Subtraktion zeigen, was in anderen Studien häufig moniert wird (Wartha et al. 2023).

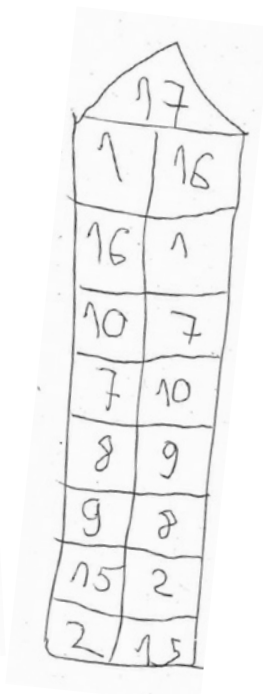
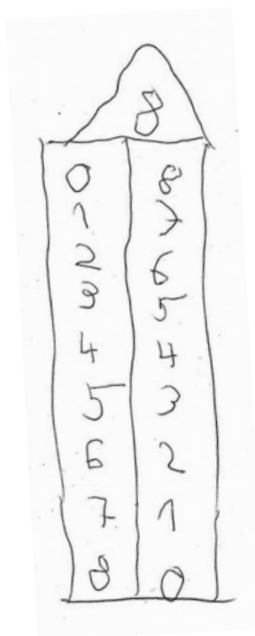
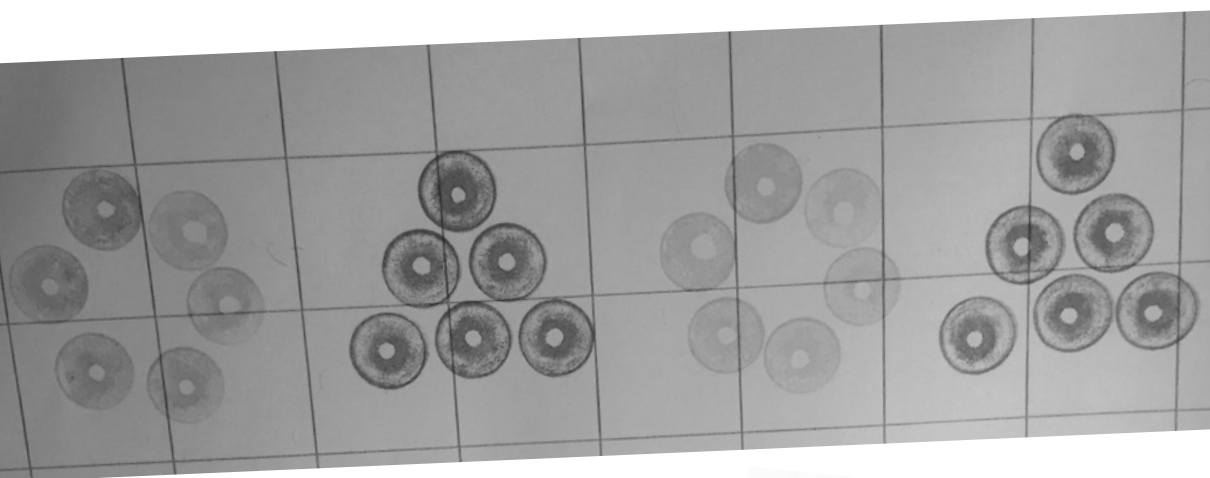
Wir wissen also, dass das Wahrnehmen von Zahl- und Aufgabenmerkmalen Rechenwege im Löseprozess beeinflussen kann (s. Eva) und Kinder ihre Denkwege dabei nicht zwingend notieren (Schütte 2004).

Die Wahrnehmung von Beziehungen erweist sich sowohl für die Entwicklung flexiblen Rechnens als auch für die Ablösung vom Zählen und damit für das Rechnenlernen in Klasse 1 als zentral. Vor diesem Hintergrund sind die in diesem Buch vorgestellten Erkenntnisse und Praxisbeispiele zu verstehen. Der Aufbau flexibler Rechenkompetenzen ist also keine Kür für leistungsstarke Kinder, sondern stellt vielmehr die Entwicklung einer Basiskompetenz für alle Kinder von Beginn an dar.

2 Flexibles Zahlverständnis – in Kindergarten und Grundschule

„Der langfristige Aufbau flexibler Rechenkompetenzen beginnt mit dem Aufbau eines fundierten Zahlverständnisses [...]“

(Rathgeb-Schnierer et al. 2023, S. 182)



Charlotte Rechtsteiner

2.0 Theoretische Hintergründe zur Zahlbegriffsentwicklung

Im Folgenden wird ein Überblick über die Erfahrungen gegeben, zu denen Kinder auf dem Weg zu einem flexiblen und umfassenden Zahlbegriff angeregt werden sollten. Dabei wird zum einen skizziert, wie sich der Zahlbegriff bereits vor und im Kindergarten entwickelt, zum anderen, wie dieser in der Schule vertieft werden kann und wie die verschiedenen Erfahrungsbereiche zusammenhängen.

Die Entwicklung des Zahlbegriffs beginnt bereits sehr früh. Säuglingsstudien legen nahe, dass wir schon mit der Fähigkeit des Subitizing, also kleine Mengen auf einen Blick erfassen und unterscheiden zu können, auf die Welt kommen (u. a. Antell & Keating 1983). Mit dem Sprechenlernen entwickelt sich im frühen Kindesalter auch die Fähigkeit, zählen zu können, zunächst vielleicht nur „1, 2, viele“, später auch weiter. Zu Beginn gelingt dies nur lückenhaft und ohne feste Reihenfolge, danach vollständig bis zehn (u. a. Fuson & Hall 1983, Krajewski 2008). Damit verbunden ist, Anzahlen abzählend erfassen zu können. Das ist aber erst der Einstieg in den Entwicklungsprozess hin zu einem flexiblen und umfassenden Zahlbegriff. Bereits im Zahlenraum bis zehn kommen weitere Teilbereiche, wie das Zerlegen von Anzahlen oder das Verorten von Zahlen am leeren Zahlenstrahl, dazu, ab dem Zahlenraum bis 100 dann auch das Stellenwertverständnis (Abb. 1).

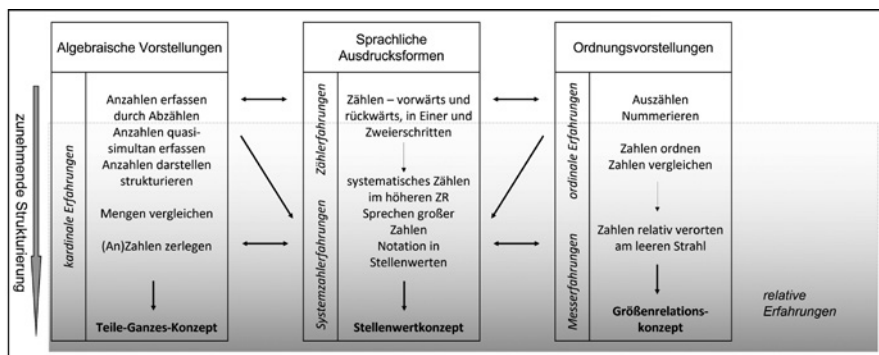


Abb. 1: Stränge der Zahlbegriffsentwicklung (modifiziert nach Rechtsteiner-Merz 2013, S. 58)

Auch wenn in der Grundschule die Zahlbegriffsentwicklung mit der Million abgeschlossen ist, endet der Prozess der Entwicklung von Zahlvorstellungen aber noch lange nicht! Schließlich werden in der Sekundarstufe neben den natürlichen Zahlen noch weitere Zahlbereiche, wie die negativen und rationalen Zahlen (Kap. 3.6), die reellen und eventuell sogar im Studium noch die komplexen Zahlen, erschlossen.

Egal in welchem Zahlbereich und in welchem Zahlenraum wir uns befinden, es geht immer darum, in diesen einzutauchen und ihn zu verstehen. Dafür bedarf es verschiedener Erfahrungen innerhalb der unterschiedlichen Aspekte, die eine Zahl ausmachen. Schauen wir uns also einmal die natürlichen Zahlen und deren mögliche Funktionen an.

In welchen Funktionen begegnen uns natürliche Zahlen?

In unserem Umfeld finden wir Zahlen häufig als Kodierzahlen, beispielsweise als Telefonnummern oder PINs. Außerdem nutzen wir sie oft im Kontext von Größenangaben wie z. B. 5 €, 7 Jahre, 3 kg oder natürlich zum Rechnen. Auch für Nummerierungen von Trikots beim Sport oder bei Postfächern werden Zahlen genutzt. Diese beschreiben nicht die Anzahl, sondern die Reihenfolge von Objekten. Das zeigt sich u. a. auf dem Fußballplatz, wenn ein:e Spieler:in das Trikot mit der 15 trägt, obwohl höchstens 11 Spieler:innen einer Mannschaft auf dem Platz stehen dürfen. Aber natürlich begegnen uns Zahlen auch im Sinne von Anzahlen. Und schließlich ist da noch die Verwendung der Zahlen für das rein verbale Zählen.

Welche dieser Funktionen von Zahlen sind nun für die Entwicklung eines flexiblen, umfassenden Zahlbegriffs wichtig? Und wie kann dies erreicht werden?

Während der Kodierzahlaspekt mathematisch betrachtet keine Rolle für die Zahlbegriffsentwicklung spielt, weil die für eine Kodierung genutzten Ziffernfolgen nicht als Zahlen im eigentlichen Sinne anzusehen sind, sondern als Namen (Padberg & Benz 2021), nimmt neben den anderen Zahlaspekten, die beim Aufbau von Zahlverständnis im Mittelpunkt stehen, die Entwicklung von Größenvorstellungen einen gesonderten Raum im Mathematikunterricht ein (u. a. Reuter & Schuler 2023).

Für die Entwicklung eines flexiblen und umfassenden Zahlbegriffs lassen sich drei Stränge unterscheiden, die kontinuierlich bereits im Kindergarten und über alle Schuljahre hinweg angeregt werden müssen, sich gegenseitig ergänzen und teilweise miteinander verwoben sind: die Entwicklung eines Teile-Ganzes-Konzepts, eines Größenrelationskonzepts sowie eines Stellenwertkonzepts (Abb. 1). Die Anordnung im Schaubild verdeutlicht sowohl die Hierarchie innerhalb der verschiedenen Aspekte als auch die Beziehungen

zwischen diesen. Am Beispiel der Entwicklung eines tragfähigen Stellenwertkonzepts wird die Verknüpfung der drei Stränge gut sichtbar: So ist dafür kardinales Bündeln, gleichmäßiges Ordnen, relatives Verorten der Ankerzahlen 1, 10, 100 etc. in verschiedenen Intervallen immer auch in Verbindung mit dem Sprechen der großen Zahlen und der Notation in der Stellenwerttabelle nötig (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner 2018a, S. 89).

Für die Entwicklung algebraischer Vorstellungen, auf dem Weg zu einem vertieften Teile-Ganzes-Konzept, stehen Terme und deren Umformungen sowie ihre Nachbarbeziehungen im Mittelpunkt. Dazu gehören beispielsweise „andere Namen“ für die Zahlen 9 und 50, wie $6 + 3$ und $5 + 4$ oder auch $36 + 14$ und $35 + 15$. Ebenso können Beziehungen zwischen Termen betrachtet werden, wie zwischen $7 + 9$ und $7 + 10$. Für die Entwicklung dieser Vorstellungen sind zunächst in den verschiedenen Zahlenräumen jeweils kardinale Erfahrungen mit realen Objekten zentral. Diese münden auf dem Weg zum Rechnen zunehmend in mentale Vorstellungen.

Im Vergleich zu den algebraischen Vorstellungen, bei denen Terme und ihre Beziehungen im Mittelpunkt stehen, fokussieren Ordnungsvorstellungen ganze Zahlenräume und gliedern sie. Während dies zunächst durch Nummerieren und Ordnen geschieht, kommen zunehmend relative Verortungen auf dem Weg zum Größenrelationskonzept ins Spiel. Der Gedanke, dass jede Zahl ihren festen Platz in der Zahlwortreihe hat, wird nun durch die Vorstellung erweitert, dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Zahlen immer gleich groß ist. Beim Verorten von Zahlen am leeren Strahl ist dies zentral.

Der Strang der sprachlichen Ausdrucksformen stellt das verbale Zählen und später das rhythmische Zählen, Sprechen und Notieren von Zahlen im Stellenwertsystem in den Mittelpunkt. Dieser Strang verbindet die beiden äußeren Stränge und bildet gleichzeitig die Basis für diese.

Für die Entwicklung eines flexiblen, umfassenden Zahlbegriffs spielen Erfahrungen in allen drei Strängen und zwischen diesen ebenso eine Rolle wie ein systematischer, kumulativer Aufbau einzelner Bausteine innerhalb der Stränge (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner 2018a).

Die nachfolgenden Beiträge beschreiben die Entwicklung eines flexiblen umfassenden Zahlbegriffs mit dem Fokus auf die *kardinalen Vorstellungen*. Dabei wird deutlich, wie diese bereits im Kindergarten gezielt angeregt werden können (Kap. 2.1), am Übergang zur Schule eine zentrale Rolle spielen (Kap. 2.2) und wie sie sich dort systematisch weiter ausdifferenzieren lassen (Kap. 2.3). In Kapitel 2.4 steht schließlich das Schätzen von Anzahlen im Mittelpunkt, das in allen Zahlenräumen einen wichtigen Erfahrungsbereich darstellt.

Julia Böhringer & Dorothea Hertling

2.1 Flexibles Rechnen anbahnen – bereits im Kindergarten?

Flexibles Rechnen und frühe mathematische Bildung – wie passt das zusammen? Wird das schulische Mathematiklernen mit diesem Gedanken in frühkindliche Einrichtungen vorverlagert und eine Verschulung des Kindergartens angestrebt? Keinesfalls! Es geht nicht um eine Vorverlegung schulischer Lerninhalte in den Kindergarten, sondern vielmehr darum, wesentliche mathematische Lerninhalte bewusst zu machen und in Form kindgemäßer (Spiel-)Aktivitäten in den Kindergarten zu integrieren. Auf diese Weise können bestmögliche Voraussetzungen für schulisches Lernen geschaffen werden. Der Beitrag greift theoretische Grundlagen auf und zeigt, wie das Regelspiel *Schüttelbecher* die Anbahnung eines flexiblen Zahl- und Musterverständnisses unterstützt.

2.1.1 Frühe mathematische Bildung

Um Kindern bestmögliche Voraussetzungen für das schulische Lernen auf den Weg mitzugeben, ist eine frühe mathematische Förderung sowohl sinnvoll als auch notwendig (z. B. Biedinger & Becker 2006, Ginsburg & Ertle 2008, Krajewski & Schneider 2009). Inzwischen herrscht eine breite Einigkeit über die große Relevanz früher mathematischer Bildung im Kindergarten. Welche Inhalte und Tätigkeiten sind mit Blick auf die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen in der Grundschule bereits in der frühen mathematischen Bildung von besonderer Bedeutung?

Bereiche früher mathematischer Bildung

Für eine an das schulische Lernen anschlussfähige frühe mathematische Bildung sollte sich diese an den Bildungsstandards der Grundschule der KMK (2022) orientieren (z. B. Benz et al. 2015, Heinze & Grüßing 2009, Rathgeb-Schnierer 2015, Steinweg 2008). Damit sind die folgenden drei Bereiche für die frühe mathematische Bildung gleichermaßen relevant (Rathgeb-Schnierer 2012, 2015):

- (1) *inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen* aus den Bereichen Zahlen und Operationen, Messen und Größen, Raum und Form sowie Daten und Zufall,
- (2) *allgemeine mathematische Kompetenzen*, die auf mathematische Prozes-