Heinz Klaus Strick

Verkannt, verfemt, vergessen

Geschichten aus der europäischen Mathematik der Neuzeit

SACHBUCH

Springer

Verkannt, verfemt, vergessen

Heinz Klaus Strick

Verkannt, verfemt, vergessen

Geschichten aus der europäischen Mathematik der Neuzeit

Springer

Heinz Klaus Strick
Leverkusen, Deutschland

ISBN 978-3-662-68846-5 ISBN 978-3-662-68847-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-68847-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über https://portal.dnb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann
Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Bei der Lektüre von Schriften zur Geschichte der Mathematik bin ich immer wieder auf Namen von Persönlichkeiten gestoßen, von denen ich bis dahin noch nichts gehört hatte oder von deren Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik im Allgemeinen oder für die eines Fachgebiets im Besonderen ich nur wenig wusste.

Wenn man sich dann näher mit den mathematischen Themen beschäftigt, über die diese Personen geforscht haben, und mit deren Biografie, dann stellt sich oft die Frage, warum diese Mathematiker „unbekannt" oder nur „wenig bekannt" sind, warum man sie in der Chronik der Mathematik als regelrecht „vergessen" ansehen kann.

Oft stellt man fest, dass diese Gelehrten zwar entscheidende Impulse für die Entwicklung eines Gebiets geleistet haben, dass jedoch ihre Leistungen schnell von ihren Nachfolgern übertroffen wurden und sie so aus dem Gedächtnis der Mathematikgeschichte verschwanden.

Andere wiederum waren ihrer Zeit voraus und verfassten Beiträge, die oft erst Jahrzehnte später verstanden wurden – nachdem andere, oft unabhängig von ihren „unbekannten" Vorgängern, ähnliche Ideen entwickelt hatten, bis man nachträglich feststellte, dass diese „neuen Ansätze" eigentlich schon vorher hätten bekannt gewesen sein können.

Von manchen Mathematikern ist heute oft nur noch der Name in Zusammenhang mit einem Satz oder einer Regel im Bewusstsein, wie beispielsweise beim Satz von Bayes, bei der Regel von de L'Hôpital oder bei der Cramer'schen Regel – auch hier ist es interessant, mehr über diese Personen zu erfahren.

Für dieses Buch wurden außerdem auch solche Persönlichkeiten ausgewählt, deren Lebensumstände sie daran gehindert haben, berühmt zu werden – sei es, weil sie bereits in jungen Jahren verstorben sind, oder weil sie ihre Fähigkeiten aus politischen oder gesellschaftlichen Gründen nicht entfalten konnten oder weil sie einfach „nur" dem „falschen Geschlecht" angehörten.

Dieses Buch beschäftigt sich mit 67 dieser wenig bekannten, vergessenen, verkannten und diskriminierten Persönlichkeiten, mit ihren Lebensläufen und mit einigen ihrer Beiträge zur Mathematik. Die Auswahl der Personen mag willkürlich erscheinen; wichtig war mir, dass durch sie ein möglichst breites Spektrum von besonderen Persönlichkeiten und

Lebensumständen abgedeckt wird. Rückmeldungen an den Autor, welche anderen Mathematikerinnen und Mathematiker ebenfalls hätten berücksichtigt werden sollen, sind jederzeit willkommen.

In **Kap. 1** gehe ich auf zehn Mathematiker ein, deren Name man gelegentlich in Mathematik-Schulbüchern der Oberstufe findet. Da aber über das Erwähnen ihres Namens hinaus nur in den seltensten Fällen weitere Informationen über diese Persönlichkeiten verbreitet sind, muss man sie wohl eher als **vergessene** Mathematiker ansehen.

Für **Kap. 2** habe ich vierzehn Mathematiker ausgewählt, die mit ihren Erkenntnissen ihrer Zeit voraus waren und daher von ihren Zeitgenossen **verkannt** wurden.

In **Kap. 3** werden dreizehn Mathematikerinnen vorgestellt, die im Laufe der Geschichte der Mathematik durchaus eine besondere Rolle gespielt haben, doch – bis auf die Ausnahme der Person im letzten Abschnitt – wurden sie in ihrem Werdegang im starken Maße daran gehindert, ihr Talent zu entfalten: Sie wurden wegen ihres Geschlechts **diskriminiert**. Trotz herausragender Leistungen gehören diese Frauen zu den **unbekannten** Wissenschaftlerinnen.

Kap. 4 enthält vierzehn Lebensgeschichten von Mathematikern, von denen Sie, liebe Leserinnen und Leser, vielleicht einmal den Namen gehört haben, vielleicht aber noch nicht einmal das. Welches Attribut für die einzelnen Persönlichkeiten zutrifft, mag jeder für sich entscheiden: **Bekannt**? **Unbekannt**? **Vergessen**?

Zu der Gruppe von Personen, die ihre Fähigkeiten nicht zu allen Zeiten entfalten konnten, gehören die Mathematiker jüdischer Herkunft, die – nicht nur während der Zeit der nationalsozialistischen Herrschaft in Deutschland – **diskriminiert** und **verfemt** wurden. In **Kap. 5** werden stellvertretend für viele andere die Schicksale von acht solcher Persönlichkeiten vorgestellt.

Den Abschluss des Buches bildet **Kap. 6**, in dem – anhand der Lebensgeschichten von acht Persönlichkeiten – die Vorbereitungen und die Durchführung eines großen europäischen Projekts beschrieben wird: Die Bemühungen, die Gestalt der Erde mathematisch zu erfassen – welches Attribut passt am besten zu all diesen Episoden?

Bekannt? **Unbekannt**? **Vergessen**?

Grundlage für die einzelnen Episoden waren meine Beiträge im Rahmen des „Mathematischen Monatskalenders“, die in den zurückliegenden 17 Jahren unter *https://www.spektrum.de/mathematik* erschienen sind. In diesen populär-wissenschaftlich gehaltenen Kalenderblättern versuche ich, Persönlichkeiten aus der Geschichte der Mathematik vorzustellen, über deren Leben und Lebensumstände zu berichten und zu beschreiben, welche Beiträge diese Personen zur Entwicklung der Mathematik geleistet haben. Im vorliegenden Buch konnte ich die Texte der Kalenderblätter an vielen Stellen durch weitere Beispiele und Grafiken zur Veranschaulichung ergänzen.

Die behandelten mathematischen Themen sind durchweg mit schulischem Vorwissen aus der Ober- oder Mittelstufe nachvollziehbar; in diesem Buch werden also keine mathematischen Anforderungen gestellt, die deutlich über das an der Schule erreichbare Niveau hinausgehen. Daher empfiehlt sich das Buch für alle, die sich gern mit Mathematik beschäftigen, und ist beispielsweise auch für Arbeitsgemeinschaften an Schulen und als Anregung für Facharbeiten geeignet.

Die Reihe der Episoden über Mathematikerinnen und Mathematikern beginnt im 16. Jahrhundert und schließt somit an die *Geschichten aus der Mathematik* an, die im letzten Jahr im Springer-Verlag erschienen sind. Bei der Lektüre muss keine bestimmte Reihenfolge eingehalten werden; sofern Bezüge zu anderen Episoden vorliegen, sind diese durch Verweise gekennzeichnet.

Angeregt durch Hans Wußing habe ich auch in das vorliegende Buch etliche Bilder von Briefmarken aufgenommen, durch die die Postverwaltungen der einzelnen Länder an die Leistungen von Persönlichkeiten erinnern, die in früheren Zeiten gelebt haben. Für die Genehmigung zur Wiedergabe dieser „kleinen Kunstwerke" bedanke ich mich bei den verschiedenen Behörden (in Deutschland ist – neben den Grafikern der einzelnen Briefmarken-Motive – das Bundesministerium der Finanzen zuständig).

Am Ende der Arbeit an diesem Buch bedanke ich mich herzlich bei all denen, die mich bei der Vorbereitung und Umsetzung des Buchprojekts unterstützt haben, insbesondere

- bei meiner Frau, die es auch diesmal geduldig ertrug, dass ich mich immer wieder in die schöne Welt der Mathematik (und in die Lektüre der alten Schriften) vertiefte,
- bei meinem Sohn Andreas, der etliche Porträtzeichnungen anfertigte (siehe auch: https://kunst-a-s.jimdo.com), und
- bei Wilfried Herget, der mir auch diesmal wieder zahlreiche Anregungen gab, Formulierungen in meinen Texten verständlicher zu gestalten,

sowie bei Iris Ruhmann und Carola Lerch vom Springer-Verlag, die dieses Buch erst ermöglichten.

Leverkusen, Deutschland Heinz Klaus Strick

Inhaltsverzeichnis

Persönlichkeiten, deren Namen vielleicht im Mathematikunterricht erwähnt wurden

1

Inhaltsverzeichnis

Die zehn Geschichten in diesem Kapitel sind Mathematikern gewidmet, deren Namen man möglicherweise in Mathematik-Schulbüchern der Oberstufe findet. Da aber über das Erwähnen ihres Namens hinaus in den seltensten Fällen weitere Informationen über diese Persönlichkeiten verbreitet sind, muss man sie wohl als *vergessene* Mathematiker ansehen.

Im **Analysis-Unterricht** war über lange Zeit der **Satz von Rolle** ein obligatorisches Thema, wurde das Grenzwertverhalten von Quotientenfunktionen mithilfe der **Regel von de L'Hôpital** untersucht, Näherungsfunktionen durch Anwenden des **Satzes von Taylor** bestimmt oder die Inhalte von Flächen unter Graphen näherungsweise gemäß der **Simpson-Regel** ermittelt.

H. K. Strick, *Verkannt, verfemt, vergessen*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-68847-2_1

Im Unterricht über **Analytische Geometrie** ist der **Satz von Varignon** ein schönes Beispiel zur Anwendung der Vektorrechnung, und lineare Gleichungssysteme können mithilfe der **Cramer'schen Regel** gelöst werden.

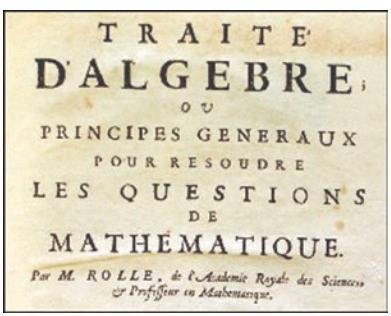
Während die Behandlung des **Satzes von Bayes** mittlerweile zu den obligatorischen Themen im **Stochastik-Unterricht** gehört, wird das **Montmort'sche Rencontre-Problem** wohl eher nur selten im Rahmen der Kombinatorik untersucht. Dass Wahrscheinlichkeiten auch durch geometrische Überlegungen bestimmt werden können, legen Aufgabenstellungen wie **Buffons Spiel *franc carreau*** nahe. Nur wenn die Bedingungen für die Durchführung eines Zufallsversuchs exakt definiert sind, können Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen bestimmt werden; andernfalls besteht auch die Gefahr, dass man zu unterschiedlichen Resultaten kommt – wie beispielsweise am **Bertrand'schen Paradoxon** sichtbar wird.

Selbst für den Fall, dass alle diese zehn Sätze, Regeln und Probleme im eigenen Mathematikunterricht behandelt wurden, wird man dort wohl eher selten etwas über die Personen erfahren haben, nach denen diese benannt wurden.

In den folgenden Abschnitten werden also zunächst die genannten Sätze usw. erläutert; dann folgen Informationen über die Lebensumstände und andere mathematische Aktivitäten dieser Persönlichkeiten.

1.1 Michel Rolle (1652–1719) – ein Gegner der Differenzialrechnung

► Der nach dem französischen Mathematiker Michel Rolle benannten *Satz von Rolle* macht eine Aussage über eine Nullstelle der 1. Ableitung einer differenzierbaren Funktion. Rolle selbst hat den Satz weder in dieser Form noch mit Bezug zur Ableitung einer Funktion formuliert, vielmehr gehörte Rolle zeitweise sogar zu den hartnäckigsten Gegnern der Differenzialrechnung.


TRAITE'
D'ALGEBRE;
OU
PRINCIPES GENERAUX
POUR RESOUDRE
LES QUESTIONS
DE
MATHEMATIQUE.
Par M. ROLLE, de l'Academie Royale des Sciences, & Professeur en Mathematique.

Da kein Porträt von Michel Rolle erhalten ist, wissen wir nicht, wie er ausgesehen hat. Die vorstehende Wikipedia-Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Titelblatts seiner berühmten Schrift *Traité d'Algèbre*.

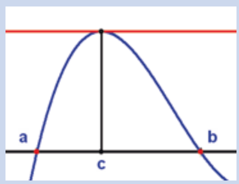
Seit Mitte des 19. Jahrhunderts wird der folgende Satz in der Fachliteratur dem französischen Mathematiker zugeordnet:

Satz von Rolle (moderne Fassung)
Gilt für eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a\,;b]$ stetige und auf dem offenen Intervall $]\,a\,;b\,[$ differenzierbare Funktion f, dass die Funktionswerte an den Rändern des Intervalls übereinstimmen, also dass gilt $f(a) = f(b)$, dann *existiert* im Innern des Intervalls eine Stelle c, für die gilt: $f'(c) = 0$.

Mit Worten: Stimmen die Werte der Funktion an zwei Stellen überein, dann gibt es dazwischen eine Stelle mit waagerechter Tangente.

Dies gilt insbesondere auch für den Sonderfall $f(a) = f(b) = 0$:

- Zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion existiert eine Stelle mit waagerechter Tangente.



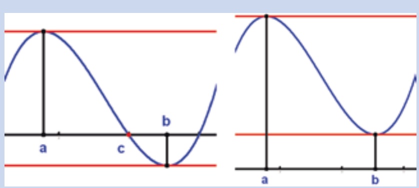
Bei dem heute als *Satz von Rolle* bezeichneten Satz schließt man also von Stellen mit gleichen Funktionswerten auf eine Stelle mit einer waagerechten Tangente.

Rolle selbst wandte diese Schlussweise nicht an, sondern er benutzte vielmehr eine Aussage, die sich ganz anders anhört, aber äquivalent zu der o. a. Version ist.

Satz von Rolle (ursprüngliche Fassung)
Hat der Graph eines Polynoms zwei Stellen a und b mit waagerechter Tangente und gibt es dazwischen keine weitere Stelle mit dieser Eigenschaft, dann existiert *höchstens eine* Nullstelle zwischen a und b.

Moderne Formulierung:

Ist f ein Polynom mit der Eigenschaft, dass $f'(a) = f'(b) = 0$, und existiert keine weitere Stelle im Intervall $]\,a\,;b\,[$ mit dieser Eigenschaft, dann existiert *höchstens eine* Nullstelle c von f im Intervall $]\,a\,;b\,[$.



In der zuletzt angegebenen Fassung des Satzes von Rolle werden zwei Nullstellen der 1. Ableitung dazu benutzt, um eine Aussage über eine *mögliche* Nullstelle der Funktion zu machen: Zwischen zwei Nullstellen a, b der 1. Ableitung kann also *maximal* eine Nullstelle des Graphen liegen, nämlich dann, wenn die Funktionswerte in a und b unterschiedliche Vorzeichen haben (vgl. Abb. links), sonst nicht (vgl. Abb. rechts).

Hinweis: Die Aussage der ursprünglichen Fassung und die weiter unten folgende Darstellung der *méthode des cascades* bezieht sich auf Polynome, die die Eigenschaften der Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit erfüllen. Zur Zeit von Rolle war ein allgemeiner Funktionsbegriff noch nicht entwickelt (dies erfolgte erst durch Leonhard Euler).

Zur Person Michel Rolles

Michel Rolle wurde am 21. April 1652 im Städtchen Ambert in der Auvergne (Zentralfrankreich) als Sohn eines Kaufmanns geboren. Es ist nicht bekannt, welche Schulbildung er genoss. Seinen Lebensunterhalt verdiente er als Schreiber bei Anwälten und Notaren.

1675 ging er in der Hoffnung auf bessere Arbeitsmöglichkeiten nach Paris. In der Zwischenzeit hatte er im Selbststudium auch seine Rechenfertigkeiten verbessert, sodass er auch hierin seine Dienste anbieten konnte. Um seine junge und schnell größer werdende Familie ernähren zu können, beschäftigte er sich mit höherer Mathematik; denn er hatte sich das ehrgeizige Ziel gesetzt, sich auf eine Stelle als Mitarbeiter der *Académie Royale des Sciences* zu bewerben; diese war erst wenige Jahre zuvor, nämlich im Jahr 1666, gegründet worden.

1682 erfüllte sich dieser Traum: Michel Rolle konnte ein Problem lösen, das **Jacques Ozanam**, ein französischer Gelehrter und erfolgreicher Autor von Büchern zur Unterhaltungsmathematik, im Jahr zuvor im *Journal des sçavans* gestellt hatte:

- *Trouver quatre nombres tels que la différence des deux quelconques fait un quarré et que la somme des deux quelconques des trois premiers soit encore un nombre quarré.*

  Finde vier (natürliche) Zahlen, für die gilt: Die Differenz von je zwei dieser Zahlen ist eine Quadratzahl; außerdem soll die Summe von je zwei der ersten drei Zahlen eine Quadratzahl sein.

Ozanam selbst hatte vermutet, dass die kleinste dieser vier Zahlen mindestens 50 Dezimalstellen hat. In der Ausgabe vom 31.08.1682 gab dann das *Journal* bekannt, dass *Sieur Rolle, professeur d'arithmetique,* eine Lösung gefunden habe.

Rolle hatte den Herausgebern der Zeitschrift mitgeteilt, dass man die gesuchten vier Zahlen mithilfe von symmetrischen Termen vom Grad 20 berechnen kann:

$$y^{20}+21y^{16}z^{4}-6y^{12}z^{8}-6y^{8}z^{12}+21y^{4}z^{16}+z^{20},$$

$$10y^{2}z^{18}-24y^{6}z^{14}+60y^{10}z^{10}-24y^{14}z^{6}+10y^{18}z^{2},$$

$$6y^{2}z^{18}+24y^{6}z^{14}-92y^{10}z^{10}+24y^{14}z^{6}+6y^{18}z^{2}\ \text{ sowie}$$

$$y^{20}+16y^{18}z^{2}+21y^{16}z^{4}-6y^{12}z^{8}-32y^{10}z^{10}-6y^{8}z^{12}+21y^{4}z^{16}+16y^{2}z^{18}+z^{20}.$$

Setzt man für y den Wert 1 ein und für z den Wert 2, dann erhält man die vier Zahlen 2.399.057, 2.288.168, 1.873.432 sowie als vierte Zahl die Summe der ersten drei Zahlen, also 6.560.657; diese erfüllen tatsächlich die geforderten Bedingungen.

Der Finanzminister Jean Baptiste Colbert war von dieser Leistung so beeindruckt, dass er dem 30-jährigen Rolle zu einer Pension verhalf. Der Kriegsminister François Michel Le Tellier, Marquis de Louvois, bot Rolle sogar eine feste Stelle in seinem Ministerium an, die dieser aber bald wieder aufgab, weil ihm die Arbeit nicht gefiel.

Der Marquis ließ aber nicht locker, stellte Rolle als Lehrer für seinen jüngsten Sohn ein und sorgte dafür, dass Michel Rolle bereits 1685 Mitglied der *Académie Royale des Sciences* wurde und auch für dieses Amt eine Besoldung erhielt.

Bis zu einem Schlaganfall im Jahr 1708 konnte Rolle sich uneingeschränkt den selbst gewählten mathematischen Themen widmen. Er lebte zwar danach noch weitere elf Jahre, war aber nicht mehr in der Lage, weitere Beiträge zu verfassen.

Rolles Algebra-Buch

1690 erschien sein Hauptwerk *Traité d'Algèbre ou Principes generaux pour resoudre les questions de mathématique* (Allgemeine Prinzipien zur Lösung mathematischer Fragen), in dem er in bemerkenswerter Weise die Anwendung algebraischer Methoden demonstrierte.

Im ersten Kapitel erläutert Rolle Rechenregeln für lineare Terme und Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme – mit bis zu vier Variablen; dabei kommen auch nicht lösbare Systeme vor.

Im zweiten Kapitel wird das Rechnen mit Polynomen behandelt; dann folgen Aufgaben, in denen Gleichungssysteme unterschiedlichen Grades gelöst werden.

Beispiel

Bestimme die Zahlen y und z, für die gilt $y + z = 6$ und $y^3 + z^3 = 18z^2$.

Lösung

Ersetze y durch $6 - z$, dann erhält man

$$(6-z)^3 + z^3 = 18z^2 \Leftrightarrow 216 - 108z + 18z^2 - z^3 + z^3 = 18z^2$$
$$\Leftrightarrow 216 = 108z \Leftrightarrow z = 2$$

und somit $y = 4$.

Als Nächstes erläutert Rolle, wie man systematisch auch Gleichungen höheren Grades lösen kann, nämlich durch **Intervallschachtelung**:

Beispiel (von Rolle)

Für die Variable z setzt man in der Gleichung $z^2 - 1334z + 257400 = 0$ zunächst die Werte 1 und 1000 ein, dann nacheinander 500, 200, 300, 250, 220, …, bis man schließlich zur Lösung $z = 234$ gelangt.

Als Verfeinerung des Verfahrens empfiehlt Rolle eine Substitution, also z. B. kann man z durch $x + 200$ ersetzen, wenn man weiß, dass z zwischen 200 und 300 liegt, um dann eine Lösung für die Gleichung

$(x + 200)^2 - 1334 \cdot (x + 200) + 257400 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 934x + 30600 = 0$ zu suchen.

Übrigens: Bei quadratischen Termen verwendete man zurzeit von Rolle noch nicht die heute übliche Potenzschreibweise, d. h., man schrieb noch xx statt x^2 – dies war auch noch bei Leonhard Euler (1707–1783) so üblich.

Um irrationale Lösungen näherungsweise zu bestimmen, schlägt Rolle vor, an die Koeffizienten eine jeweils entsprechende Anzahl von Nullen anzuhängen, um dann auf die so veränderte Gleichung wieder das o. a. Verfahren anzuwenden.

Beispiel

Statt der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$, deren positive Lösung zwischen 1 und 2 liegt, betrachte man die Gleichungen $x^2 - 10x - 100 = 0$ oder $x^2 - 100x - 10000 = 0$, deren positive Lösung dann zwischen 16 und 17 bzw. zwischen 161 und 162 liegt. Anschließend muss man dann wieder auf die entsprechenden Näherungslösungen mit einer oder zwei Dezimalstellen zurückschließen.

Rolle nutzte zur Lösung von Gleichungen auch andere Substitutionen von Variablen:

Beispiel
Die Lösungen der Gleichung $z^2 - 17z - 30 = 0$ sind dreimal so groß wie die Lösungen der Gleichung $3z^2 - 17z - 10 = 0$; denn durch die Substitution $z = 3y$ entsteht die Gleichung $(3y)^2 - 17 \cdot (3y) - 30 = 0$, also $3y^2 - 17y - 10 = 0$.

Bei den untersuchten Gleichungen interessierte sich Rolle zunächst nur für die positiven Lösungen. Um die negative Lösung einer Gleichung zu bestimmen, betrachtete er das entsprechende Polynom mit der substituierten Variablen $y = -x$.

Beispiel
Die Gleichung $x^2 - 3x - 10 = 0$ hat die positive Lösung $+5$ (und die negative Lösung -2, die aber nicht ermittelt wird).

Dafür wird die Gleichung $(-y)^2 + 3 \cdot (-y) - 10 = 0$ betrachtet, also $y^2 + 3y - 10 = 0$; deren Lösungen sind $+2$ (und -5).

Bevor wir näher auf die von Rolle entwickelte *méthode des cascades* (*cascade* = Wasserfall) eingehen, noch kurz die Themen der weiteren Kapitel:

Im dritten Kapitel des Buches behandelt Rolle noch die Methode der Termdivision sowie den Euklidischen Algorithmus für Terme. Im vierten Kapitel reflektiert er allgemeine Lösungsmethoden von Gleichungen höheren Grades.

Die Méthode des Cascades

Ergänzend zu seinem Hauptwerk *Traité d'Algèbre* veröffentlichte Rolle im darauffolgenden Jahr (1691) das Werk *Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés*, also ein Beispiel für eine Methode, mit deren Hilfe Gleichungen beliebigen Grades gelöst werden können.

Die Idee für dieses Lösungsverfahren besteht darin, Intervalle zu bestimmen, in denen die Lösungen einer Ausgangsgleichung liegen; diese Intervalle ergeben sich schrittweise aus den Lösungen einer Hilfsgleichung, deren Grad um 1 niedriger ist als der Grad der Ausgangsgleichung. Die Lage der Lösungen der Hilfsgleichung wiederum ergibt sich analog wiederum aus einer weiteren Hilfsgleichung usw. Auf diese Weise entstehen die „Kaskaden", an deren Ende eine lineare Gleichung steht, von der man dann aufsteigt, bis man die Lösungen der Ausgangsgleichung gefunden hat (vgl. hierzu auch: https://maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/46/Washington_Rolle_ed.pdf).

Aus unserer heutigen Sicht sind die *Cascade*-Polynome nichts anderes als *Ableitungen*; daher ordnen wir den Satz, der als *Satz von Rolle* bezeichnet wird, der Differenzialrechnung zu.

Rolle hingegen sah die Polynome als rein *algebraische Objekte* an. Das, was wir heute als Bilden der Ableitung bezeichnen würden, formulierte er als bloße Rechenvorschrift, um die weiteren Polynome für seine Cascades zu bekommen:

- *Multipliziere die einzelnen Summanden des Polynoms mit dem Exponenten und dividiere sie durch die Variable.*

Eine Visualisierung der Polynome durch Graphen wurde erst in späteren Jahrzehnten entwickelt. Daher findet man in Rolles Buch auch keinerlei Abbildungen, durch die ggf. eine Einsicht gemäß unserer „Sehgewohnheiten" hätte verdeutlicht werden können.

Für ein gegebenes Polynom muss zunächst gesichert werden, dass keine der Wurzeln (Nullstellen) negativ ist, ggf. durch Verschiebung und Spiegelung; hierzu bedient sich Rolle einer von ihm gefundenen Regel, nach der man die maximal mögliche Lage der größten positiven Nullstelle ermitteln kann, vgl. hierzu auch den ersten Schritt seiner *méthode*.

Beispiel
Die größte positive Nullstelle des Polynoms $x^2 - 2x - 3 = (x - 3) \cdot (x + 1)$ ist $x = 3$. Mithilfe der Substitution $x = 3 - z$ wird dann der Graph des Polynoms an der y-Achse gespiegelt und um drei Einheiten nach rechts verschoben, sodass sich das Polynom $z^2 - 4z$ ergibt, das nur nichtnegative Wurzeln besitzt.

Gemäß der Descartes'schen Vorzeichenregel (vgl. *Mathematik – einfach genial*, Kap. 10) kann das im folgenden Beispiel betrachtete Polynom keine negativen Nullstellen besitzen, denn die Vorzeichen der Koeffizienten sind abwechselnd positiv und negativ.

Beispiel für die *Méthode des Cascades*
Gesucht werden die Lösungen der Gleichung $p_4(x) = x^4 - 24x^3 + 198x^2 - 648x + 473 = 0$.

Aus den Koeffizienten schließt Rolle auf ein *maximales* Intervall, in dem die Lösungen liegen können.

Ausschlaggebend hierfür ist der Betrag des größten auftretenden negativen Koeffizienten (also 648), dividiert durch den Koeffizienten der höchsten auftretenden Potenz (also 1), vermehrt um 1:

Alle (positiven) Lösungen der Gleichung müssen gemäß dieser Rolle'schen Faustregel im Intervall $[0\ ;\ 649]$ liegen.

Ziel des Cascade-Verfahrens ist es nun, dieses Intervall in kleinere Intervalle zu unterteilen, in denen dann die Lösungen liegen.

Ausgehend von der Gleichung $p_4(x) = x^4 - 24x^3 + 198x^2 - 648x + 473 = 0$ werden zunächst die folgenden Gleichungen aufgestellt (wir würden diese als Ableitungen bezeichnen):

$p_3(x) = 4x^3 - 72x^2 + 396x - 648 = 0$, $p_2(x) = 12x^2 - 144x + 396 = 0$ und $p_1(x) = 24x - 144 = 0$.

Die letzte Gleichung $p_1(x) = 24x - 144 = 0$ ist Rolles *erste Cascade*.

Aus der Lösung $x = 6$ von $24x - 144 = 0$ schließt man nun auf Intervalle, in denen die Lösungen der quadratischen Gleichung $p_2(x) = 12x^2 - 144x + 396 = 0$ liegen müssen: eine Lösung liegt unterhalb von 6 (aber im positiven Bereich), eine Lösung oberhalb von 6. Die obere Intervallgrenze des rechten Intervalls berechnet Rolle wieder gemäß der o. a. Faustregel: $144/12 + 1 = 13$.

Somit liegen die Lösungen der *zweiten Cascade* in den Intervallen $[0;6]$ und $[6;13]$.

Kommentar aus heutiger Sicht: Da die Nullstelle des linearen Polynoms (= 1. Ableitung des quadratischen Polynoms $12x^2 - 144x + 396$) an der Stelle $x = 6$ liegt, können die Nullstellen des quadratischen Polynoms – sofern sie existieren – nur links und rechts von $x = 6$ liegen.

Für die quadratische Gleichung $p_2(x) = 12x^2 - 144x + 396 = 0$, also $x^2 - 12x + 33 = 0$, ergibt sich die Lösung $x = 6 - \sqrt{3} \approx 4{,}3$, die im Intervall $[0;6]$ liegt, und die Lösung $x = 6 + \sqrt{3} \approx 7{,}7$, die im Intervall $[6;13]$ liegt.

Zur Bestimmung der Lösungen der *dritten Cascade* $p_3(x) = 4x^3 - 72x^2 + 396x - 648 = 0$ betrachtet Rolle die sich aus der zweiten Cascade ergebenden Intervall

$$\left[0\;;\;6-\sqrt{3}\right],\ \left[6-\sqrt{3}\;;\;6+\sqrt{3}\right] \text{ und } \left[6+\sqrt{3}\;;\;163\right].$$

Zunächst werden die Randwerte der drei Intervalle in das Polynom $x^3 - 18x^2 + 99x - 162$ eingesetzt, dann durch fortgesetzte Intervallhalbierung die Stelle des Vorzeichenwechsels ermittelt.

Im Grunde wendet Rolle hier also bereits den Zwischenwertsatz an, der erst 1817 von **Bernard Bolzano** formuliert wird (vgl. Abschn. 2.5):

- *Hat man bei einer (stetigen) Funktion an den Enden eines Intervalls verschiedene Vorzeichen, dann existiert eine Nullstelle der Funktion im Innern des Intervalls.*

Beispiel (Fortsetzung)

Durch diese Intervallschachtelung findet man in diesem Beispiel in jedem der drei Intervalle jeweils eine ganzzahlige Lösung, nämlich $x = 3$; $x = 6$; $x = 9$.

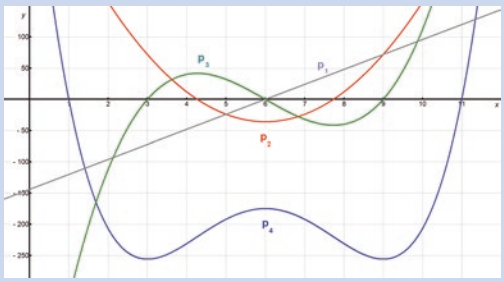
Kommentar aus heutiger Sicht: An diesen drei Stellen liegen die Nullstellen der Ableitungsfunktion von $f(x) = x^4 - 24x^3 + 198x^2 - 648x + 473$.

Somit ergeben sich für die letzte Cascade $p_4(x) = x^4 - 24x^3 + 198x^2 - 648x + 473 = 0$ die Intervalle $[0;3]$, $[3;6]$, $[6;9]$ und $[9;649]$. Und wie zuvor sucht Rolle nach der

Methode der Intervallhalbierung nach den Nullstellen von $p_4(x) = x^4 - 24x^3 + 198x^2 - 648x + 473 = 0$.

Im ersten Intervall existiert eine Lösung – durch Einsetzen findet man $x = 1$, in den nächsten beiden Intervallen existieren keine Lösungen; im letzten Intervall findet man mit $x = 11$ die zweite Lösung der Gleichung.

In der folgenden Abbildung sind die Graphen der vier Cascade-Polynome dargestellt, mit deren Hilfe die Vorgehensweise Rolles für unsere Sehgewohnheiten deutlich(er) wird.



Rolles Einstellung zur Differenzialrechnung

Aus der Sicht von Rolle war die Entwicklung der Differenzialrechnung ein großer Irrtum:

> „Während bisher die Mathematik als exakte Wissenschaft angesehen werden konnte, in der nur wahre Axiome und tatsächlich beweisbare Sätze formuliert und falsche Vermutungen sofort „geächtet" wurden, so scheint es, dass dieses Kennzeichen der Exaktheit nicht mehr gültig ist, seit die unendlich kleinen Größen eingeführt wurden."

In den Sitzungen der *Académie* kam es immer wieder zu heftigen Auseinandersetzungen, insbesondere mit Pierre de Varignon (vgl. Abschn. 1.5), der die infinitesimalen Methoden verteidigte.

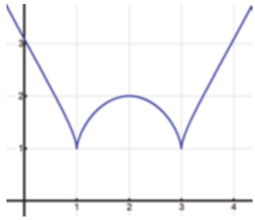
Rolle glaubte auch, ein Beispiel gefunden zu haben, das die Unbrauchbarkeit der Differenzialrechnung zum Auffinden von Extrempunkten beweist. Der *Académie* legte er die folgende (geschickt gewählte) Gleichung vor:

$$y - b = \frac{\left(x^2 - 2ax + a^2 - b^2\right)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$$, für die sich die Ableitung

$$y' = \frac{4\cdot(x-a)}{3\cdot\left(ax^2 - 2a^2x + a^3 - ab^2\right)^{\frac{1}{3}}}$$ ergibt.

Dieser Ableitungsterm besitzt jedoch nur *eine* Nullstelle; wohingegen der Graph drei Extremstellen an den Stellen $x = a$; $x = a - b$; $x = a + b$ besitzt.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen für das Beispiel $a = 2$; $b = 1$.



Es ist leicht nachvollziehbar, dass ein solches Beispiel mit senkrechten Tangenten (Stellen, an denen keine Differenzierbarkeit vorliegt), in den Anfangsjahren der Differenzialrechnung Probleme bereitete.

Nachdem Rolle bei einer der Sitzungen sogar ausfallend geworden war, was einige Mitglieder auf die „niedere" Herkunft von Rolle zurückführten, beschloss die Leitung der *Académie*, das Thema nicht mehr auf die Tagesordnung zu setzen.

Rolles Kritik an der damaligen Begründung der Differenzialrechnung trug jedoch mit dazu bei, dass die Grundlagen der Differenzialrechnung präzisiert wurden. Erst kurz vor seinem Tod – er starb am 8. November 1719 – nahm Michel Rolle seine grundsätzlichen Einwände zurück.

1.2 Guillaume de L'Hôpital (1661–1704) – kein Plagiator

► Ein wichtiger Satz der Differenzialrechnung ist unter der Bezeichnung *L'Hôpital'sche Regel* in die mathematische Literatur eingegangen. Ob diese Regel tatsächlich von L'Hôpital entdeckt wurde, ist umstritten und wird sich wohl kaum noch klären lassen. Veröffentlicht wurde sie im Jahre 1696 in seinem Buch *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Infinitesimalrechnung mit Anwendung auf gekrümmte Linien), dem ersten Buch zur Leibniz'schen Differenzialrechnung.

Benannt ist diese Regel nach Guillaume François Antoine de L'Hôpital, Marquis de Sainte-Mesme, Comte d'Entremont, Seigneur d'Oucques, La Chaise, Le Bréau et autres lieuxments, der – wie man dem Adelstitel entnehmen kann – einem der einflussreichsten französischen Adelshäuser entstammte (Bildquelle: Benj73/Wikimedia).

Die Regel besagt im Wesentlichen, dass man für differenzierbare Funktionen f und g, die beide an einer Stelle a eine Nullstelle besitzen, den Grenzwert der Quotientenfunktion $\frac{f}{g}$ mithilfe des Funktionswerts von $\frac{f'}{g'}$ in a bestimmen kann, sofern dieser existiert, genauer:

Regel von de L'Hôpital

Wenn die differenzierbaren Zähler- und Nennerfunktionen f und g an einer Stelle a eine Nullstelle haben, also $f(a) = g(a) = 0$, dann ist der Quotient $\frac{f(a)}{g(a)}$ nicht definiert.

Existiert jedoch der Grenzwert $c = \lim\limits_{x \to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$ des Quotienten der Ableitungsfunktionen von Zähler- und Nennerfunktion an der Stelle a, dann ist die Quotientenfunktion $\frac{f}{g}$ stetig ergänzbar durch den Grenzwert $\lim\limits_{x \to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = c = \lim\limits_{x \to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$.

Zur Person L'Hôpitals

Bereits als Kind hatte sich der 1661 in Paris geborene L'Hôpital sehr für mathematische Probleme interessiert. Als 15-Jähriger soll er sogar schon ein schwieriges Problem über die Zykloide (Rollkurve eines Punktes auf der Kreislinie) gelöst haben, das Blaise Pascal gestellt hatte.

Gemäß der Familientradition trat er in den Militärdienst ein, führte als Hauptmann ein Kavallerieregiment – sein Interesse galt aber eher der Geometrie. Wegen extremer Kurzsichtigkeit musste er bald seine militärische Laufbahn beenden.

Von da an besuchte er regelmäßig den philosophisch-mathematischen Gesprächskreis des Mathematik-Professors **Nicolas Malebranche** aus dem Orden der Oratorianer. Als 1691 der 24-jährige **Johann Bernoulli** nach Paris kam, hatte L'Hôpital endlich die Person gefunden, die sich mit der neuen Infinitesimalrechnung auskannte.

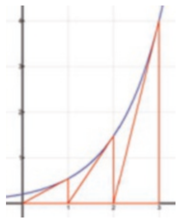
Johann Bernoulli hatte sich eigentlich bereits für ein Medizinstudium an der Universität Basel entschieden, als er durch seinen zwölf Jahre älteren Bruder Jakob auf die Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz zur Analysis aufmerksam wurde. Zunächst unter Anleitung des Bruders, dann aber zunehmend selbstständig, arbeitete sich Johann in die neuen Methoden ein und entwickelte sich zum Konkurrenten seines Bruders. 1691 hielt er in Genf Vorlesungen und reiste dann weiter nach Paris.

Johann Bernoulli erklärte sich bereit, vor den Mitgliedern des Malebranche-Kreises wöchentlich vier Vorlesungen zur Infinitesimalrechnung zu halten. Danach setzte er dies gegen eine Bezahlung im Landhaus L'Hôpitals in Oucques (Loire) fort. Nach seiner Rückkehr nach Basel schickte er regelmäßig weitere „Lektionen" in Form von Briefen zu.

Im Jahr 1639 hatte der Hobby-Mathematiker Florimond de Beaune an René Descartes und Pierre de Fermat die folgende Frage gestellt:

- *Bei welchen Kurven sind die Subtangenten (das sind die Projektionen der Tangenten auf die Abszisse) konstant?*

Aber weder Descartes noch Fermat konnten diese Frage beantworten.



1692 teilte L'Hôpital in einem Brief an **Christiaan Huygens** diesem die Lösung des Problems mit, nämlich, dass diese Eigenschaft für alle Exponentialfunktionen zutrifft, vgl. die vorangehende Grafik.

Allerdings gab er nicht ausdrücklich an, dass die Lösung nicht von ihm, sondern von Johann Bernoulli stammte. Als L'Hôpital auch noch die Lösung veröffentlichte – wenn auch unter einem Pseudonym –, war Johann Bernoulli hierüber sehr erbost und brach seine Kontakte zu L'Hôpital ab, bis dieser ihm ein äußerst großzügiges finanzielles Angebot machte:

Johann Bernoulli solle ihn auch zukünftig gegen die Bezahlung eines halben Professorengehalts regelmäßig über neue mathematische Erkenntnisse informieren, allerdings sich auch dazu verpflichten, diese neuen Einsichten nicht anderen mitzuteilen – L'Hôpital nannte hierbei ausdrücklich **Pierre de Varignon** (vgl. Abschn. 1.5), mit dem Johann Bernoulli befreundet war – oder diese gar zu veröffentlichen.

Johann Bernoulli nahm das Angebot an, war aber dennoch enttäuscht, als er 1696 im Vorwort von L'Hôpitals Buch *Analyse des infiniment petits* las:

> „Schließlich bin ich den Herren Bernoulli wegen ihrer großartigen Einsichten zu Dank verpflichtet, insbesondere dem jüngeren Herrn Bernoulli, der jetzt Professor in Groningen ist. Ich habe mich ungezwungen ihrer Entdeckungen bedient, ebenso wie derer des Herrn Leibniz. Daher bin ich mit allem einverstanden, was sie als ihre Idee beanspruchen mögen, und bin zufrieden mit dem, was sie mir lassen."

Johann Bernoulli hielt sich an die mit L'Hôpital getroffene Vereinbarung, seinen Anteil am Buch zu verschweigen; aber nach dessen Tod verbreitete er zunehmend, dass er der eigentliche Autor dieses außerordentlich erfolgreichen Buches wäre. Da er über Jahre hinweg immer wieder verschiedene Prioritätsansprüche geltend gemacht hatte (insbesondere gegenüber seinem älteren Bruder Jakob), wurde dies lange Zeit nicht für glaubwürdig gehalten.

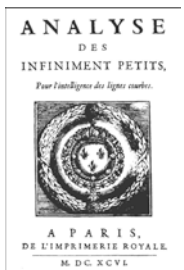
Erst als man 1921 Mitschriften der Vorlesungen Johann Bernoullis fand, zeigten sich große Übereinstimmungen mit den Ausführungen im L'Hôpital'schen Buch. Andererseits waren in den Vorlesungsskripten etliche Fehler enthalten, die L'Hôpital offensichtlich erkannt und vor der Veröffentlichung korrigiert hatte.

Auch wenn heute nicht mehr eindeutig geklärt werden kann, welchen Anteil L'Hôpital selbst am Buch *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* hat, dürfen seine Verdienste nicht geschmälert werden. Zweifelsohne haben die Klarheit des Aufbaus und die Verständlichkeit der Formulierungen dazu beigetragen, dass die Leibniz'-sche Theorie der Infinitesimalrechnung erfolgreich verbreitet wurde.

Nach dem Erfolg seines Buches zur Differenzialrechnung plante L'Hôpital auch einen Band zur Integralrechnung, gab die Idee aber auf, als er erfuhr, dass Leibniz selbst ein Buch zu diesem Thema vorbereiten würde.

L'Hôpital starb am 2. Februar 1704; zuvor konnte er noch die Arbeit an einem weiteren Werk abschließen (*Traité analytique des sections coniques* – Analytische Behandlung von Kegelschnitten), das posthum veröffentlicht wurde.

Zum Inhalt von Analyse des infiniment petits



Das Buch beginnt mit zwei Definitionen und einem ersten Korollar:

> „Variable Größen sind solche, die kontinuierlich größer oder kleiner werden, im Gegensatz zu konstanten Größen, die unverändert bleiben, während die anderen sich verändern. Der infinitesimale Teil, um den eine variable Größe größer oder kleiner wird, heißt Differenzial der Größe. Es ist offensichtlich, dass konstante Größen das Differenzial null haben."

Dann folgen zwei Axiome:

- *Unterscheiden sich zwei variable Größen nur um einen infinitesimalen Betrag, dann sollen sie als gleich angesehen werden.*
- *Eine gekrümmte Linie (Kurve) soll als Vereinigung von unendlich vielen, infinitesimal kleinen Geraden angesehen werden, oder was dasselbe ist: als ein Polygon mit unendlich vielen Seiten von jeweils infinitesimal kleiner Länge. Der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Seiten bestimmt die Krümmung der Kurve.*

Danach schließen sich die Ableitungsregeln an (für Potenzen, auch mit gebrochenen Exponenten, für Summen und Differenzen, Produkte, Quotienten und verkettete Funktionen).

Im zweiten Kapitel wird erläutert, wie man eine Tangente an eine Kurve bestimmen kann (nämlich als diejenige Seite des o. a. Polygons, die am betrachteten Punkt liegt). Die Bestimmung von Maxima und Minima folgt im dritten Kapitel.

Das vierte Kapitel beginnt mit der Einführung der 2. Ableitung und beschäftigt sich mit Wendepunkten und Spitzen (singuläre Punkte).

In den folgenden vier Kapiteln werden – unterstützt durch zahlreiche Abbildungen – Krümmung und Krümmungskreis, Evoluten (= Bahn des Mittelpunkts des Krümmungskreises), Hüllkurven u. Ä. untersucht.

Schließlich folgt im letzten Kapitel unter dem schlichten Titel

- *Lösung einiger Probleme, die von den zuvor behandelten Methoden abhängen*,

u. a. die Regel, die heute den Namen L'Hôpitals trägt.

Er erläutert diese Regel anhand zweier Beispiele:

Beispiel 1

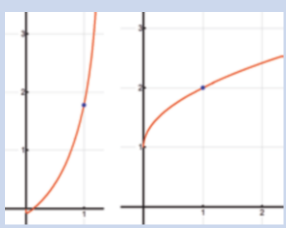
Bei der Funktionenschar mit $f_a(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\cdot\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ nehmen Zähler- und Nennerfunktion für $x = a$ den Wert 0 an.

Für die Ableitungen ergibt sich $z'(x) = \frac{a^3 - 2x^3}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{a^2}{3\cdot\sqrt[3]{ax^2}}$ mit $z'(a) = -\frac{4}{3}a$ und $n'(x) = -\frac{3a}{4\cdot\sqrt[4]{a^3x}}$ mit $n'(a) = -\frac{3}{4}$. Hieraus ergibt sich $\lim\limits_{x\to a} f_a\left(x\right) = \frac{16}{9}\cdot a$. Die Graphen der Schar können also durch den Punkt $\left(a\middle|\frac{16}{9}a\right)$ stetig ergänzt werden.

Beispiel 2

Bei der Funktionenschar mit $g_a(x) = \frac{a^2 - ax}{a - \sqrt{ax}}$ liegt eine Definitionslücke an der Stelle $x = a$ vor. Für die Ableitungen ergibt sich $z'(x) = -a$, also auch $z'(a) = -a$, und $n'(x) = -\frac{a}{2\cdot\sqrt{ax}} = -\frac{\sqrt{a}}{2\cdot\sqrt{x}}$ mit $n'(a) = -\frac{1}{2}$. Hieraus ergibt sich $\lim\limits_{x\to a} g_a(x) = 2\cdot a$. Die Graphen der Schar können also durch den Punkt $(a|2a)$ stetig ergänzt werden.

Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils einen Graphen der beiden Funktionenscharen für $a = 1$, also links mit $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = \frac{16}{9}$, rechts mit $\lim\limits_{x\to 1} g_1(x) = 2$.



1.3 Brook Taylor (1685–1731) – Entdecker von Regeln für die Analysis

► Einer der wichtigsten Sätze der Differenzialrechnung ist nach dem englischen Mathematiker Brook Taylor benannt, auch wenn dieser den Satz nicht in der Formulierung verwendet hat, wie es heute üblich ist und wie er noch vor einigen Jahren Thema des Unterrichts in Mathematik-Leistungskursen war. In seinem (vergleichsweise) nur kurzen Leben lieferte er zahlreiche Beiträge zur Mathematik.

Es wäre nicht angemessen, Brook Taylors Rolle in der Geschichte der Mathematik nur auf den nach ihm benannten Satz zu reduzieren, dessen Grundgedanke in ähnlicher Weise und jeweils unabhängig voneinander auch bereits von Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Johann Bernoulli und Abraham de Moivre formuliert worden war.

Taylor selbst hat auch nie den Anspruch erhoben, der „Erfinder" dieses Satzes zu sein. Die Bezeichnungen *Satz von Taylor* und *Taylor'sche Reihenentwicklung* wurden im Jahr 1786 vom Schweizer Mathematiker **Simon Antoine Jean L'Huillier** geprägt, dem wir auch die „*lim*"-Schreibweise verdanken.

Zuvor hatte **Joseph-Louis Lagrange** 1772 die grundlegende Bedeutung des Satzes für die Analysis herausgestellt und die Aussage des Satzes präzisiert.

Es ist typisch für den Entwicklungsstand der Mathematik zu Beginn des 18. Jahrhunderts, dass Taylors Schrift *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* aus dem Jahr 1715 keine Überlegungen zur Konvergenz der Reihe und zur Abschätzung des Fehlers enthält. Auch erscheint die von Taylor veröffentlichte Herleitung aus heutiger Sicht umständlich und teilweise fehlerhaft, was einerseits mit der Newton'schen Fluxions-Schreibweise, andererseits mit den ungenauen Formulierungen und lückenhaften Schlussfolgerungen Taylors, aber auch mit Problemen des Setzers zusammenhängt.

Satz von Taylor

Der Funktionswert einer (beliebig oft differenzierbaren) Funktion f an der Stelle $x_0 + h$, also in der Nähe einer Stelle x_0, kann mithilfe des Funktionswerts $f(x_0)$ und den Werten der Ableitungen $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, … an dieser Stelle durch eine Reihenentwicklung ermittelt werden, konkret (in heutiger Schreibweise):

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2}\cdot f''(x_0) + \frac{h^3}{6}\cdot f'''(x_0) + \ldots$$

Beispiel

$$x_0 = 0\ ; f(x) = \sin(x):$$

$$\sin(h) = \sin(0) + h\cdot\cos(0) + \frac{h^2}{2}\cdot(-\sin(0)) + \frac{h^3}{6}\cdot(-\cos(0)) + \frac{h^4}{24}\cdot\sin(0) + \frac{h^5}{120}\cdot\cos(0) + \ldots$$

$$= h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} - \frac{h^7}{5040} + \ldots$$

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Sinusfunktion (rot) sowie die Näherungsfunktionen 1., 3., 5. und 7. Grades.

Hinweis: **Nikolaus Mercator** (1620–1687) und **James Gregory** (1638–1675) waren in den Jahren 1668 und 1671 in Europa die Ersten, die Beispiele für die Darstellung einer Funktion mithilfe einer Reihenentwicklung angeben konnten – über 300 Jahre nach dem indischen Mathematiker **Madhava von Sangamagramma** (1340–1425), vgl. *Geschichten aus der Mathematik*, Abschn. 5.6.

Nikolaus Mercator (nicht zu verwechseln mit dem Kartografen und Mathematiker Gerardus Mercator) ermittelte eine Reihenentwicklung für die natürliche Logarithmusfunktion:

- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{4}\cdot x^4 + \frac{1}{5}\cdot x^5 - + \ldots$ für $|x| < 1$.

James Gregory zeigte, dass für die Umkehrfunktion der Tangensfunktion gilt:

- $\arctan(x) = x - \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{5} \cdot x^5 - \frac{1}{7} \cdot x^7 + \ldots$ für $|x| < 1$.

Beide Reihenentwicklungen gelten auch für den rechten Randwert, also für $x = 1$, wie gesondert bewiesen werden muss – Leibniz zeigte 1673, dass für die Reihenentwicklung der Arkustangens-Funktion gilt: $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Beide Reihenentwicklungen ergeben sich jeweils durch gliedweises Integrieren von geometrischen Reihen:

Aus $\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + \ldots \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots \end{aligned}$$

und aus $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + (-x^2)^4 + \ldots \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - + \ldots \end{aligned}$$

Hinweis: Am Ende der Ausführungen über Brook Taylor wird in einer Ergänzung erläutert, wie zu Beginn des 18. Jahrhunderts – ausgehend von der Gregory-Leibniz-Reihe – Näherungswerte von π berechnet wurden.

Zur Person Brook Taylors

Brook Taylor wurde am 18. August 1685 im Hause einer wohlhabenden Familie in Edmonton (Nähe London) geboren. Bis zu seinem 17. Lebensjahr erfolgte sein Unterricht durch Hauslehrer; der strenge Vater legte Wert darauf, dass hierbei Kunst und Musik eine besondere Rolle spielten.

1703 trat Brook Taylor in das *St. John's College* in Cambridge ein. Obwohl Taylor auf Wunsch des Vaters den universitären Abschluss als *Bachelor* und *Doctor of Laws* anstrebte und 1709 bzw. 1714 auch erreichte, spielte die Mathematik während seines Studiums eine wichtigere Rolle.

1708 verfasste er einen Beitrag über Schwingungsmittelpunkte von Körpern, der allerdings erst 1714 veröffentlicht wurde und einen heftigen, lebenslangen Prioritätsstreit mit **Johann Bernoulli** hervorrief.

Bereits 1712 wurde er auf Empfehlung von **John Machin** (1680–1751), mit dem er sich während seines Studiums angefreundet hatte, als Mitglied in die *Royal Society* aufgenommen und als Mitglied der Kommission, die den Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz entscheiden sollte. Taylor war jedoch – wie die Mehrzahl der Kommissionsmitglieder – zu befangen, um ein unparteiisches Urteil abgeben zu können. Von 1714 bis 1718 übernahm Taylor sogar die einflussreiche Position als Sekretär der *Royal Society*, musste dann aber das Amt aus Gesundheitsgründen aufgeben.

Im Jahr 1715 veröffentlichte Taylor seine bedeutendste Schrift *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Diese enthielt außer dem später nach ihm benannten Satz selbst eine Reihe von erstaunlichen Anwendungen, u. a. die Untersuchung der Abhängigkeit der Frequenz einer schwingenden Saite von der Spannung der Saite, von deren Gewicht und deren Länge, sowie den Ansatz, wie man mithilfe von Differenzengleichungen Näherungslösungen von Differenzialgleichungen finden kann (*calculus of finite differences*).

Neben diesem Werk ist insbesondere die Schrift *Linear Perspective, or: A New Method of Representing Justly All Manner of Objects as They Appear to the Eye in All Situations* aus dem Jahr 1715 hervorzuheben. Als Erster gab Taylor eine formale Definition eines Fluchtpunkts (*vanishing point*) an und erläuterte, wie die zugehörigen geometrischen Konstruktionen durchgeführt werden sollten. Auch löste er das Umkehrproblem, also wie man aus dem perspektivischen Bild eines Quaders Hauptpunkt und Distanz der Perspektive sowie die wahre Größe der Seitenflächen bestimmen kann.

Diese erste *mathematische* Abhandlung der Methode der perspektivischen Darstellung ist allerdings sehr knapp gefasst und nicht nur wegen seines Definition-Satz-Beweis-Stils für Künstler schwer verständlich. Taylor selbst gab vier Jahre später eine erweiterte Fassung heraus, und nach seinem Tod bemühten sich verschiedene Bearbeiter um eine bessere Lesbarkeit; insgesamt erschien dieses Werk zur Perspektive in 22 Auflagen und wurde auch ins Französische und ins Italienische übersetzt.

Zwischen 1712 und 1724 veröffentlichte Taylor 13 Beiträge zur mathematischen Theorie physikalischer Phänomene wie beispielsweise Kapillarität (Verhalten von Flüssigkeiten in engen Röhren) oder magnetische Anziehungskraft.

Trotz seiner uneingeschränkten Parteinahme für Newton und der vergifteten Atmosphäre zwischen den englischen und den kontinentalen Mathematikern freundete er sich mit dem französischen Mathematiker **Pierre Rémond de Montmort** (vgl. Abschn. 1.8) an und hatte einen regen Briefwechsel mit ihm. Auch vermittelte er im Prioritätsstreit zwischen Montmort und **Abraham de Moivre** und gab beiden Anregungen zur gemeinsamen Lösung des Springer-Problems.

Brook Taylor starb am 29. Dezember 1731 – er erreichte damit nur ein Alter von 46 Jahren. Seine labile Gesundheit wurde zusätzlich durch Schicksalsschläge beeinträchtigt: Sein Vater war mit der Wahl von Brooks erster Ehefrau nicht einverstanden, da sie zwar aus gutem Hause stammte, aber unvermögend war; der Vater brach nach der Eheschließung sämtliche Kontakte zu seinem Sohn ab.

Nachdem die Ehefrau bei der Geburt des ersten Kindes gestorben war und dann auch das neugeborene Kind, versöhnte er sich wieder mit dem Vater. Taylor ging eine zweite Ehe ein (der Vater war diesmal mit der Wahl einverstanden). Als der Vater im Jahr 1729 starb, hinterließ er dem kränkelnden Sohn die Mühen der Verwaltung eines großen Grundbesitzes. Aber auch die zweite Ehe endete 1730 mit dem Tod der Ehefrau bei der Geburt des ersten Kindes; die Tochter überlebte.