ANÁLISIS VECTORIAL

Volumen I: Vectores

J. J. SCALA ESTALELLA

EDITORIAL REVERTÉ

Colección de física aplicada e informática

Bajo la dirección de Juan José Scala Estalella

Doctor Ingeniero Industrial
Licenciado en Informática
Director del Departamento de Física Aplicada
en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
de la Universidad Politécnica de Madrid

Volúmenes de esta colección:

—Análisis Vectorial Volumen I: Vectores, **J. J. Scala**
—Análisis Vectorial Volumen II: Campos, **J. J. Scala**

Análisis vectorial

Volumen I: Vectores

PROFESOR JUAN JOSÉ SCALA ESTALELLA

Doctor Ingeniero Industrial
Licenciado en Informática
Director del Departamento de Física Aplicada
en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
de la Universidad Politécnica de Madrid

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Edición en español:
© Editorial Reverté, S. A.

Edición en papel, 1988

ISBN: 978-84-291-4347-8 Obra completa
ISBN: 978-84-291-4348-5 Volumen 1
ISBN: 978-84-291-4349-2 Volumen 2

Edición en e-book (PDF), 2024

ISBN: 978-84-291-9077-9

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
Tel: (34) 93 419 33 36
08029 Barcelona. España
reverte@reverte.com
reverte.com

1067

A Conchita.

Prólogo

Es frecuente observar que los textos de Física General y, más concretamente, los de Mecánica, se inician con algún capítulo de cálculo vectorial. Naturalmente, esto no es justificable por la carencia de excelentes tratados sobre esta parte de la matemática, ya que son muchos los libros que, con los títulos de Cálculo Vectorial o Análisis Vectorial, desarrollan estos temas con la extensión y profundidad, que cada lector pueda desear.

Tampoco cabe pensar que la causa sea un vacío curricular en la preparación de los estudiantes. Cuando éstos llegan a un curso de Física a nivel de primer ciclo universitario, conocen los espacios y operaciones vectoriales por estudios anteriores.

Quizá podríamos justificarlo meramente por la tradición. Es bien sabido que las tradiciones tienen mucho peso en la enseñanza y no pocas de ellas sobreviven a la agitación de las aguas que, de vez en cuando, y no con escasa frecuencia, provoca la legislación educativa. No obstante, cuando una tradición permanece a lo largo del tiempo, suele tener raíces profundas, que conviene analizar.

No creemos que tampoco se deba al simple hecho de que los profesores de Física tengan especial empeño en construirse sus propias herramientas, como los antiguos artesanos. Según eso debería observarse análogo empeño respecto a otros instrumentos, tan necesarios como el cálculo diferencial e integral, las ecuaciones diferenciales o las funciones de variable compleja. Y no ocurre así o, al menos, no ocurre con igual frecuencia.

Meditando sobre todo ello, cabe pensar que se deba a un cierto gusto de presentación. Un mismo objeto puede ofrecer distintos matices, si le contempla desde diversos ángulos, y esa visión lo puede hacer más o menos encajable en determinado entorno. Hablamos, claro está, de un mismo objeto, pero esto no excluye que un observador apresurado, o que no se ha aproximado suficientemente, piense que se trata de objetos distintos, lo cual es más grave.

La presentación del cálculo vectorial ha evolucionado desde una visión geométrica a un enfoque más estructuralista, con la elegancia que ello comporta, la potente generalización que permite y la abstracción que exige. En principio, todo ello es positivo, pero no debe excluirse que, a la hora de su utilización en niveles relativamente elementales, pueda presentar algunos inconvenientes.

Desde nuestro punto de vista, es importante evitar que los alumnos, con frecuencia agobiados por la extensión de los contenidos y con poco tiempo para la reflexión, lleguen a pensar que se trata de objetos distintos. En su tendencia a clasificar los saberes por asignaturas, pueden colocar en distintos continentes los "segmentos orientados" y los "entes de n componentes, que se transforman de cierta manera en un cambio de referencia", o "el coseno definido sobre la circunferencia trigonométrica" y "el cociente entre el escalar asociado a dos vectores y los módulos de los mismos"... et sic de ceteris.

Hemos pretendido, aunque no sabemos si lo hemos conseguido, que el lector tenga la oportunidad de contemplar algunos contenidos desde dos, o más, puntos de vista. El tributo que hay que pagar para ello son ciertas quiebras metodológicas que, por otra parte, no se intentan disimular. Así confiamos que no produzca excesivo escándalo la aparición de las palabras "módulo" y "distancia" en el capítulo fundamentalmente dedicado al *espacio afín, o del "coseno" al contemplar la proyección geométrica de un vector, antes del parágrafo reservado al espacio vectorial métrico.*

Se ha prestado especial atención a algunas operaciones vectoriales, por la importancia que presentan en Mecánica y su frecuente uso. Por ejemplo, el giro en torno a un eje no es representable por un vector. Pero el estudiante puede quedar sorprendido por que lo sean las velocidades angulares, que son giros referidos al tiempo. Se ha justificado que los giros infinitamente pequeños pueden ser representados por vectores, por lo que también lo son las velocidades angulares.

Las coordenadas que se estudian son sólo las cartesianas, cilíndricas y esféricas, por ser las de uso más frecuente en Física. Un estudio completo de las coordenadas curvilíneas y los conceptos de contravariancia y covariancia saldría fuera del marco que nos hemos fijado. Por ello se han normalizado las referencias naturales. Se han incluído las coordenadas baricéntricas, por su estrecha relación con la geometría de las masas, aparte de otros usos, que de ellas se hace, por ejemplo, en química y metalurgia para representar la evolución de mezclas binarias y ternarias.

Los vectores deslizantes son imprescindibles en la formulación de la mecánica de los sistemas indeformables. Algo menos se utilizan los vectores ligados. Para su estudio se ha adoptado el lenguaje que actualmente emplea la teoría de conjuntos, con el que los estudiantes están cada vez más familiarizados.

Finalmente las funciones vectoriales de una y dos variables son de uso obligado en la estática y dinámica del punto material libre o ligado a líneas y superficies, así como a la estática de hilos sobre superficies lisas. Solamente se alcanzan los conceptos de geometría diferencial, que se ofrecen cómodamente accesibles, sin pretender adentrarse en esta rama de la

Matemática y, mucho menos, en la generalización a espacios de Riemann.

Desde el primer momento se ha procurado que el libro resulte de lectura cómoda, de una lectura que permita pensar, pero que no obligue a calcular. Por ello se ofrecen al lector los desarrollos algebraicos, evitando las consabidas expresiones: - "después de algunas transformaciones elementales, se obtiene fácilmente que..." ó "cuya resolución dejamos al cuidado del lector para llegar a...". Hemos preferido dárselo hecho, pensando que, de no estar interesado, bastará que lo subrevuele, pasando una o varias páginas. Siempre es esto menos penoso que tenérselas que escribir.

Hay, no obstante, una razón más de fondo en relación con la población discente. Una larga experiencia nos ha descubierto que gran número de estudiantes sufren el espejismo de entender una asignatura, una lección o un teorema, cuando han logrado - justificar todos los pasos algebraicos, que conducen a la última igualdad, como si atravesasen un río por un punto de barcas, apoyando cuidadosamente cada tablero hasta alcanzar la - otra orilla. Esta operación no siempre comporta tener una idea clara de la necesidad de cruzar el río, destino del viaje, rutas alternativas o, al menos, recrearse unos momentos con el - paisaje que desde la nueva orilla se descubre. Pues bien, para no distraerlos de estos encantos, les damos los puentes tendidos. Esperamos que su atención se fije en horizontes de mayor altura.

Los problemas que se incluyen, de distinta complejidad, están totalmente desarrollados. El lector decidirá, de acuerdo con sus intereses y su propia estrategia de estudio si le conviene entrar directamente en su lectura, esbozar su planteamiento o resolverlos por su cuenta. La tipología de dificultades, - que puede presentarse a cada usuario de este material escrito, puede ser muy variada. No es sustituíble la labor personal de - diagnóstico y búsqueda del adecuado remedio, bien releyendo con *mayor atención la teoría presentada, bien acudiendo a otras fuentes, que proporcionen la ayuda necesaria.*

Está en preparación un segundo volumen en el que, fundamentalmente se estudien la teoría de campos y el potencial, tan importantes en la gravitación, en el electromagnetismo y en dinámica de fluídos. Entre tanto, adelantamos éste, esperando que pueda ser de utilidad.

Cuando después de muchos años de actividad docente, se recogen cientos de notas, apuntes, demostraciones, ejercicios y experiencias, para ofrecerlas en forma de libro, resulta difícil recordar a todos los que, en mayor o menor grado, contribuyeron a crear el material. Siempre recibí con interés desde la pregunta aislada de un alumno, quizá por él olvidada, pero que provocó una reflexión, hasta las valiosas aportaciones de muchos colegas y colaboradores. Para todos los que, a lo largo de más de un cuarto de siglo, me hicieron una observación, rectificaron un error o apuntaron un consejo, tendré siempre un recuerdo agradecido, porque me dieron lo mejor.

Por concretarme a aquéllos, que trabajaron conmigo en una primera etapa de su formación docente e investigadora, a los que la vida ha conducido luego por distintos caminos, y que hoy son Catedráticos de Universidad, debo citar a los profesores D. Román Riaza, D. Luis Ortiz, D. Angel María Sánchez Pérez, D. Mariano Artés, D. Francisco Aparicio y los hermanos José María y Carlos Bastero.

También agradezco el ánimo que el Dr. Carrascal me ha dado para desempolvar antiguo material escrito, homogeneizando notaciones y nomenclaturas, y ponerlo al servicio de los estudiantes. Ha sido una forma amable de recordarme una obligación, mientras él ha dedicado buena parte de su tiempo a las necesarias gestiones para su publicación.

El proceso tenía que cerrarse con un trabajo artesanal, casi diría artístico, para convertir manuscritos y figuras en texto legible. Esta labor, compleja y delicada, la ha realizado en un tiempo increíblemente corto Daniel Arias, cuyo esfuerzo y dedicación merecen todo mi reconocimiento.

Agradezco también a D. Felipe Reverté el interés que ha puesto en la obra y las facilidades dadas para su edición.

JUAN JOSE SCALA

Índice analítico

PÁGINA

PÁGINA

Capítulo I

Vectores en el espacio afín

El contenido de este libro se limita a estudiar los entes matemáticos de orden cero (escalares) y orden uno (vectores), en el espacio euclídeo de la geometría ordinaria (3 dimensiones) y los correspondientes subespacios, también euclídeos, que son el plano (2 dimensiones) y la recta (1 dimensión).

Por ello, en lugar de construir el espacio vectorial y, a partir de él, definir el espacio afín de puntos y, posteriormente, el espacio métrico, dado el carácter elemental de esta obra, partiremos del espacio de la geometría ordinaria y sus subespacios euclídeos (plano, línea recta) o no euclídeos (superficie, línea curva). Fundamos la métrica en la idea intuitiva de distancia entre dos puntos (módulo de un vector) y ángulo de dos semirrectas, sin perjuicio de generalizar y formalizar estos conceptos, a fin de preparar al lector al estudio de tratados más avanzados sobre estas materias.

§1. Vectores: sus elementos

En este planteamiento inicial, admitiremos como conceptos intuitivos el espacio tridimensional ordinario, los de punto, recta y plano, así como el de distancia entre dos puntos. Llamaremos $\mathbb{E}$ al conjunto de los puntos de este espacio, $\mathbb{\Delta}$ al conjunto de rectas y $\mathbb{\Pi}$ al conjunto de planos. Dados dos puntos ($A \in \mathbb{E}$ y $B \in \mathbb{E}$), la distancia entre ellos la denotaremos por $\overline{AB}$, que se leerá "longitud del segmento AB". Por lo tanto, $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Dos puntos determinan una recta y tres puntos determinan un plano. En otras palabras, aceptamos que tres puntos están siempre contenidos en un espacio euclídeo bidimensional (plano), y dos de ellos siempre lo están en uno unidimensional (recta). Si más de tres puntos están contenidos en un mismo plano, diremos que son *coplanarios* y si más de dos están contenidos en una misma recta, diremos que están *alineados*.

El paralelismo entre rectas puede definirse, en sentido estricto, diciendo que dos rectas paralelas son dos rectas coplanarias que no tienen ningún punto común. Esta definición de paralelismo no constituye una relación de equivalencia en el conjunto $\mathbb{\Delta}$, ya que no se cumple la propiedad reflexiva (una recta no es paralela a sí misma, pues tiene infinitos puntos comunes consigo misma), aunque se satisfacen las propiedades simétrica (si una recta es paralela a otra, ésta lo es a la primera) y transitiva (si una recta es paralela a otra, y ésta lo es a una tercera, la primera es paralela a la tercera).

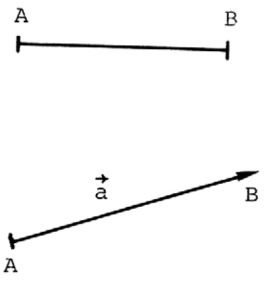
Definiremos, pues, que rectas paralelas, en sentido amplio, son *dos rectas coplanarias que no tienen ningún punto común, o los tienen todos*. Si se prefiere, son *dos rectas coplanarias que no tienen un único punto común*. Esta definición, por satisfacer las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, constituye una relación de equivalencia $\mathscr{L}$ en el conjunto $\mathbb{\Delta}$ de las rectas del espacio.

Los elementos de conjunto cociente $\mathbb{P} = \mathbb{\Delta}/\mathscr{P}$ son las clases de equivalencia definidas en $\mathbb{\Delta}$ por la relación $\mathscr{P}$. A la propiedad característica de estas clases la llamaremos *dirección* de una recta. Designaremos con esta misma letra $\mathbb{P}$ al conjunto de las direcciones del espacio.

Formamos el producto cartesiano del conjunto $\mathbb{E}$ por sí mismo. Los elementos del conjunto $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ son pares *ordenados* de puntos, distintos o no, por ejemplo, (A,B), (A,C), (B,C), (C,B), (B,B), etc. Llamamos $(\mathbb{E} \times \mathbb{E})^*$ al subconjunto constituído por los elementos no diagonales del conjunto $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$; los elementos de $(\mathbb{E} \times \mathbb{E})^*$ son pares ordenados de puntos no coincidentes y constituyen el conjunto de los vectores ligados no nulos $\mathbb{L}^* = (\mathbb{E} \times \mathbb{E})^*$. Si a este conjunto se le añade un elemento llamado vector nulo $\vec{0}$, se tiene el conjunto de los vectores ligados del espacio $\mathbb{L} = \{\mathbb{L}^*, \vec{0}\}$.

Nótese que es esencial el carácter ordenado del par, a diferencia de lo que ocurre con un segmento de la geometría métrica no vectorial. Al aludir a un segmento, es indiferente el orden en que se citan los dos puntos que lo limitan, $\overline{AB}$ ó $\overline{BA}$; una misma palabra (extremos del segmento) designa a ambos y un mismo grafismo sobre el dibujo se utiliza para ellos.

Al ser el vector ligado un par ordenado de puntos, deja de existir la simetría que el segmento tiene respecto a su mediatriz. Al primero A se le llama *origen* y al segundo B, *extremo*. En el dibujo se señala éste por una punta de flecha. En la escritura puede utilizarse la notación de Grassmann, escribiendo el origen y el extremo con una flecha encima $\overrightarrow{AB}$, que ya no es igual a $\overrightarrow{BA}$, o una le-



tra minúscula, también con flecha encima $\vec{a}$, o en caracteres especiales, generalmente negritas **a**. Por todo ello, se puede definir el vector ligado no nulo como un *segmento orientado*.

La recta que determinan el origen y el extremo de un vector ligado no nulo, se denomina *recta soporte* o, simplemente, *soporte* del vector. A la dirección de esta recta se le llama también *dirección* del vector. La longitud $\overline{AB}$ se llama *módulo* del vector, notado $|\overrightarrow{AB}|$ ó $|\vec{a}|$.

Establecemos la siguiente relación binaria entre los elementos del conjunto $\mathbb{L}^*$: dos vectores están relacionados, si tienen el mismo origen. Resulta inmediato verificar que se trata de una relación de equivalencia, pues se satisfacen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. La llamaremos relación de equivalencia $\mathcal{O}$. Los elementos del conjunto cociente $\mathbb{L}^*/\mathcal{O}$ son las clases constituídas por los vectores con un origen común. Por ello, este conjunto cociente es biyectable con el conjunto E de los puntos del espacio $\mathbb{L}^*/\mathcal{O} \longleftrightarrow \mathbb{E}$.

Consideramos ahora esta relación binaria entre los elementos de $\mathbb{L}^*$: dos vectores están relacionados si tienen la misma recta soporte. Es también evidente que se trata de una relación de equivalencia $\mathcal{S}$. Los elementos de $\mathbb{L}^*/\mathcal{S}$ son las clases constituídas por los vectores con un mismo soporte, por lo que es biyectable con el conjunto Δ de las rectas del espacio $\mathbb{L}^*/\mathcal{S} \longleftrightarrow \Delta$.

Una tercera relación binaria entre los elementos de $\mathbb{L}^*$ sería ésta: dos vectores están relacionados si tienen la misma dirección. También es, como ya vimos, una relación de equivalencia $\mathcal{P}$. El conjunto cociente $\mathbb{L}^*/\mathcal{P}$ es biyectable con el conjunto $\mathbb{P}$ de las direcciones del espacio, o con el conjunto de las rectas que pasan por un determinado punto $\mathbb{L}^*/\mathcal{P} \longleftrightarrow \mathbb{P}$.

Consideramos finalmente como relación binaria entre los elementos de $\mathbb{L}^*$ la siguiente: dos vectores están relacionados si tienen el mismo módulo. Es también relación de equivalencia $\mathcal{M}$, y el conjunto cociente $\mathbb{L}^*/\mathcal{M}$ es biyectable con el de - los números reales positivos $\mathbb{L}^*/\mathcal{M} \longleftrightarrow \mathbb{R}^+$.

Efectuamos ahora en $\mathbb{L}^*$ la partición cruzada de las relaciones $\mathcal{O}$, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{D}$, es decir, la relación de equivalencia intersección $\mathcal{O} \cap \mathcal{M} \cap \mathcal{D}$. Las clases del conjunto cociente $\mathbb{L}^*/(\mathcal{O} \cap \mathcal{M} \cap \mathcal{D})$ están constituídas por los vectores que tienen el mismo origen, módulo y dirección. Resulta fácil comprobar que cada una de estas clases contiene sólo dos vectores. En efecto, fijado el origen A y el módulo m, el extremo tiene que estar situado sobre una esfera de centro A y radio m; pero al dar una dirección concreta, queda seleccionado un diámetro BC de esta esfera, con lo que los únicos vectores que satisfacen las condiciones son el $\overrightarrow{AB}$ y el $\overrightarrow{AC}$.

Para diferenciarlos se establece una nueva característica del vector, *el sentido*, de tal manera que se dice que ambos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen el mismo origen, módulo y dirección, pero *distinto sentido*. Por ello, *el origen*, *el módulo*, - *la dirección y el sentido son los elementos característicos de un vector ligado no nulo.*

El vector nulo *sólo* tiene *determinado uno* de estos cuatro elementos: su módulo, que es igual a *cero*.

En el contexto que lo hemos presentado, la coincidencia u oposición de sentidos sólo es predicable entre vectores con origen, módulo y dirección común. Es usual extender el concepto entre vectores con soporte común, y entre vectores con la - misma dirección.

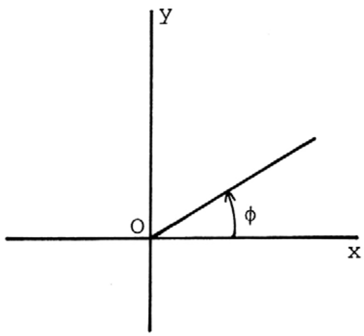
Los criterios son los siguientes: dados dos vectores - con la misma recta soporte, se deslizan sobre dicha recta soporte hasta hacer coincidir sus orígenes; una vez efectuado -

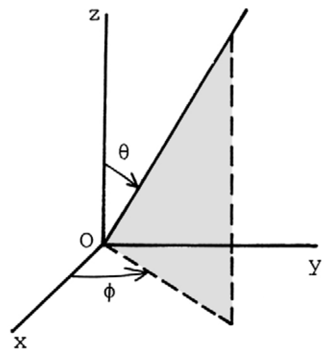
este movimiento se observa si sus extremos pertenecen a la misma o distinta semirrecta de las dos que sobre el soporte determina el origen común; en el primer caso, su sentido es el mismo; en el segundo tienen sentidos opuestos. Cuando sus soportes son dos rectas paralelas distintas, es decir, tienen dirección común y soportes distintos, se unen los dos orígenes por una recta, que divide en dos semiplanos al plano que contiene a ambos vectores; si los extremos caen en el mismo semiplano, se dice que los vectores tienen el mismo sentido y, en caso contrario, sentidos opuestos. La coincidencia u oposición de sentido sólo se predica de vectores que tienen la misma dirección.

Digamos que al origen de un vector se le denomina con frecuencia *punto de aplicación*, y a su recta soporte se la denomina *línea de acción*. Sin embargo, hablar de su *magnitud* al referirse a su módulo es ciertamente desaconsejable.

Desde el punto de vista analítico, el origen de un vector se determina por medio de las tres coordenadas cartesianas respecto a una referencia. No insistimos en ello, porque suponemos conocida por el lector la geometría analítica elemental, y porque los sistemas de coordenadas serán estudiados más adelante. El módulo es, simplemente, un número real positivo para cualquier vector no nulo.

En cuanto a la dirección y el sentido suelen determinarse conjuntamente por medio de los parámetros que definen una semirrecta. En el plano, basta con un parámetro angular ϕ con variación $0 \leq \phi < 2\pi$. En el espacio, una semirrecta queda determinada por dos parámetros angulares, cuya definición estudiaremos con más detalle en las coordenadas esféricas. La variación de estos ángulos, que se presentan en la figura, es $0 < \theta < \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. El primer intervalo es abierto, pues para $\theta = 0$, $\theta = \pi$ no está determinado el ángulo ϕ. No obstante, al único efecto de determinar semirrectas, es decir, dirección y sentido, pue-



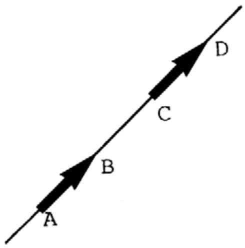


de entenderse que $\theta=0$ y $\theta=\pi$ son suficientes para determinar las dos semirrectas que constituyen el tercer eje cartesiano positivo y negativo respectivamente.

§2. Vectores ligados, deslizantes y libres

En el parágrafo precedente hemos definido el conjunto $\mathbb{L}$ de los vectores ligados del espacio. Estos vectores, salvo el vector nulo, quedan determinados por su origen, módulo, dirección y sentido. Dos vectores que difieran, al menos, en una de estas características, son distintos. La teoría que estudia sus relaciones a partir de este supuesto se llama *teoría de vectores ligados*.

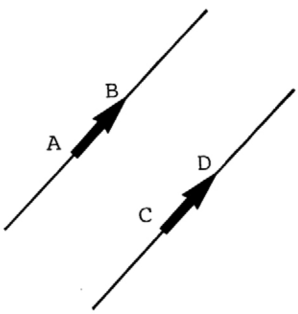
Menos restrictivo es el concepto de vector deslizante. Para introducirlo, definimos en el conjunto de los vectores ligados no nulos $\mathbb{L}^*$ la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{D}$: *dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ no nulos son equivalentes cuando tienen la misma recta soporte, el mismo módulo y el mismo sentido.* El carácter de relación de equivalencia es inmediato. El conjunto cociente $\mathbb{D}^* = \mathbb{L}^*/\mathcal{D}$ constituye el conjunto de los *vectores deslizantes* no nulos del espacio.



Si se orienta la recta soporte, es decir, se define en ella un sentido positivo, cada vector no nulo de ella puede caracterizarse por un número real no nulo, de valor absoluto igual al módulo del vector, y signo positivo o negativo según que el sentido del vector coincida o no con el elegido como positivo sobre la recta soporte. Queda, pues, definida la biyección $\mathbb{D}^* \longleftrightarrow \Delta \times \mathbb{R}^*$.

Si al conjunto $\mathbb{D}^*$ se añade un vector nulo $\vec{o}$, se tiene el conjunto de los vectores deslizantes del espacio $\mathbb{D} = \{\mathbb{D}^*, \vec{o}\}$. La teoría que estructura las relaciones vectoriales suponiendo que un vector se caracteriza por su recta soporte, módulo y sentido, con independencia de su origen, se llama *teoría de los vectores deslizantes*. Los vectores deslizantes con la misma recta soporte se llaman *colineales*.

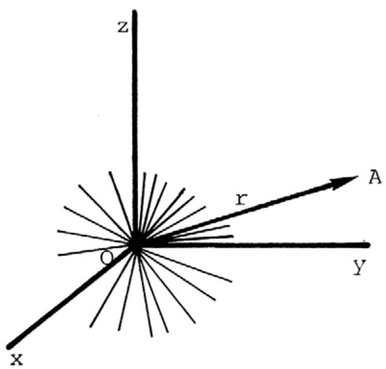
Menos restrictivo aún es el concepto de vector libre. Se define en el conjunto $\mathbb{L}^*$ la relación de equivalencia $\mathcal{V}$, cuyo carácter resulta evidente: *dos vectores $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son equivalentes cuando tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido*. El conjunto cociente $\mathbb{V}^* = \mathbb{L}^*/\mathcal{V}$ constituye el conjunto de los *vectores libres* no nulos del espacio.



Si llamamos Σ al conjunto de semirrectas con un origen común, cada una de ellas caracteriza una dirección y sentido en el espacio. Si a estas características se une el módulo no nulo, es decir, un número real positivo, se tiene individualizado un vector libre no nulo. Queda, pues, definida la biyección $\mathbb{V}^* \longleftrightarrow \Sigma \times \mathbb{R}^+$.

Si al conjunto $\mathbb{V}^*$ se añade el vector nulo $\vec{0}$, se tiene el conjunto de los *vectores libres del espacio* $\mathbb{V} = \{\mathbb{V}^*, \vec{0}\}$. El estudio de sus operaciones algebraicas constituye la *teoría de los vectores libres.*

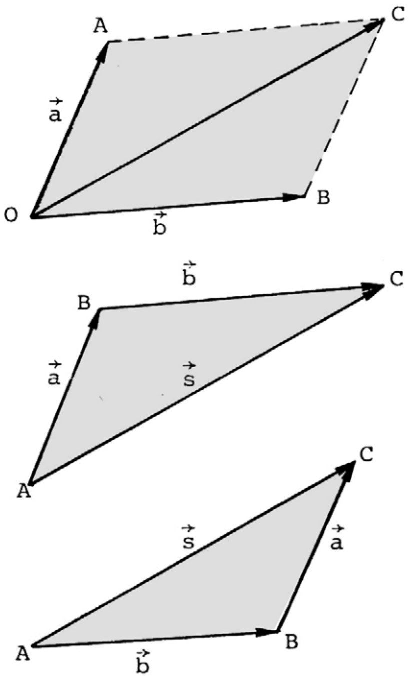
Una de las semirrectas del conjunto Σ, con origen en O, y un número real positivo $r \in \mathbb{R}^+$, determinan un punto A del espacio, distinto de O y, recíprocamente, cada punto A, distinto de O, define la semirrecta OA y el número real positivo $m=\overline{OA}$, que mide esta distancia. Se establece así una biyección entre el conjunto de los vectores libres no nulos y los puntos A del espacio, distintos de O. Si convenimos en hacer corresponder al vector nulo el punto O y, recíprocamente, queda establecida una biyección entre el conjunto $\mathbb{V}$ de los vectores libres y el conjunto $\mathbb{E}$ de los puntos del espacio $\mathbb{V} \longleftrightarrow \mathbb{E}$. La generalización de esta biyección a espacios vectoriales n-dimensionales constituye el fundamento del *espacio vectorial afín.*



En los tres primeros capítulos nos referiremos sólamente a los vectores libres, dejando para el capítulo IV el estudio de los deslizantes y ligados.

§3. Suma y diferencia de vectores

Suma de dos vectores libres $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ y $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ es otro vector libre constituído por la diagonal del paralelogramo formado con los vectores sumandos como lados contiguos y el mismo origen para los tres vectores. Se escribe:



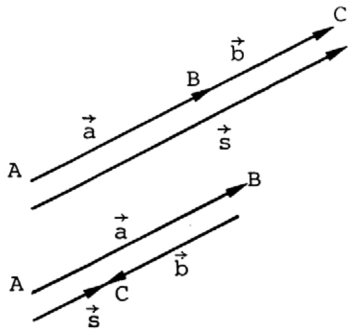
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

Por la misma definición se ve que la operación es conmutativa:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Para reiterar la operación resulta cómoda esta definición, equivalente a la dada: para sumar dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se lleva el origen del segundo a coincidir con el extremo del primero; el vector suma tiene por origen el del primer vector y, por extremo, el del segundo. Aunque se hable de "primero" y "segundo" vector, las figuras ponen claramente de manifiesto la *conmutatividad* de la operación.

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección, se define como suma otro vector $\vec{s}$ con la misma dirección que los sumandos, módulo igual a la suma de los módulos (si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo sentido) o a la diferencia (si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen distinto sentido), y



sentido coincidente en todo caso con el del sumando de módulo mayor. Aunque en este caso el paralelogramo resulta degenerado, sigue siendo aplicable la regla consistente en situar un vector a continuación del otro.

Cuando los vectores se designan por su origen y extremo, se escribe:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

que traduce la segunda definición dada de suma vectorial.

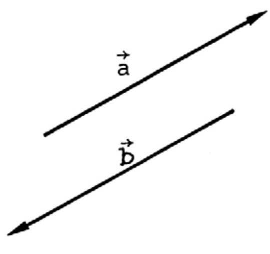
En el conjunto de los vectores libres $\mathbb{V}$ la suma constituye una *ley de composición interna definida en todo* $\mathbb{V}$.

Por la definición dada de suma, resulta:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} \qquad \text{o sea} \qquad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

es decir, *el vector nulo es el elemento neutro* para esta ley de composición interna.

De dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se dice que son *opuestos* cuando tienen igual dirección y módulo, pero sus sentidos son distintos.



Aplicando la definición de suma:

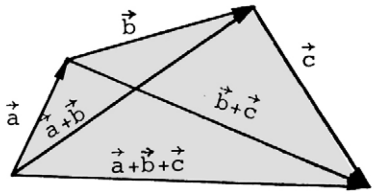
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$$

y, por analogía con los números, al vector opuesto de $\vec{a}$ se le designa $-\vec{a}$, o sea:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

Esta notación no debe llevar a la idea de que los *vectores* puedan ser *positivos* o *negativos*, como los escalares.

Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, se deduce de la figura que:



$$(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b}+\vec{c})$$

es decir, la suma vectorial posee la *propiedad asociativa* y se pueden suprimir los paréntesis sin ambigüedad:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Combinando la propiedad asociativa y la propiedad conmutativa para dos sumandos, se demuestra la propiedad conmutativa para dos sumandos no consecutivos en una suma de varios vectores. Sea permutar $\vec{b}$ y $\vec{e}$ en la suma:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{a} + (\vec{b}+\vec{c}) + (\vec{d}+\vec{e}) = \vec{a} + (\vec{c}+\vec{b}) + (\vec{e}+\vec{d}) =$$

$$= \vec{a} + \vec{c} + (\vec{b}+\vec{e}) + \vec{d} = \vec{a} + \vec{c} + (\vec{e}+\vec{b}) + \vec{d} = \vec{a} + (\vec{c}+\vec{e}) + (\vec{b}+\vec{d}) =$$

$$= \vec{a} + (\vec{e}+\vec{c}) + (\vec{d}+\vec{b}) = \vec{a} + \vec{e} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{b}$$

Se llama *diferencia* $\vec{r}$ de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ al resultado de sumar al primero el opuesto del segundo:

$$\vec{r} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

operación que se escribe:

$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b}$$