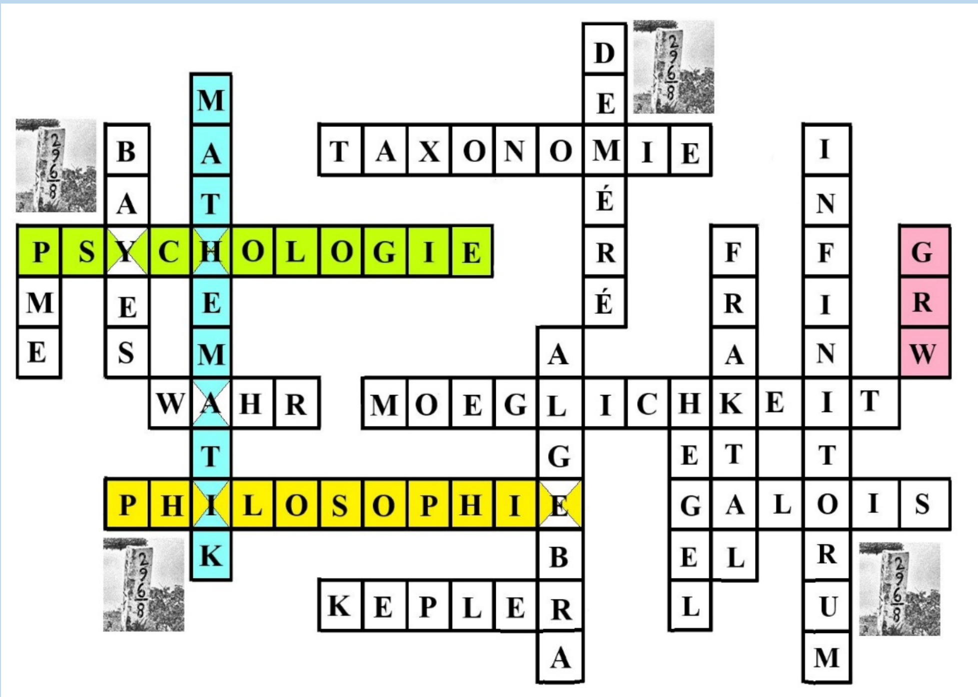
Karl Josef Fuchs

Das Genetische und Bezugswissenschaftliche Prinzip



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Karl Josef Fuchs

Das Genetische und Bezugswissenschaftliche Prinzip

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über https://dnb.de abrufbar.

Münster 2024 – E-Book
ISBN 978-3-95987-292-8
https://doi.org/10.37626/GA9783959872928.0

Vorwort

Das Buch ist als Reflexion meiner beruflichen Laufbahn, nachdem ich am 1. Oktober 2022 als außerordentlicher Universitätsprofessor an der Paris-Lodron Universität in den Ruhestand versetzt wurde, entstanden.

Nach Abschluss des Lehramts für Höhere Schulen an der Universität Salzburg unterrichtete ich von 1982/83 bis 2002/03 die Fächer Mathematik, Informatik, Geometrisches Zeichnen, Psychologie und Philosophie als Gymnasiallehrer am Gymnasium in Hallein bei Salzburg. Bereits damals erlebte ich wie die Schülerinnen und Schüler durch die Behandlung historischer Meilensteine der Mathematik besonders motiviert waren.

Bei der anschließenden Lehre aus Didaktik der Mathematik und Informatik an der Universität nutzte ich die reichhaltigen Beziehungen meiner Unterrichtsfächer gewinnbringend aus. Vor allem den Beziehungen von Mathematik, Geometrisch Zeichnen und Informatik zu Philosophie, Psychologie und Erziehungswissenschaft galt mein besonderes Augenmerk.

Ich wünsche viel Freude beim Lesen des Textes und hoffe, dass ich mit diesem Buch einige Anregungen für die Gestaltung Ihres Unterrichts vermitteln kann.

Karl Josef Fuchs, Prof. im Ruhestand Salzburg, 2024

Inhaltsverzeichnis

1. Fachdidaktische Prinzipien

Folgen wir den Darstellungen von Kristina Reiss und Christoph Hammer (2013), so sind Fachdidaktische Prinzipien „… *zunächst einmal ganz grundsätzliche Ideen darüber, wie Mathematik vermittelt werden kann. Unterrichtet man im Einklang mit einem didaktischen Prinzip, dann hat man damit ein gewisses Gerüst. … Man darf didaktische Prinzipien keinesfalls als Rezepte oder gar Dogmen für den Unterricht ansehen. Sie sind auch nicht in Wertesysteme eingebunden, die sich möglichst noch hierarchisch anordnen lassen. Manchmal widerspricht auch ein Prinzip einem anderen, das ähnlich plausibel klingt*. …“ (Reiss & Hammer 2013, S. 65ff).

Bei der nachfolgenden Liste an Fachdidaktischen Prinzipien orientieren wir uns an den von Karl Josef Fuchs und Claudio Landerer in ihrer „DIDAKTIK UND METHODIK DER MATHEMATIK UND INFORMATIK“ (2021) in Kapitel 2 präsentierten FACHDIDAKTISCHEN Prinzipien.

Diskutiert werden in diesem Buch das Konzept der *Fundamentalen Ideen* sowie in Kapitel 3 das *Spiralprinzip* als aus den Fundamentalen Ideen abgeleitetes Unterrichtsprinzip. Es folgen das *Prinzip der Multiplen Repräsentation*, das *Operative* und *Exemplarische Prinzip*.

Beim *Genetischen Prinzip* und der in Kapitel 3 daraus abgeleiteten *Genetischen Methode* konzentrieren wir uns in diesem Buch bei den Charakteristika des *Genetischen Prinzips* auf das *Historisch – Genetische Prinzip* unter folgenden Gesichtspunkten.

Historische Vorläufer – Blick auf die Sachlage der jeweiligen Situation (Möller 2001): Stellvertretend für diese Betrachtungsweise stehen bekannte Zitate von John Dewey und Heinrich Roth:

> Ausgangspunkt eines solchen Lernens – gemeint ist ein genetisch-historisches Lernen – ist stets irgendeine gegenwärtige Sachlage mit ihren Problemen. (Dewey 1993, S. 283ff)
>
> Alle methodische Kunst liegt darin beschlossen, tote Sachverhalte in lebendige Handlungen umzuwandeln, aus denen sie entsprungen sind: Gegenstände in Erfindungen und Entdeckungen, Werke in Schöpfungen und Pläne in Sorgen, Verträge in Beschlüsse, Lösungen in Aufgaben, Phänomene und Urphänomenen (Roth 1970, S. 116).

Mit der Trennung des *Organisch - Genetischen* vom *Historisch - Genetischen* betont Johann Heinrich Pestalozzi, dass bei dieser Betrachtungsweise „ … *keines-*

wegs alle historischen Umwege, Krümmungen und Verirrungen durchlaufen werden müssen, um zur Wahrheit und Selbständigkeit zu gelangen …“ (Pestalozzi 1979, S. 135 zitiert nach Möller 2001, S.16).

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts zeigte der deutsche Mathematiker Otto Töplitz (1881-1940) besonderes Interesse an der Didaktik der Mathematik. Bereits 1927 engagierte er sich für einen *historisch–genetischen Aufbau* der Infinitesimalrechnung in seiner Publikation „Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und deren Abgrenzung gegenüber der Differentialrechnung an den höheren Schulen“ (1947).

Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen.[2])

Von OTTO TOEPLITZ in Kiel.

Und von da aus würde sich dann ein doppelter Weg in die Praxis darbieten: entweder man konnte den Studenten direkt die Entdeckung in ihrer ganzen Dramatik vorführen und solcherart die Fragestellungen, Begriffe und Tatsachen vor ihnen entstehen lassen - das würde ich die *direkte genetische Methode* nennen -, oder man konnte für sich selbst aus solcher historischer Analyse lernen, was der eigentliche Sinn, der wirkliche Kern jedes Begriffs ist, und könnte daraus Folgerungen für das Lehren dieses Begriffs ziehen, die als solche nichts mehr mit der Historie zu tun haben - die *indirekte genetische Methode*.

„*… Dieses Schlagwort (*Historische Methode*) ist, nicht ohne Grund, unbeliebt; am Historischen haftet die Idee vom alten Zopf, den wir doch gerade abschneiden wollen, von den Umwegen, die die Forschung oft durchlauft, von der Subjektivität und Zufälligkeit der Entstehung wissenschaftlicher Entdeckungen. Es ist mir besonders wichtig, den Trennungsstrich nach dieser Seite zu ziehen. Der Historiker, auch der der Mathematik, hat die Aufgabe, alles Gewesene, zu registrieren, ob es gut war oder schlecht. Ich will aus der Historie nur die Motive für die Dinge, die sich hernach bewahrt haben, herausgreifen und will sie direkt oder indirekt verwerten …*“ (Töplitz 1927, S. 93, 94 – zitiert aus Wittmann 1974, S. 100, 101).

Genetisch – sokratische – exemplarische (thematische) Betrachtungsweise im Sinne von Martin Wagenschein (1992)

- **Individual – genetisch**, d.h. Entstehung der Erkenntnis im Individuuum,
- **Logisch – genetisch**, d.h. Darstellung bezogen auf ein Lehrgebiet,

- **Historisch – genetisch**, d.h. Unterrichtsgestaltung unter Berücksichtigung historischer Entwicklungen. (Köhnlein 1988) Historisch – genetische Bezüge, d.h. das Herstellen von historischen Bezügen führt …
    - … zu erhöhter Lernmotivation und gesteigerten Interesse der Lernenden,
    - … durch das Herstellen von Alltagsbezügen zu einem anknüpfungsfähigen Wissen.

Weitere verschiedene Gesichtspunkte des *Historisch – Genetischen Prinzips* finden wir in der Publikation von Sebastian Schorcht (2012).

Er verweist zunächst auf eine Formulierung der *Historisch – Genetischen Methode* von Friedrich Wilhelm Lindner aus dem 18. und 19. Jahrhundert.

Zum Terminus „Historisch“ schreibt Lindner:

> […] daß aber diese Wissenschaft […] zuerst geübt würde, wenn auch nicht als solche, dieß würde ich die historische Methode nennen; beide vereinigt die historisch – genetische (Lindner 1808, S. 22).

Beim Terminus „Genetisch“ folgt Lindner der zuvor bereits genannten logisch – genetischen Stoffstrukturierung.

> Ich muss wissen, ob der Punct, oder die Linie, oder das Dreyeck oder das Viereck, der Kreis, oder die Ellipse zuerst oder zuletzt erfolgt […], d.h. es müßte gezeigt werden, inwiefern jede vorhergehende Figur oder Form der Grund der anzureihenden wäre; […]. Dies […] würde die genetische Methode seyn; […] [Hervorhebung im Original] (ebda)

Schorcht setzt mit der *Genetisch – sokratischen – exemplarischen (thematischen) Methode* im Sinne von Martin Wagenschein, die ebenfalls bereits dargestellt wurde, fort.

Es folgt die *Historisch – hermeneutische Methode*, die Michael Glaubitz wie folgt charakterisiert:

> [Sie …] bezeichnet […] die Lehre und Tätigkeit des interpretativen und evaluativen Verstehens, Auslegens oder Deutens sinnhaltiger (von Menschen hervorgebrachter) Zeichen (Glaubitz 2010, S. 57).

Die *Historisch – hermeneutische Methode* verwendet demnach historische Quellen als Interpretationsgrundlage.

Den Abschluss der Betrachtungsweisen formuliert Schorcht als *Potential für Aufgaben*. Historische Aufgaben erschließen sich dabei in vier Kategorien

- als *Einstiegsimpuls*
- als *Strukturierungsgrundlage* für alle Lerninhalte der Kultur
- als *Interpretationen* und
- als *Antworten* auf Betrachtungen des historischen Hintergrunds

Schorcht ergänzt diese Sichtweisen 2018 in einer „Typisierung mathematik-didaktischer Beispiele in deutschen Mathematikschulbüchern der Klassenstufen 1 bis 7“. Dabei analysiert er den Nutzen des *Historisch – genetischen Prinzips* nach drei Gesichtspunkten, nämlich

- nach der historisch – genetischen Methode,
- aus einer geschichtsdidaktischen Sicht sowie
- aus der Sicht eines allgemeinbildenden Mathenatikunterrichts. (Schorcht 2018)

In jüngeren Publikationen untersuchen etwa Kani BAŞIBÜYÜK und Ömer ŞAHIN in ihrem Beitrag „MATHEMATICS TEACHERS’ OPINION ABOUT THE HISTORY OF MATHEMATICS“ (2019) ein Meinungsbild von Lehrer(in-ne)n zum *Historisch-Genetischen Prinzip*.

Eingangs des papers präsentieren die Autoren das nachfolgende Modell über die zahlreichen Beiträge der Geschichte der Mathematik für den Unterricht.

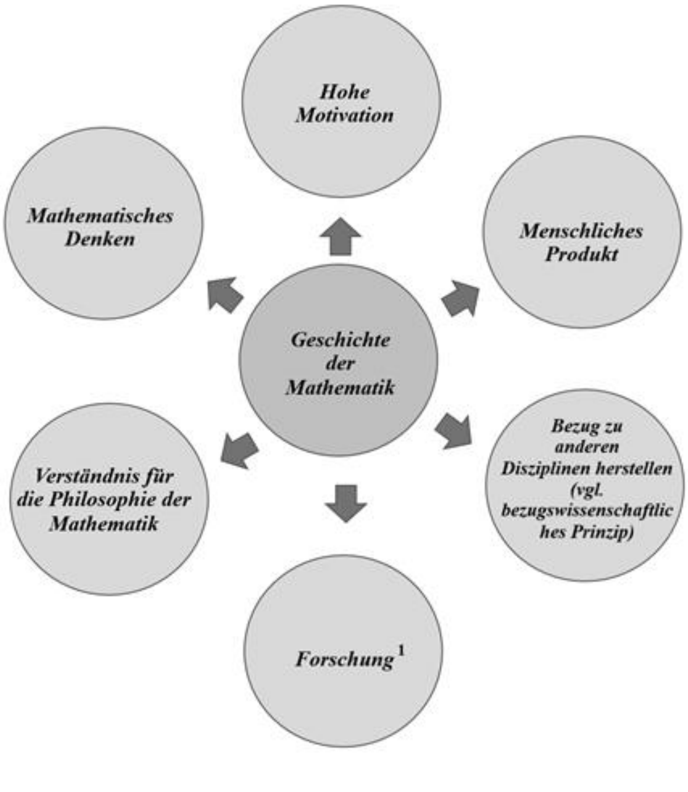


Abb. 1.1 nach BAŞIBÜYÜK & ŞAHIN (2019, S. 118)

In der Publikation “MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR TEACHING IN RELATION TO HISTORY IN MATHEMATICS EDUCATION” (2012) von Uffe Thomas Jankvist, Reidar Mosvold, Janne Fauskanger und Arne Jakobsenvon den Universitäten Roskilde und Stavanger finden wir ein theoretisches Modell von Deborath Loewenberg Ball, Mark Hoover Thames, und Geoffrey Phelps (2008, S. 403) für die mathematische und pädagogische Wissensbasis für das Lehren nach dem *Historisch - Genetischen Prinzip*.

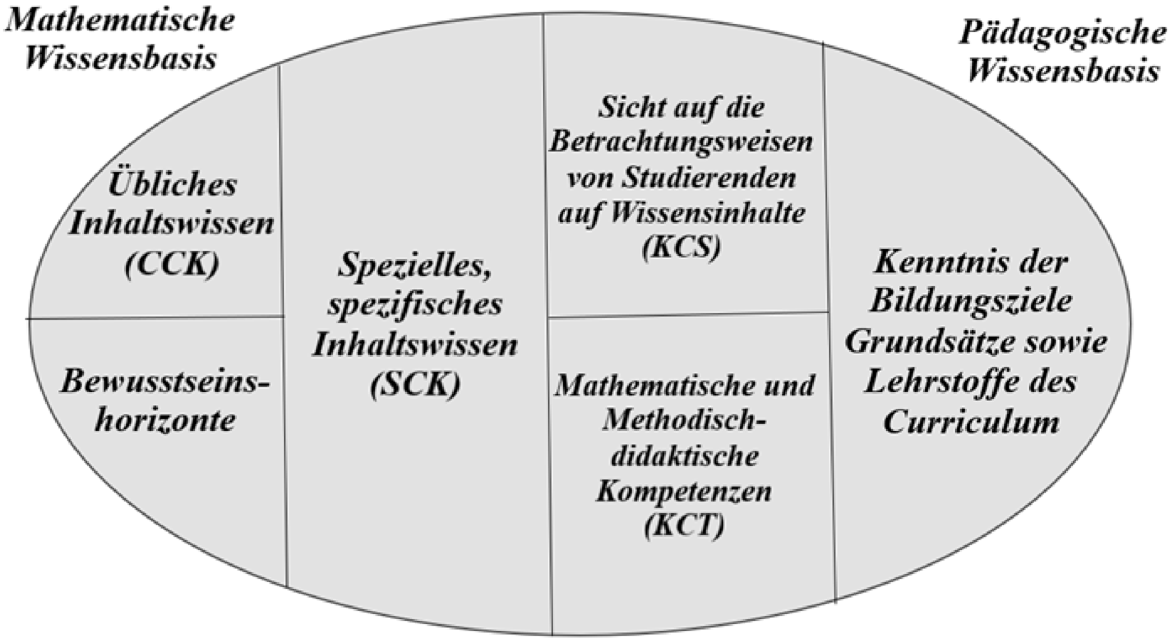


Abb. 1.2 nach Ball, Thames & Phelps (2008, S. 403)

Lim Siew Yee und Elaine Chapman berichten in ihrem Beitrag „USING HISTORY TO ENHANCE STUDENT LEARNING AND ATTITUDES IN SINGAPORE MATHEMATICS CLASSROOMS“ (2015) von den Einstellungen der Lernenden beim Einsatz des *Historisch - Genetischen Prinzips* beim Lehren von Mathematik. Folgende Zugänge wurden dabei gewählt:

- Anekdoten und Biographien über Mathematiker (Wilson & Chauvot, 2000)
- Diskussionen zur Motivation für die Entwicklung einzelner mathematischer Themen (Katz, 1993)
- Verwendung von Originalquellen (Jahnke, Arcavi, Barbin, Bekken, Dynikov, Furinghetti et al 2000)
- Unterrichten der Themen entsprechend deren Abfolge in der Geschichte (vgl. Längsschnitte im Bezugswissenschaftlichen Prinzip; Seltman & Seltman 1978)

Eine besondere Rolle kommt der Nutzung von Technologie im Rahmen des *Historisch - Genetischen Prinzips* zu. Andreas Schwill nennt die bedeutsame Berücksichtigung von historischen Aspekten *Zeitkriterium* in seiner Charakterisierung *Fundamentaler Ideen* der Informatik (Schwill 1993, S. 8). Die Berücksichtigung des *Zeitkriteriums* im Informatikunterricht liefert nämlich zum einen den Anhaltspunkt für Fundamentale Ideen, zum anderen zeigt die historische Beobachtung, dass Konzepte langfristig gültig bleiben. Schwill zitiert dazu Jürg Nievergelt:

> How do we recognize ideas of long lasting-value among the crowd of fads? The 'test of time' is the most obvious selector. Other things being equal, ideas that have impressed our predecessors are more likely to continue to impress our successors than our latest discoveries will (Nievergelt 1990, S. 5).

Die zahlreichen Beziehungen zur *Informatik* werden in den folgenden Kapiteln immer wieder angesprochen.

In einem engen Zusammenhang mit dem *Historisch - Genetischen Prinzip* steht das *Bezugswissenschaftliche Prinzip*, das wir in diesem Buch ebenfalls ausführlich diskutieren werden. Zum einen hat bereits 2012 Uffe Thomas Jankvist von der Roskilde Universität in seiner Publikation „HISTORY, APPLICATION, AND PHILOSOPHY OF MATHEMATICS IN MATHEMATICS EDUCATION: ACCESSING AND ASSESSING STUDENTS' OVERVIEW & JUDGMENT“ auf die Disziplinen der Mathematik, Philosophie, Pädagogik und Geschichte als Bezugswissenschaften zur Didaktik der Mathematik hingewiesen.

Zum anderen lassen sich etwa die Kerndisziplin der Mathematik sowie die *empirischen* B*ezugswissenschaften* der Psychologie, Pädagogik und Gesellschaftswissenschaften (GRW) aus zahlreichen Modellen zur Didaktik der Mathematik unmittelbar ableiten. Stellvertretend für diese Behauptung möchte ich das Modell von Erich C. Wittmann [1974] bzw. Karl Josef Fuchs und Hans-Stefan Siller [2009] anführen.

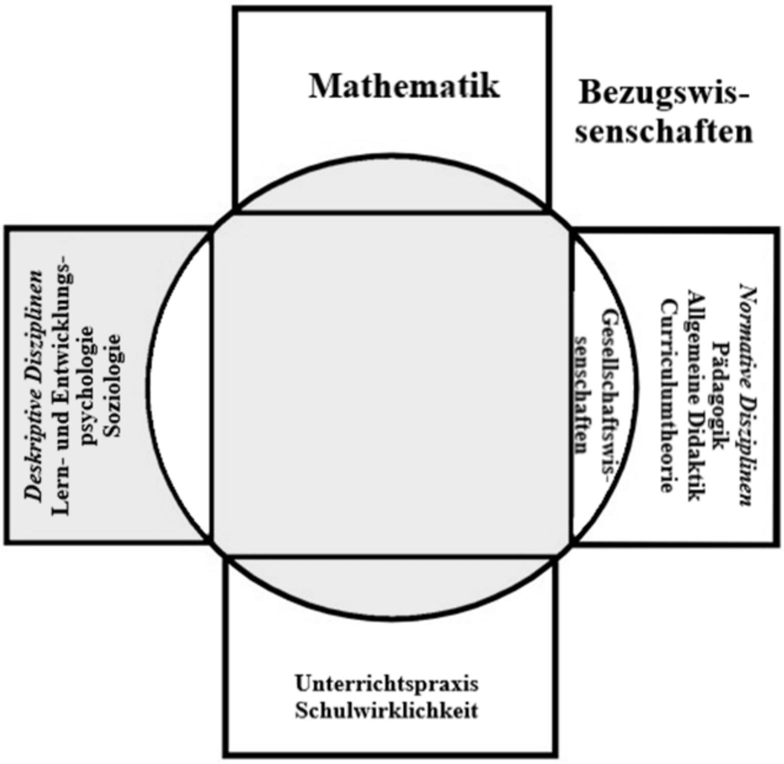


Abb. 1.3 Modell von Wittmann [1974, S. 2]

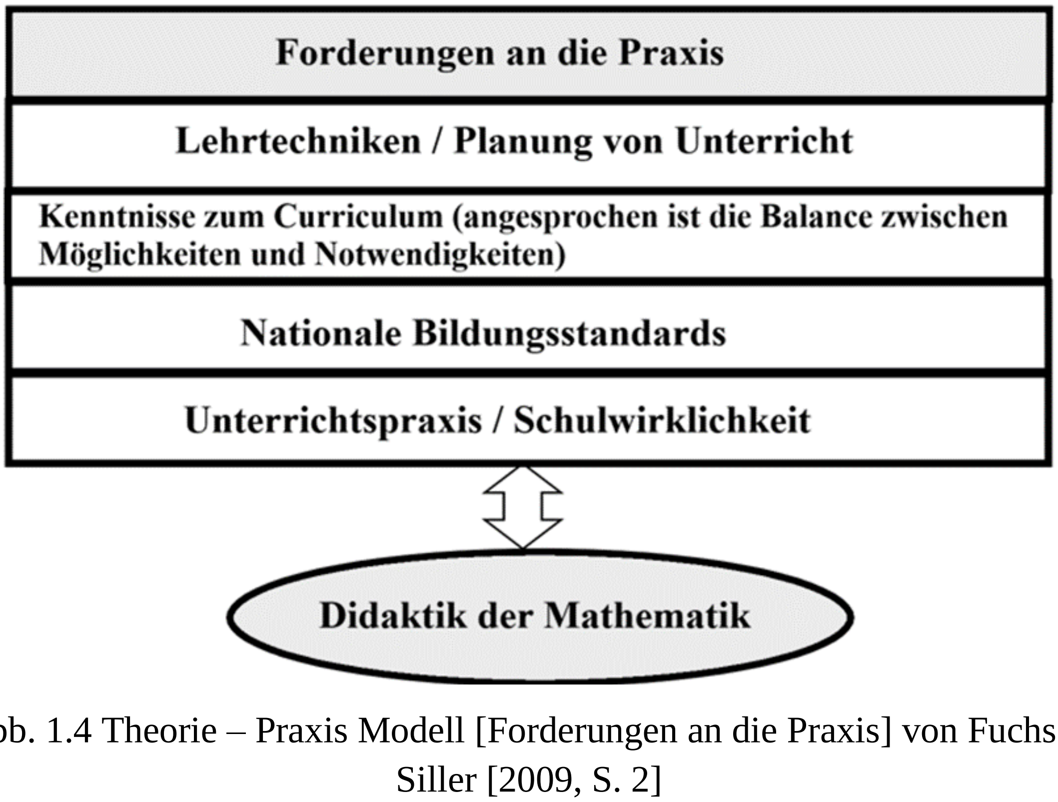


Abb. 1.4 Theorie – Praxis Modell [Forderungen an die Praxis] von Fuchs & Siller [2009, S. 2]

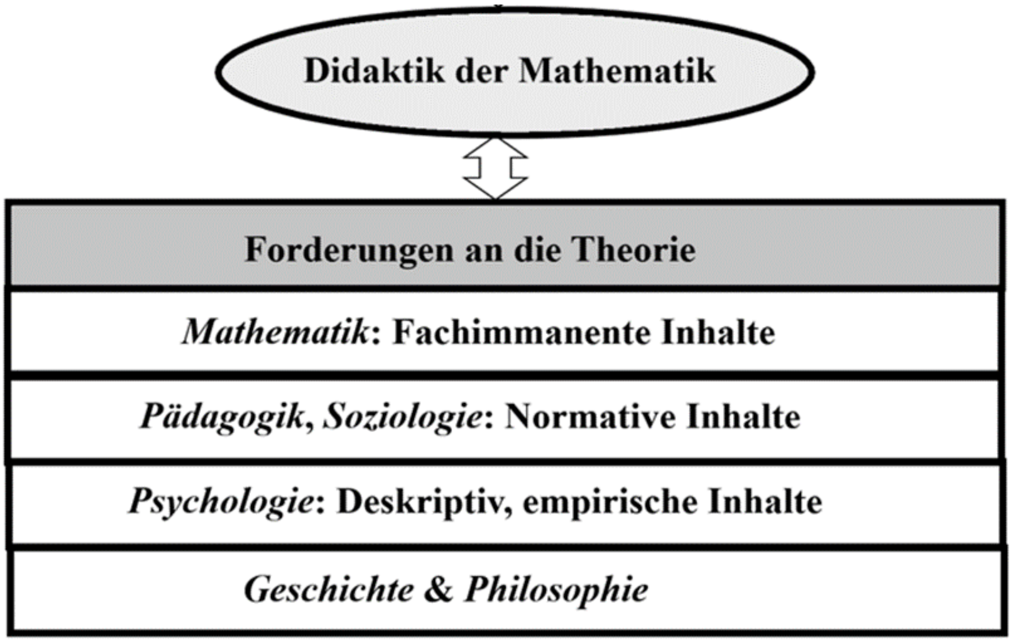


Abb. 1.5 Theorie – Praxis Modell [Forderungen an die Theorie] von Fuchs & Siller [2009, S. 2]

Als Zeitschriften, die auch für Beiträge aus den Bezugswissenschaften offen sind, wären exemplarisch das Journal für Mathematikdidaktik[1] oder die Mathematik im Unterricht[2] zu nennen.

Für die praktische Umsetzung der beiden Prinzipien bietet sich der *Fächerübergreifende Unterricht* (Fuchs & Landerer 2021, S. 131ff) an.

[1] Journal für Mathematik-Didaktik | Aims and scope (springer.com) (Aufruf: 1.3.2023)

[2] Mathematik im Unterricht / Thematische Ausrichtung (uni-salzburg.at) (Aufruf: 1.3.2023)

2. Das Historisch – Genetische Prinzip

In diesem Kapitel werden einige Meilensteine in der Geschichte der Mathematik präsentiert. Alle Abschnitte eingeteilt nach Stoffgebieten besitzen dieselbe Struktur, nämlich zunächst erfolgt die zeitliche Einordnung, danach werden einzelne Probleme und deren Repräsentant(inn)en diskutiert.

2.1 *Diskrete Mathematik und Algebra*

In diesem Abschnitt werden wir unsere Aufmerksamkeit auf Meilensteine der Zahlentheorie, Kombinatorik und Algebra richten. Die Auswahl der Meilensteine wird sich dabei beim Thema Zahlentheorie sowie bei Zahlen im Kontext der Kombinatorik nach den Büchern „NUMBERS“ (2015) von Alfred S. Posamentier und Bernd Thaller, „Diskrete Mathematik“ (2007) von Jiří Matoušek und Jaroslav Nešetřil sowie von Johann Linhart (1996). Beim Thema Algebra wird sich die Auswahl der Themen am Beitrag „Geschichte der Algebra – Eine Einführung“ (1990) von Erhard Scholz und Kirsti Andersen orientieren.

Die ersten Meilensteine des Bereichs *Zahlen* findet man bereits einige Jahrtausende vor Christi Geburt.

Erstmals bei den Babyloniern finden wir ein Stellenwertsystem. Basis dieses Stellenwertsystems war 60. Die Vermutung, dass die Wahl der Basis 60 mit den Untersuchungen der Positionen der Planeten, des Mondes sowie der Sonne zusammenhängen könnte, widersprach George Ifrah in seiner Publikation „Universal History of Numbers“ (1998). Darin lesen wir: „*… We speculate therefore that one of the two populations involved had a quinary counting system, and that in contact with a civilisation using base 12, the sexagesimal system was invented or chosen, since 5 x 12 = 60 …*” (Ifrah 1998, S. 94; Nissen, Damerow & Unglund 2010).

Die Bedeutung liegt vor allem darin, dass das Babylonische System ein Stellensystem war. Für die Ziffern wurden Keilsymbole, nämlich ein hochstehender Keil 𒁹 für 1 und ein Winkel 𒌋 für 10 verwendet. Damit konnte nun eine Tabelle für die Ziffern von 1 bis 59 erstellt werden. Die einzelnen Ziffern ergeben sich aus der Anzahl der Keilsymbole. Es fällt sofort auf, dass die Babylonier noch kein Symbol für die Null hatten.

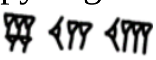
Zur Ermittlung der Darstellung der dekadischen Zahl 61723 im Babylonischen Zahlensystem $b_2 \cdot 60^2 + b_1 \cdot 60 + b_0$ ermitteln wir zunächst die Ziffern für einzelnen Stellen durch Division mit Rest $\{b_2 = 17,\ b_1 = 8, b_0 = 43\}$.

Wir erhalten: $61723 = 17 \cdot 60^2 + 8 \cdot 60^1 + 43$ $(\cdot\, 60^0)$ oder

Abbildung 2.1.1: Darstellung der dekadischen Zahl 61723 im Babylonischen Zahlensystem

Die Babylonier kannten auch Brüche und stellten sie in der Form $\frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v}$ dar. Da für einige Reziprokwerte im 60-er System – es wurden umfangreiche Tabellen für Reziprokwerte erstellt – allerdings keine endlichen Darstellungen existierten, wurden Näherungen wie etwa in der Weise $\frac{5}{7} = 5 \cdot \frac{1}{7} \approx 5 \cdot \frac{1}{8} = 5 \cdot \frac{450}{3600}$ mit $450 \cdot 60^{-2} = (7 \cdot 60^1 + 30) \cdot 60^{-2} = 7 \cdot 60^{-1} + 30 \cdot 60^{-2}$ ermittelt.
Quadratische und kubische Gleichungen waren bekannt. Zum Ermitteln der Lösung wurden ebenfalls Tabellen herangezogen (Vogel 2004).
Zudem formulierten die Babylonier bereits eine sehr gute Näherung für $\sqrt{2}$:

$$1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2\prime} + 10 \cdot 60^{-3} = 1{,}41421296$$

Bemerkenswert dabei ist, dass sie ihre Abschätzungen für $\sqrt{2}$ nachweisbar mit Hilfe der bekannten Iterationsformel ($a_2 = 0.5 \cdot (a_1 + \frac{2}{a_1})$) gewonnen haben. (Grandt 2022, S. 7)
Den Babyloniern waren auch bereits Tripel (a, b, c) mit der Eigenschaft $a^2 + b^2 = c^2$ bekannt. Erst Pythagoras formulierte im 6. Jahrhundert v. Chr. diesen Zusammenhang im Kontext des rechtwinkeligen Dreiecks (vgl. 2.2). Die Tripel mit der zuvor erwähnten Eigenschaft werden daher auch *Pythagoreische Tripel* genannt. (Damir 2021)
Die beiden australischen Wissenschaftler Daniel Mansfield und Nor-man Wildberger fanden eine altbabylonische Tontafel *Plimpton* 427, welche die pythagoreischen Tripel (3,4,5)  (8,15,17)  und (5,12,13)  enthielt.

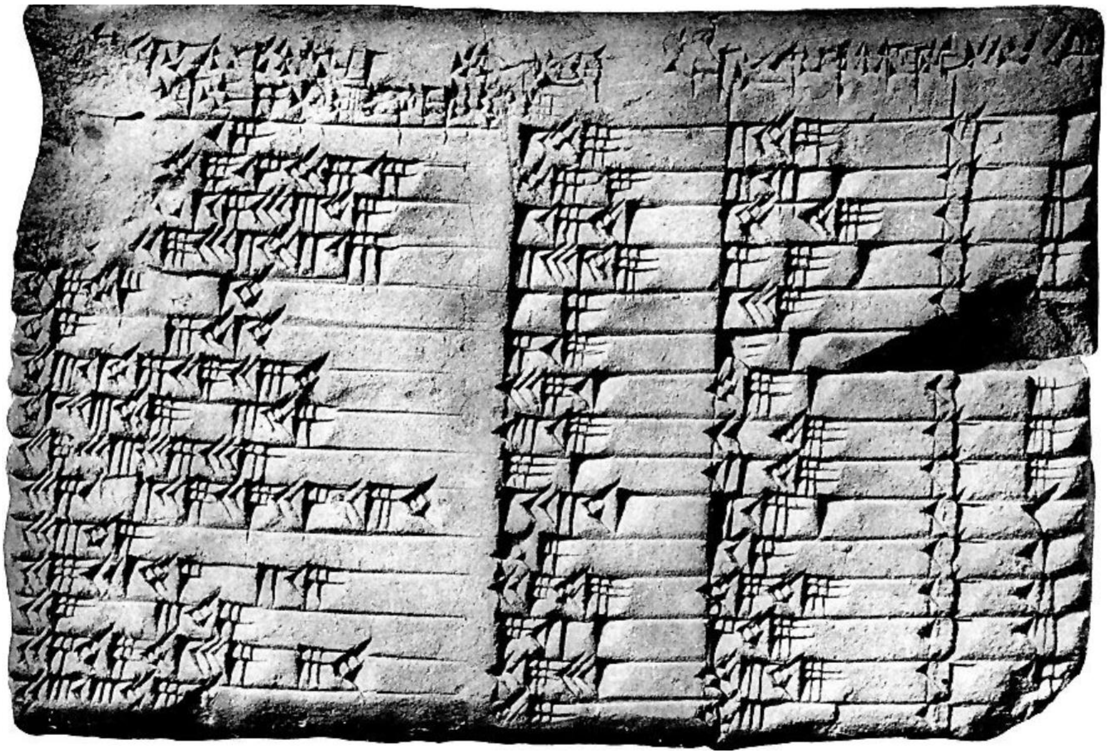


Abbildung 2.1.2: Tontafel *Plimpton* 427

Mansfield vermutet, dass diese Tontafel der Landvermessung gedient hat, indem er sagte

> „… *Es gibt Privatleute, die versuchen herauszufinden, wo ihre Grundstücksgrenzen liegen, genau wie wir es heute tun, und der Vermesser kommt heraus, aber anstatt GPS-Geräte zu verwenden, verwenden sie pythagoreische Tripel. Sobald Sie verstehen, was pythagoräische Tripel sind, hat Ihre Kultur ein gewisses Maß an mathematischer Raffinesse erreicht* ...“ (Damir 2021, S.2).

Nahezu zur selben Zeit in der in Mesopotamien das 60er System entstand, entwickelten die ägyptischen Mathematiker das erste dekadische Zahlensystem in der Geschichte (Posamentier & Thaller 2015, S. 83). Die Motive dazu waren ähnlich wie jene in Mesopotamien, Landvermessungen (vor allem Bewässerungskanäle nach den Nilüberflutungen) oder der Bau von Pyramiden und Tempeln, aber auch zur Berechnung von Löhnen und Steuern.

Im Besonderen ist das *Papyrus Rhind* aus dem zweiten vorchristlichen Jahrhundert zu nennen, das zahlreiche mathematische Probleme enthielt.

Der Text wurde Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts entschlüsselt. Dabei konnte die Struktur des dekadischen Zahlensystems sowie die Arithmetik als besondere Rechenkunst abgeleitet werden.

Raymond Clare Archibald, Arnold Buffum Chace unter Mitarbeit von Henry Parker Manning veröffentlichten im Jahr 1927 „THE RHIND MATHEMA-

TICAL PAPYRUS – VOLUME 1“ und gliederten die Inhalte nach *Ägyptischer Arithmetik, Maßeinheiten, Geometrie* sowie *Methoden und Zielsetzungen Ägyptischer Mathematiker* (Archibald, Chace & Manning 1927).
Das ägyptische Zahlensystem ist ein dekadisches Zahlensystem (nachfolgend die Hieroglyphen für die Zehnerpotenzen):

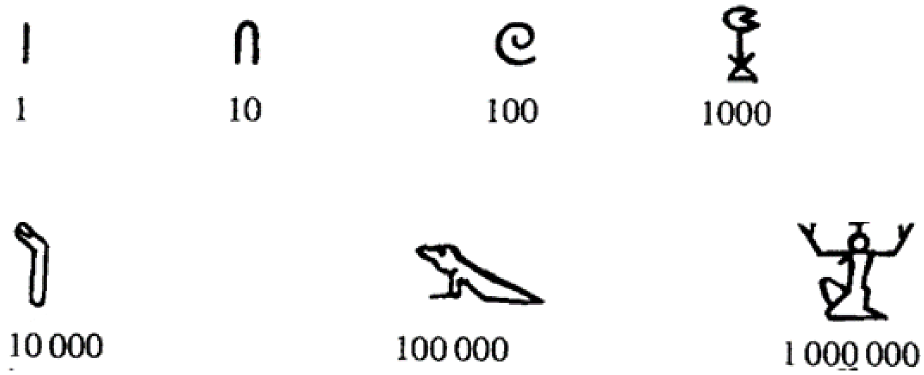


Abbildung 2.1.3: Hieroglyphen für die Zehnerpotenzen

Durch die Aneinanderreihung entsprechenden Anzahl passender Hieroglypthen erhalten wir die Darstellung einer Zahl im ägyptischen Zahlensystem.
So erhalten wir für $3311 = 3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 60^0$ oder

Abbildung 2.1.4: Darstellung der dekadischen Zahl 3311

Beispielhaft wollen wir in diesem System auch noch eine Addition sowie eine Multiplikation zweier Zahlen durchführen. Dazu sammeln wir Hieroglypthen einer Klasse, bewerten sie neu und fügen sie unterhalb an:
So erhalten wir für die Addition $11712 + 12511 = 24223$:

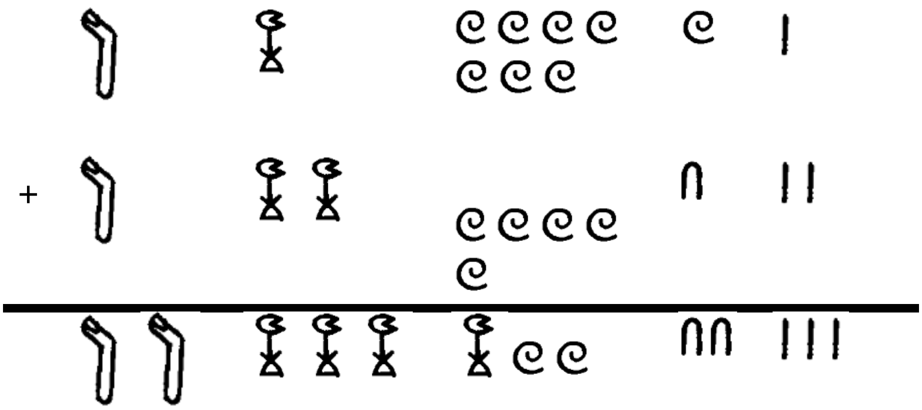


Abbildung 2.1.5: Addition $11712 + 12511$

Die Multiplikation können wir als mehrfache Addition ausführen. Mit der Darstellung folgen wir im Wesentlichen Alfred Posamentier und Bernd Thaller (2015).
So erhalten wir für die Multiplikation $24 \cdot 12 = 288$ ($4 \cdot 12 + 20 \cdot 12 = 288 = 4 \cdot 12 + (16 + 4) \cdot 12$).

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a \cdot 12}$	Darstellung im ägyptischen Zahlensystem	
1	**12**	𓎆𓏺𓏺	
2	**24**	𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺	
4	**48**	𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	✓✓
8	**96**	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	
16	**192**	𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺	✓

𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺
𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺
𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺
= 𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺

Abbildung 2.1.6: Addition $24 \cdot 12$

Zwei Zahlen, nämlich den *irrationalen Quadratwurzeln aus zwei. drei* und *fünf* sowie der *Kreiszahl* π galt das Interesse der Mathematiker in den vorchristlichen Jahrhunderten.
Die Näherung der Babylonier für $\sqrt{2}$ haben wir bereits kennengelernt.
Kurt Vogel berichtet in seinem Beitrag „Vorgriechische Mathematik, Teil 1: Vorgeschichte und Ägypten“ (1958) vom Umgang der Ägypter für das Bestimmen des Flächeninhalts eines Kreises. Dazu schrieben sie (38. Problem im *Papyrus Rhind*) einem Quadrat einen Kreis ein.

Zur Ermittlung des Flächeninhalts des Kreises wurde das Ausgangsquadrat in neun kleine Teilquadrate zerlegt. Die Endpunkte wurden zu einem Achteck $ABCDEFGH$ verbunden.

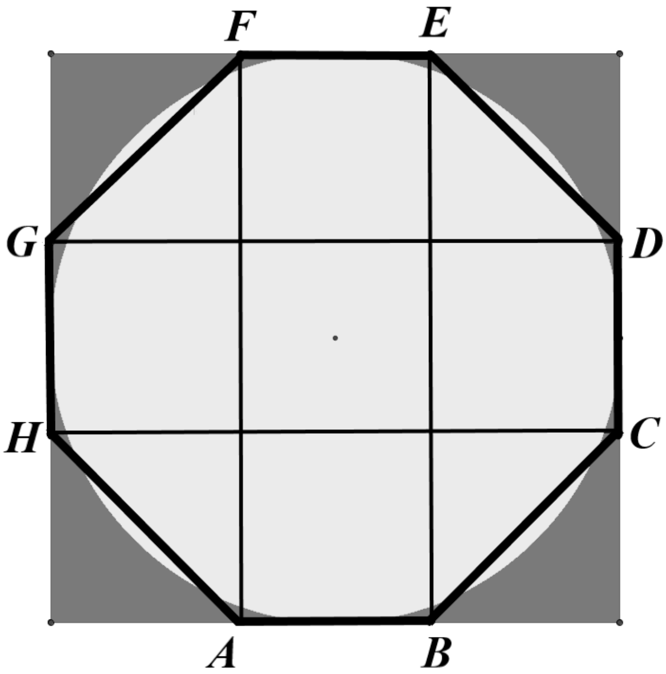


Abbildung 2.1.7: Zerlegung Ausgangsquadrat

Als Näherung für die Kreisfläche wurde nun die Fläche von sieben Teilquadraten genommen. Da das Ausgangquadrat eine Seitenlänge ($\overline{CH} = \overline{DG}$) von neun Längeneinheiten besaß, hatte jedes Teilquadrat somit eine Seitenlänge von drei Einheiten. Als Maß für die Fläche der sieben Teilquadrate erhalten wir $7 \cdot 9 = 63$ Flächeneinheiten. Da laut Abbildung 2.1.7 der Flächeninhalt des Kreises A_{Kreis} sicher kleiner als der Flächeninhalt des Ausgangsquadrats ist, werden im *Papyrus Rhind* $A_{Quadrat} = 8 \cdot 8 = 64$ Flächeneinheiten für das Ausgangsquadrat angenommen.

Setzt man nun den Näherungswert in die Formel für den Flächeninhalt des Kreises $A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$ ein. d. h. $\left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot \pi \approx 8^2$, so erhält man als Näherung für die Kreiszahl $\pi \approx \frac{8^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \left(\frac{8}{\frac{9}{2}}\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3.16$

Im 6. Jahrhundert vor Christus verwendeten die Pythagoreer ein *Pentagramm* als Logo, das aus einem regelmäßigen Fünfeck entsteht (Abbildung 2.1.8).

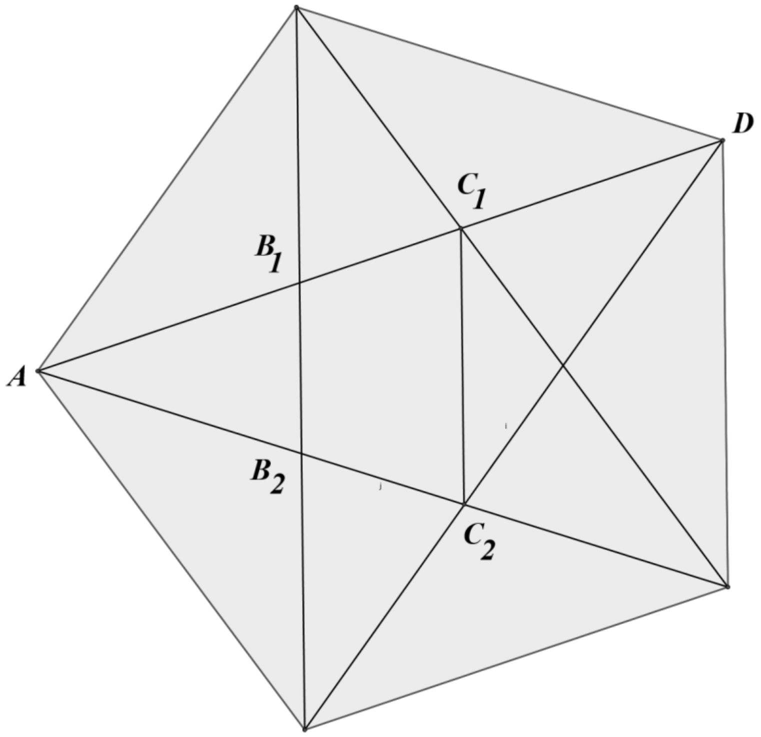
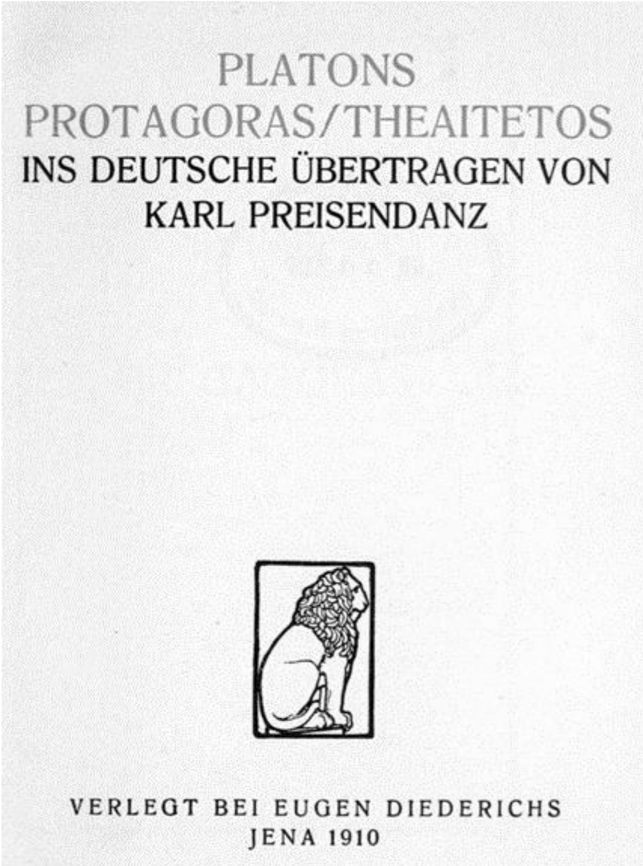


Abbildung 2.1.8: regelmäßiges Fünfeck und *Pentagramm*

Dabei stellten sie fest , dass die „ … *Die Strecken, die von Spitze zu Spitze führen, genau im Goldenen Schnitt schneiden* …“ (Beutelspacher 2001). Den Pythagoreern fiel es jedoch schwer zu akzeptieren, dass das Verhältnis der Gesamtstrecke $a + b$ zu ihrem *Major* (größere Teil) a gleich dem Verhältnis des größeren Teils zum kleineren Teil (*Minor* genannt) b, also $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, nicht *rational* war oder in der Sprache der Griechen *Nicht als Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellbar war*. Für das Pentagramm gilt $\overline{AD} = a + b$, $\overline{B_1D} = a$ und $\overline{C_1D} = b$.

Grund dafür war die in der Proportion $\phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ enthaltene Quadratwurzel aus fünf.

Etwas später im 4. Jahrhundert vor Christus geht es im Dialog *Theaitetos* um die Frage der Irrationalität von Wurzel aus drei bis zur Wurzel aus siebzehn (Preisendanz 1910, S. 104-266).


PLATONS
PROTAGORAS/THEAITETOS
INS DEUTSCHE ÜBERTRAGEN VON
KARL PREISENDANZ

VERLEGT BEI EUGEN DIEDERICHS
JENA 1910

Abbildung 2.1.9: *Platons Theaitetos*

Die Teilnehmer am Dialog sind von Platon vermutlich ganz bewusst gewählte reale Personen neben Sokrates, Theodoros (ein Mathematiker, der vermutlich den Pythagoreern angehörte), Theaitetos (ein junger Mathematiker, der Platons Akademie angehörte). Im Dialog stellt Theaitetos mit Verweis auf Theodoros fest:

> Von den Seiten der Vierecke zeichnete uns Theodoros etwas vor, indem er uns von der des dreifüßigen und fünffüßigen bewies, daß sie als Länge nicht meßbar wären durch die einfüßige. Und so ging er jede einzeln durch bis zur siebzehn füßigen; bei dieser hielt er inne. (Seek 2010)

Mit „dreifüßig“ (= dreibeinig) spricht Theaitetos wahrscheinlich das gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge a und einer Höhe $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$ an, womit das Problem der Quadratwurzel aus drei auftritt.

Mit „fünffüßíg“ (= fünfbeinig), dem regelmäßigen Fünfeck kann man vermuten, dass Theaitetos das zuvor dargestellte Problem der Pythagoreer mit der Quadratwurzel aus fünf im *Goldenen Schnitt*, meint.

Von Euklid schließlich ist uns ein Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzel aus zwei aus den „Elementen“ (vgl. 2.2) überliefert. Die Vorgangsweise ist dabei der bekannte indirekte Beweis, bei dem die Annahme $\sqrt{2}$ sei *rational* zu einem Widerspruch, d.h. *ad absurdum*, geführt wird. (Fitzpatrick & Heiberg 2008)

Im 3. Jahrhundert vor Christus schlug der Grieche Archimedes (267-212) eine Näherung der Kreiszahl π durch ein- bzw. umgeschriebene Vielecke vor.

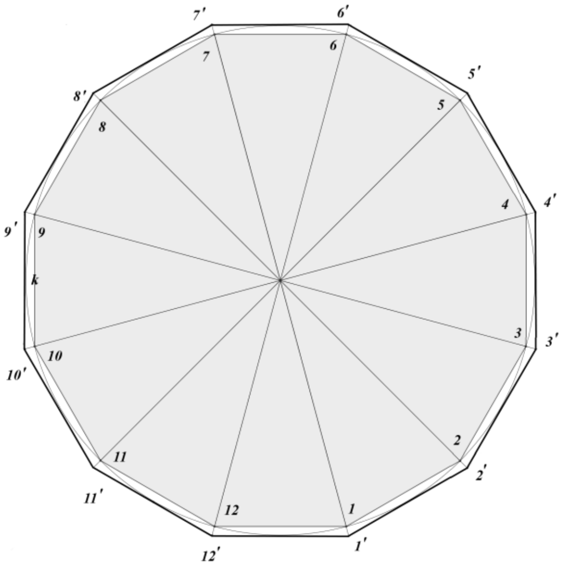


Abbildung 2.1.10: Näherung der Kreisfläche durch ein ein- bzw. umgeschriebenes 12-Eck

Es gilt: $U_{innen} < 2 \cdot r \cdot \pi < U_{außen}$

Für unsere 12-Ecke 1234567891011 bzw. 1‘2‘3‘4‘5‘6‘7‘8‘9‘10‘11‘12‘ erhalten wir für $U_{innen} = 72$ (Längeneinheiten) und für $U_{außen}$= 74,52 (Längeneinheiten).

Demnach können wir die Maße für die Längen gemäß obiger Abschätzung einsetzen und erhalten (nach Division durch $2 \cdot r$) die Ungleichung

$$3.106 < \pi < 3.214$$

Für die Zeit war das eine beachtliche Abschätzung.

Im 18. Jahrhundert wird uns der Begriff der *Potenzreihe* begegnen (vgl. 2.3.). Vor allem Leonhard Euler hat Potenzreihen zur Ermittlung von Näherungen für die Kreiszahl π genutzt.

Im 8. und 9. Jahrhundert nach Christus legte der persische Mathematiker Abu Jafar Mohammed ibn Musa Al-Khwarizmi – der Familienname Al-Khwarizmi ist

Namensgeber für die Handlungsanweisungen eines *Algorithmus* – mit seinem Werk „Al Kitab al-muhtasar fi hisab al-gabr w-al-muqabala" den Grundstein für eine moderne *Algebra* – die Bezeichnung Algebra wurde ebenso aus diesem Werk, nämlich aus der Bezeichnung al-ğabr (= **ergänzen**), abgleitet (Kronfellner 2020, S. 6ff).

Nachfolgend eine Strategie für das Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x = q$ durch **Ergänzen**.

Schritt 1: Wir zeichnen ein Quadrat mit der Seitenlänge x und fügen an jeder Seite Rechtecke mit der Länge x und der Breite $\frac{p}{4}$ an (Abbildung 2.1.5).

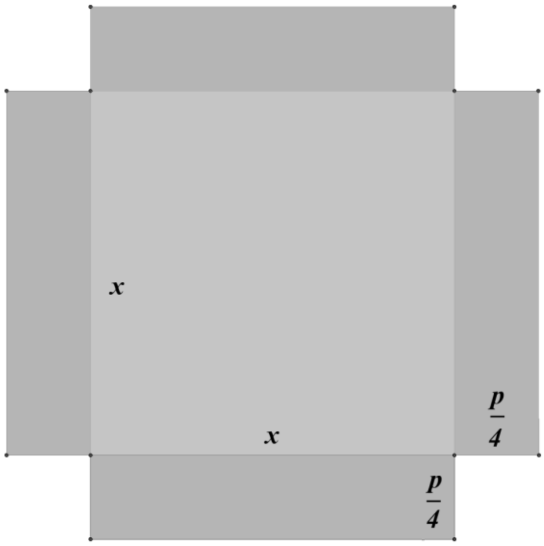


Abbildung 2.1.11: Quadrat mit Flächeninhalt $A_{Quadrat} = x^2$ und Rechteck mit Flächeninhalt $A_{Rechteck} = \frac{p}{4} \cdot x$

Für die Fläche des Netzes ($N_{Netz} = q$) aus dem Quadrat und den vier Rechtecken gilt also: $A_{Netz} = A_{Quadrat} + 4 \cdot A_{Rechteck} = x^2 + 4 \cdot \frac{p}{4} \cdot x = x^2 + p \cdot x = q$.

Schritt 2 (**Ergänzen**): Dazu ergänzen wir das Netz durch die Einfügung von vier Quadraten mit einer Seitenlänge von q.

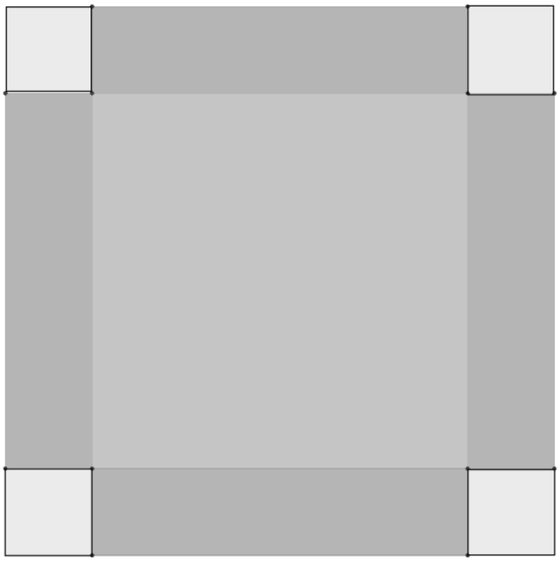


Abbildung 2.1.12: Netz und Einfügung von vier Quadraten mit Seitenlänge $\frac{p}{4}$

Der neue Flächeninhalt errechnet sich demnach als $4 \cdot \frac{p^2}{16} + A_{Netz} = 4 \cdot \frac{p^2}{16} + q = \frac{p^2}{4} + q = \left(x + 2 \cdot \frac{p}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$. Die positive Seitenlänge $x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ mit $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} > \frac{p}{2}$ ist Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x = q$.

Am nächsten bedeutenden Meilenstein im Bereich *Zahlen* treffen wir Leonardo von Pisa alias Fibonacci (1170-1250). Mit seinem berühmten Kaninchenproblem gilt der italienische Mathematiker auch als Urvater der *Kombinatorik*:

> Jemand sperrt ein neu geborenes Kaninchenpaar in ein überall mit einer Mauer umgebenes Gehege, um zu erfahren, wie viele Nachkommen dieses Paar innerhalb eines Jahres haben werde, vorausgesetzt, dass es in der Natur der Kaninchen liege, dass sie im Alter von zwei Monaten fortpflanzungsfähig werden und pro Monat ein Paar zur Welt bringen... (Kunz 2022)

Die Antworten (*Zahlen*) zum Kaninchenproblem stellen wir im Folgenden für die ersten sieben Monate in einem Baum dar:

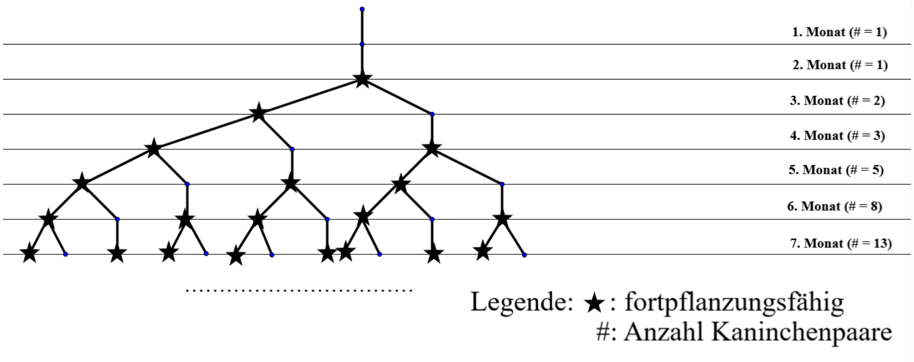


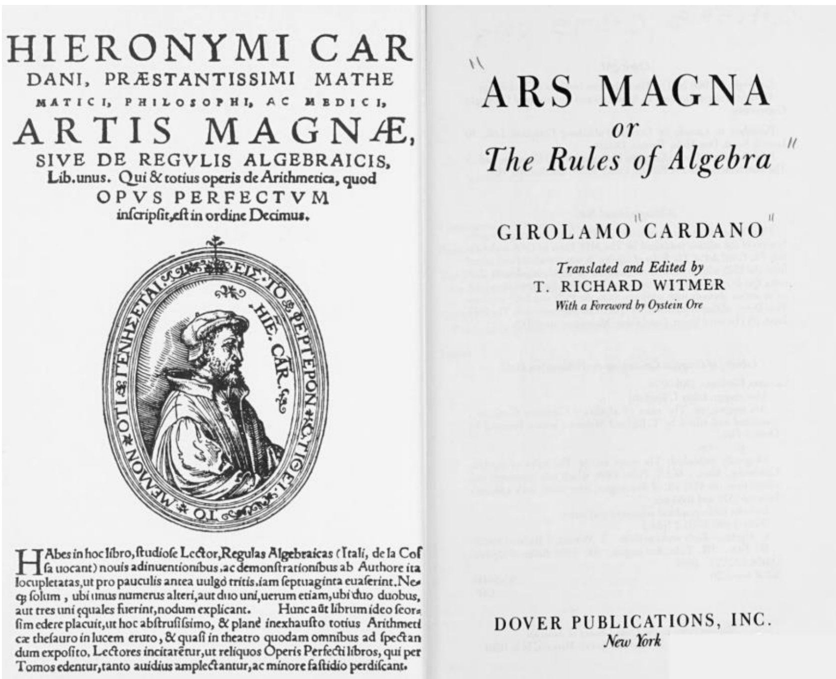
Abbildung 2.1.13: Fibonaccis *Kaninchenproblem*

Die bei # genannten Zahlen {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …} werden auch *Fibonacci Zahlen* genannt. Für die n-beliebigen Fibonacci Zahlen, die wir im Folgenden mit f_n bezeichnen, kann eine Rekursionsvorschrift angegeben werden:

$$f_1 = f_2 = 1, f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \text{ für } n \in \mathbb{N}: n \geq 3$$

Ein weiterer Meilenstein in der Geschichte der *Algebra* ist die Lösung der kubischen Gleichung durch den italienischen Mathematiker Gerolamo Cardano, auch Geronimo oder Girolamo Cardano von Mailand (1501-1576) genannt.

Wir wollen nachfolgend seine Strategie für die Lösung des Typs „Ein Kubus und Unbekannte sind gleich einer Zahl", d.h. $x^3 + a \cdot x = b$, die Cardano in Kapitel XI seiner „ars magna" (1993) löst und aus dem sich im Wesentlichen alle anderen Typen der kubischen Gleichungen ableiten lassen, nachzeichnen.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

ARS MAGNA
or
The Rules of Algebra

GIROLAMO CARDANO

Translated and Edited by
T. RICHARD WITMER
With a Foreword by Oystein Ore

DOVER PUBLICATIONS, INC.
New York

Abbildung 2.1.14: Cardanos *Ars Magna*

Cardano geht dabei strategisch ähnlich wie Al-Khwarizmi – wie zuvor dargestellt – vor. Er spaltet dazu die Variable *x* in zwei Variablen *u* und *v* mit $x = u - v$, um damit die Gleichheit von $(u-v)^3 + 3 \cdot u \cdot v \cdot (u-v)$ mit $u^3 - v^3$ durch die nachfolgenden geometrischen Betrachtungen zu begründen.

Er zerlegt dazu einen Würfel mit der Kantenlänge u in die erforderlichen Teilobjekte (zwei Würfel und drei Quader) mit den Volumina $(u-v)^3$, v^3 sowie $3 \cdot u \cdot v \cdot (u-v)$.

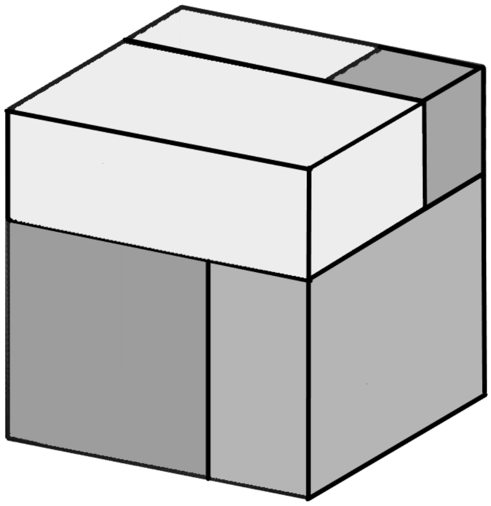


Abbildung 2.1.15: Würfel mit Kantenlänge *u* [GEOGEBRA]

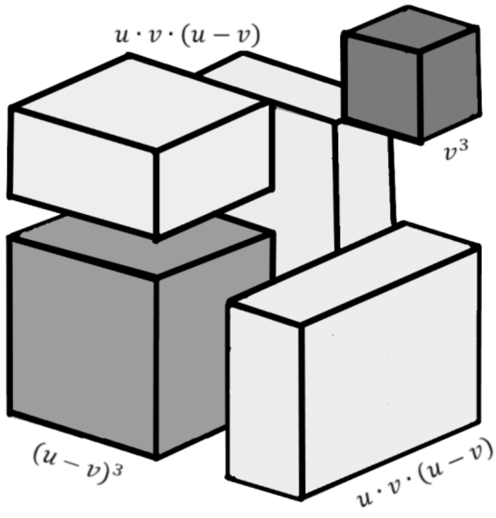


Abbildung 2.1.16: Explosionszeichnung: Würfel mit Kantenlänge *u* [GEOGEBRA]

Abbildung 2.1.13 entnehmen wir $(u-v)^3 + 3 \cdot u \cdot v \cdot (u-v) = u^3 - v^3$. Für den Typ unserer kubischen Gleichung gelten demnach die beiden Gleichungen:

(i) $3 \cdot u \cdot v = a$

(ii) $u^3 - v^3 = b$

Lösen wir anschließend das Gleichungssystem, um *u* und *v* und damit die Lösung $x = u - v$, zu bestimmen.
Dazu dividieren wir (i) zunächst auf beiden Seiten durch 3, potenzieren anschließend die Gleichung $u \cdot v = \frac{a}{3}$ mit 3 und multiplizieren den Ausdruck anschließend mit 4. Wir erhalten
(i‘) $4 \cdot u^3 \cdot v^3 = 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3$,
Danach quadrieren wir die zweite Gleichung und erhalten
(ii‘) $(u^3 - v^3)^2 = u^6 - 2 \cdot u^3 \cdot v^3 + v^6 = b^2$.
Addieren wir (i‘) und (ii‘). Die Summe lautet

(iii) $u^6 + 2 \cdot u^3 \cdot v^3 + v^6 = b^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3$.

Fassen wir nun den Ausdruck auf der linken Seite von (iii) zu einem Binom zusammen

(iv) $(u^3 + v^3)^2 = b^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3$.

Ziehen wir nun die Quadratwurzel, so ergibt sich

(v) $u^3 + v^3 = \mp\sqrt{b^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3}$.

Addieren wir nun (v) und (ii), so erhalten wir

(vi) $2 \cdot u^3 = b \mp \sqrt{b^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3}$.

Beide Seiten von (vi) dividieren wir durch 2. Ziehen wir nun die dritte Wurzel aus dem Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung, so führt das zur Lösung für die Variable *u*.

(vii) $u = \sqrt[3]{\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} \cdot b^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$

Die Variable *v* ermitteln wir, indem wir (v) von (ii) subtrahieren
$(u^3 - v^3 = b) - \left(u^3 + v^3 = \mp\sqrt{b^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3}\right)$,
Die Differenz lautet

(viii) $-2 \cdot v^3 = b \mp \sqrt{b^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3}$

Beide Seiten von (viii) dividieren wir durch -2. Ziehen wir auch hier die dritte Wurzel aus dem Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung, so führt das diesmal zur Lösung für die Variable *v*.

(ix) $v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} \cdot b^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$

Setzen wir nun die beiden Hilfsvariablen *u* und *v* gemäß $x = u - v$ zusammen, so erhalten wir *Cardanos Lösungsformel für kubische Gleichungen*:

$$x = u - v = \sqrt[3]{\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Etwa zur selben Zeit wie Cardano studierte der französische Mathematiker François Viète, latinisiert Franciscus Viëta (1540-1603), *Algebra* – „ … *„Buchstabenrechnung“ wie sie noch bis in die erste Hälfte des 20. Jahrhunderts genannt wurde* …“ (Lehmann 2015, S. 2) –. Durch seine Anleitung zur Verwendung von Symbolen schaffte Viète die Grundlage einer modernen Algebra – selbst Cardano hatte seine Anleitungen – wie zuvor besprochen – zur Lösung kubischer Gleichungen noch verbal formuliert (Lehmann 2015).

Viète selbst zitierte diesen neuen Weg der Formalisierungen wie folgt

> „… *Die Annahme des Gesuchten als bekannt und der Weg von dort durch Folgerungen zu etwas als wahr Bekanntem …*“ *(zitiert nach* Lehmann 2015, S. 2)

Bekannt von ihm sind die für die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ formulierten Zusammenhänge:

(i) $x_1 + x_2 = -p$

(ii) $x_1 \cdot x_2 = q$

Im Kontext mit dem Thema *Zahlen* ist erwähnenswert, dass Viète, eine Näherung der Kreiszahl π durch den Umfang eingeschriebener $2 \cdot 2^n$-Ecke, den er als geschachtelte Wurzeln ausdrückte, fand (Walser 2022).

z.B. 32 (= $2 \cdot 2^4$)-Eck: $u_{32} = 32 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$

Numerische Lösung für $\frac{1}{2} \cdot u_{32} \approx 3.136548490545941$