Mathematikdidaktik im Fokus

RESEARCH

Anna Körner

Flexibles Rechnen im Grundschulverlauf

Eine Längsschnittstudie zur Förderung und Entwicklung flexibler Vorgehensweisen beim Addieren und Subtrahieren

MOREMEDIA

Springer Spektrum

Mathematikdidaktik im Fokus

Reihe herausgegeben von

Rita Borromeo Ferri, FB 10 Mathematik, Universität Kassel, Kassel, Deutschland

Andreas Eichler, Institut für Mathematik, Universität Kassel, Kassel, Deutschland

Elisabeth Rathgeb-Schnierer, Institut für Mathematik, Universität Kassel, Kassel, Deutschland

In dieser Reihe werden theoretische und empirische Arbeiten zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert. Dazu gehören auch qualitative, quantitative und erkenntnistheoretische Arbeiten aus den Bezugsdisziplinen der Mathematikdidaktik, wie der Pädagogischen Psychologie, der Erziehungswissenschaft und hier insbesondere aus dem Bereich der Schul- und Unterrichtsforschung, wenn der Forschungsgegenstand die Mathematik ist.
Die Reihe bietet damit ein Forum für wissenschaftliche Erkenntnisse mit einem Fokus auf aktuelle theoretische oder empirische Fragen der Mathematikdidaktik.

Anna Körner

Flexibles Rechnen im Grundschulverlauf

Eine Längsschnittstudie zur Förderung und Entwicklung flexibler Vorgehensweisen beim Addieren und Subtrahieren

Springer Spektrum

Anna Körner
Bremen, Deutschland

Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde
eingereicht am Fachbereich 12 der Universität Bremen
Gutachterinnen:
Prof. Dr. Dagmar Bönig, Universität Bremen
Prof. Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer, Universität Kassel
Prof. Dr. Christiane Benz, Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Das Prüfungskolloquium hat am 21. Juli 2023 stattgefunden.

ISSN 2946-0174 ISSN 2946-0182 (electronic)
Mathematikdidaktik im Fokus
ISBN 978-3-658-44056-5 ISBN 978-3-658-44057-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-44057-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über https://portal.dnb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Marija Kojic
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Das Papier dieses Produkts ist recycelbar.

Geleitwort

Der Grundschulunterricht soll nicht nur dazu beitragen, dass Kinder grundlegende Rechenfertigkeiten erwerben, sondern auch flexible wie adaptive Rechenkompetenzen entwickeln. Zahlreiche Studien verweisen aber darauf, dass die meisten Grundschüler*innen einen Hauptrechenweg favorisieren, den sie unabhängig von bestimmten Zahl- und Aufgabenmerkmalen anwenden. So werden dann nach der Einführung des schriftlichen Algorithmus Aufgaben wie „202–197“ oftmals schriftlich gerechnet, ohne auf die Nähe der gegebenen Zahlen zu achten, um dann z. B. durch Ergänzen oder gleichsinniges Verändern der Zahlen zum Ergebnis zu gelangen.

Andererseits gibt es durchaus empirische Belege für sinnvolle Möglichkeiten der Förderung flexibler Rechenstrategien im Unterricht, die bislang aber maximal ein Schuljahr umfassen. Die vorliegende Dissertation von Anna Körner nimmt mit ihrer längsschnittlich angelegten qualitativen Studie erstmalig den gesamten Verlauf der Grundschulzeit in den Blick.

Sie nährt sich diesem anspruchsvollen Vorhaben durch eine systematische Aufarbeitung des theoretischen und empirischen Forschungsstands, aus denen sie sehr stringent ihre Forschungsfragen ableitet. Im Kern geht es darum, die Entwicklung der Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben von Kl. 1 bis 4 zu rekonstruieren.

Auf der Basis bereits vorliegender Materialien dokumentiert Frau Körner im Entwicklungsteil der Arbeit ihre Konzeption zur durchgängigen Förderung flexiblen Rechnens vom ersten bis zum vierten Schuljahr, die von erfahrenen Lehrkräften an drei Grundschulen in Bremen erprobt wurde. Neben den handlungsleitenden Prinzipien dieser Konzeption werden zentrale Unterrichtsaktivitäten vorgestellt, deren Auswahl sich an bedeutsamen Voraussetzungen für die Entwicklung flexiblen Rechnens orientiert.

Der Forschungsteil der Arbeit umfasst die Konzeption und Auswertung der leitfadengestützten Interviews von 21 Kindern einer Klasse zu sieben Interviewzeitpunkten (von Mitte Kl. 1 bis Mitte Kl. 4). Die eingesetzten Aufgaben sind so gestellt, dass Entwicklungen der Kinder mit Blick auf flexibles und adaptives Rechnen erfasst werden können. Die Auswertung umfasst neben aufgabenbezogenen Analysen insbesondere die Rekonstruktion fallbezogener Entwicklungen in Form einer Typologie. Die erstellten Entwicklungsprofile der kindlichen Vorgehensweisen zur Einschätzung des Verlaufs flexibler und adaptiver Rechenkompetenzen fassen die gewonnenen Erkenntnisse prägnant zusammen, so dass Muster in den unterschiedlichen Verläufen sofort augenfällig werden. Ein besonders spannendes Ergebnis stellt hier der „Rückfall“ der Kinder in nicht flexible/adaptive Vorgehensweisen in den Interviews Mitte des zweiten Schuljahres dar. Beeindruckend sind demgegenüber die Ergebnisse der letzten beiden Interviewserien. Nach der Einführung der schriftlichen Algorithmen in Kl. 3 zeigen die meisten Kindern sogar zunehmend flexiblere/adaptive Strategien.

Mai, eine Schülerin aus der Längsschnittstudie, löst die Aufgabe 202–197 im letzten Interview Mitte Kl. 4 schriftlich korrekt über die Nutzung des Entbündelns. Spannender aber ist der weitere Verlauf des Interviews. Mai wird im Anschluss gefragt, ob sie einen weiteren Lösungsweg angeben kann. Ihre Antwort verrate ich an dieser Stelle bewusst nicht, Sie können sie am Ende der Arbeit nachlesen. Und Mais Antwort macht sie dann hoffentlich neugierig auf ein Lesen des gesamten Buches.

Eine solch umfangreiche Studie hätte ich nicht als Dissertationsthema vergeben. Die vorliegende Längsschnittuntersuchung war aber für Anna Körner ein Herzensanliegen. Ihre Begeisterung dafür hat sie durch die überaus zeit- und arbeitsaufwändige Zeit von der Konzeption über die Auswertung zur Dokumentation der Ergebnisse getragen.

Mit ihrer Arbeit bringt Frau Körner innovative und bereichernde Forschungsergebnisse in die mathematikdidaktische Forschungsdiskussion ein. Nicht zuletzt belegen die herausgearbeiteten Ergebnisse, dass sich flexibles und adaptives Rechnen im Unterricht der Grundschule – im Gegensatz zu den ernüchternden Ergebnissen vieler anderer Studien – erfolgreich fördern lässt.

In diesem Sinne wünsche ich Ihnen eine spannende, inspirierende und hoffentlich genussvolle Lektüre.

Bremen
im Dezember 2023

Dagmar Bönig

Vorwort

Ebenso wie viele andere Untersuchungen hätte auch die vorliegende Studie nicht ohne die Unterstützung von vielen großartigen Menschen umgesetzt werden können. Ihnen allen gilt mein herzlicher Dank!

Allen voran danke ich meiner Doktormutter Prof. Dr. Dagmar Bönig. Während meines Studiums hat sie mit ihren tollen Lehrveranstaltungen meine Begeisterung für das mathematische Denken von Kindern befeuert und bereits im Zuge meiner Masterarbeit mein Interesse für das Thema flexibles Rechnen geweckt. Im Rahmen einer Einstellung als Lektorin an der Universität Bremen hat sie mir dann die Möglichkeit gegeben, mein Promotionsvorhaben umzusetzen und hat von Beginn an daran geglaubt, dass ich dieses umfangreiche Projekt abschließen werde. Neben der fachlichen Begleitung und all den hilfreichen Rückmeldungen während des Schreibprozesses hat auch ihre einfühlsame Art dazu beigetragen, dass meine Promotionszeit insgesamt mehr schöne als anstrengende Seiten hatte. Für all das danke ich ihr sehr!

Prof. Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer danke ich für die Bereitschaft, die Arbeit zu begutachten. Ihr Interesse an meiner Arbeit und diverse inspirierende Gespräche beispielsweise auf Tagungen haben mich immer wieder auf meinem Weg bestärkt. Vielen Dank auch für die hilfreichen Anmerkungen zum Ergebnisteil.

Ebenso danke ich Prof. Dr. Christiane Benz dafür, dass sie spontan und dann so außerordentlich schnell ein weiteres Gutachten zu dieser Arbeit verfasst hat.

Prof. Dr. Maike Vollstedt, Dr. Jonathan von Ostrowski, Bernadette Thöne und Dr. Fiene Bredow danke ich für die Bereitschaft, die Arbeit zu lesen und teil der Prüfungskommission zu sein, wodurch die Disputation zu einem schönen Abschluss meiner Promotionszeit wurde.

Für die nette Zusammenarbeit und den fachlichen Austausch danke ich all meinen Kolleg*innen der Mathematikdidaktik der Fachbereiche 03 und 12 der Universität Bremen. Die Anregungen in persönlichen Gesprächen und im Forschungsseminar haben mich immer vorangebracht. Mein besonderer Dank gilt dabei Dr. Jonathan von Ostrowski für die vielen hilfreichen Hinweise zu Vorversionen dieses Textes und vor allem für den informellen Austausch, der die Abschlusszeit so viel netter gemacht hat. Innerhalb der letzten beiden Promotionsjahre hat mich zusätzlich auch meine Schreibgruppe begleitet. Ich danke meinen Mitschreiber*innen Chryssa, Neruja, Fiene, Daniela und Erik für den fachlichen und außerfachlichen Austausch und Prof. Dr. Christine Knipping für die Organisation und Begleitung dieser Treffen. Herausheben möchte ich zudem den Einfluss von Dr. Reimund Albers. Seiner ansteckenden Begeisterung für die Mathematik in vielen tollen Vorlesungen habe ich meine Liebe zum Fach zu verdanken. Gepaart mit der Begeisterung für die Fachdidaktik hatte ich ein solides Fundament, das mich auch durch schwierigere Phasen der Promotion getragen hat.

Ich darf mich außerdem bei der Ursula-Viet-Stiftung für die finanzielle Unterstützung des Projekts bedanken, wodurch zusätzliche Interviewtranskripte erstellt werden konnten. Zudem danke ich der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, die meine Teilnahme an einem International Congress on Mathematical Education sowie an einer Nachwuchskonferenz finanziell gefördert hat.

Gute Rahmenbedingungen reichen längst nicht aus, um ein praxisbezogenes Forschungsprojekt umzusetzen. Ohne die drei fantastischen Lehrerinnen, die interessiert und mutig genug waren, ein vierjähriges Projekt in Angriff zu nehmen, hätte diese Studie nicht durchgeführt werden können. Sie haben sich auf eine neue Konzeption eingelassen, das Unterrichtsmaterial eingesetzt und dessen Weiterentwicklung durch ihre Rückmeldungen vorangebracht, diverse Interviewphasen organisatorisch in den Schulen möglich gemacht und insgesamt durch ihr außerordentliches Engagement entscheidend zum Gelingen dieser Studie beigetragen. Ich danke Ihnen sehr für die tolle Zusammenarbeit und freue mich jetzt schon auf weitere gemeinsame Projekte!

Diese umfangreiche Studie hat von Beginn an von der Unterstützung durch Studierende gelebt. Ich danke V. Batke, E. Behrends, P. Böse, M. Göcke, F. Hellmuth, C. Jäkel, J. Karstens, J. Kruse, L. Kuntze, J. Lehr, J. Lindner, P. Renken, F. Sackmann, G. Stadler und L. Waschkau für die Mitarbeit im Rahmen ihrer eigenen Studienabschlussarbeiten bzw. als studentische Hilfskräfte, wobei mein besonderer Dank Nicoletta Sack und Christina Munsberg gilt, die das Projekt weit über ihre eigenen Abschlussarbeiten hinaus unterstützt und bereichert haben.

Von zentraler Bedeutung für dieses Forschungsprojekt sind natürlich ganz besonders die Kinder der drei Projektklassen, die uns in diversen Interviews Einblicke in ihre Denkwege erlaubt und auch häufiges Nachfragen geduldig ertragen haben. Ich bin bis heute immer wieder erstaunt und begeistert von ihren tollen Erklärungen und habe sehr viel von ihnen gelernt. Allen Kindern gilt deshalb mein herzlicher Dank!

Ohne die private Unterstützung meiner Freund*innen wäre meine Promotionszeit sehr viel schwieriger gewesen. Ich danke ihnen allen (und ganz besonders Lena) für Ablenkung, kontinuierliches Aufmuntern, fleißiges Korrekturlesen, sehr wirksame Nervennahrung und so viel mehr! Abschließen möchte ich diese Danksagung in herzlichem Gedenken an meine Mutter, der ich unter anderem meine Neugier und Begeisterungsfähigkeit zu verdanken habe. Ich weiß, wie sehr sie sich über diese Arbeit gefreut hätte.

Allen Leser*innen dieser Arbeit wünsche ich ebenso viel Freude an den Vorgehensweisen der Kinder, wie ich sie selbst immer wieder empfunden habe und gewiss weiterhin empfinden werde.

Anna Körner

Einleitung

Additions- und Subtraktionsaufgaben können grundsätzlich auf sehr vielfältige Art und Weise gelöst werden. Die beiden Schülerinnen Mai[1] und Lotte erläutern in Interviews in der Mitte des dritten Schuljahres ihre Lösungswege zur Aufgabe 202–197 folgendermaßen:

> S: Ähm (2 sec) zweihundert minus eins, das ist (2 sec) das ist hundert. (3 sec) Null minus neunzig ist ja neunzig. Und zwei minus sieben, das ist (3 sec) das ist fünf. Und dann muss ich (8 sec) hundert (10 sec). Dann muss ich hundert plus fünfundneunzig nehmen (3 sec). Das ist hundertfünfundneunzig und das ist dann auch das Ergebnis.
>
> (Mai, Mitte 3, Aufgabe 202–197)
>
> S: Weil das kann man sich auch mit einem Trick vereinfachen, da/ weil da sieht man ja auch wieder, dass die Zahlen also ein bisschen nah aneinander sind und dann rechne ich hier (zeigt auf 197) plus drei, das sind zweihundert und dann hab ich hier (zeigt auf 202) noch die zwei und dann nochmal plus zwei und dann weiß ich das Ergebnis eigentlich schon.
>
> (Lotte, Mitte 3, Aufgabe 202–197)

Mai zerlegt den Minuenden und den Subtrahenden der Aufgabe in Stellenwerte und verarbeitet diese Stellenwerte einzeln. Da sie stellenweise die absolute Differenz bildet, erhält sie mit ihrem Lösungsweg ein falsches Ergebnis. Prinzipiell wäre es aber möglich, die stellengerechten Zwischenergebnisse 100, −90 und −5 zu nutzen, um die Aufgabe richtig zu lösen. Nichtsdestotrotz würden viele Erwachsene vermutlich intuitiv Lottes Weg präferieren, weil das schrittweise

[1] Zum Zwecke des Datenschutzes werden sämtliche Angaben, die einen Rückschluss auf das befragte Kind ermöglichen könnten, anonymisiert.

Ergänzen vom Subtrahenden zum Minuenden bei einer Aufgabe mit kleiner Differenz sehr geschickt ist. Genau dies macht den Grundgedanken flexiblen Rechnens aus:

> „Die Kernidee des flexiblen Rechnens besteht darin, die spezifischen Merkmale einer Aufgabe, d.h. deren Zahleigenschaften und -beziehungen zu sehen und diese so zu nutzen, dass der Lösungsprozess vereinfacht wird." (Rathgeb-Schnierer 2011a, S. 40)

In der Fachdidaktik ist die Bedeutung von Flexibilität beim Rechnen im Allgemeinen unumstritten (vgl. z. B. Baroody 2003, S. 1 ff.; Krauthausen 2018, S. 176 f.; Padberg und Benz 2021, S. 192 f.; Rathgeb-Schnierer und Rechtsteiner 2018, S. 3 ff.; Schipper 2009a, S. 130 ff.; Schütte 2008, S. 103 ff.; Schulz und Wartha 2021, S. 80 ff.; Verschaffel, Luwel, Torbeyns und van Dooren 2009, S. 335 ff.). Es gilt als erstrebenswert, dass Kinder nicht nur *eine* Möglichkeit zum Lösen von Aufgaben kennen und nutzen, sondern vielfältige Lösungswege entwickeln können und dies in Abhängigkeit von besonderen Aufgabenmerkmalen – wie beispielsweise der Nähe zwischen Minuend und Subtrahend im oberen Beispiel – tun. Dies gilt insbesondere im Zeitalter ständiger Verfügbarkeit technischer Geräte (wie bspw. Smartphones), welche jederzeit problemlos Lösungen zu Additions- und Subtraktionsaufgaben ausgeben können (vgl. auch Bauer 1998, S. 180 ff.). Die reine Befähigung zum Lösen von Rechenaufgaben greift also seit vielen Jahren als Zielsetzung für den Arithmetikunterricht zu kurz.

Hatano unterschied beispielsweise bereits 1988 zwischen ‚routine experts' und ‚adaptive experts' und sprach sich schon vor Jahrzehnten für die stärkere Förderung und Wertschätzung adaptiven Handelns aus:

> „Those who are becoming routine experts (i.e., are acquiring knowledge in a conceptual vacuum) often fixate on a single procedure, whether or not it makes sense, and care little about comprehending it. In contrast, those who are constructing adaptive expertise (acquiring meaningful knowledge) often explore a variety of possibilities and try to make sense of their actions." (Hatano 2003, S. xii)

‚Routine experts' verfügen demnach nur über ein (einseitiges) prozedurales Wissen, das gegebenenfalls nicht auf Verständnis basiert, während ‚adaptive experts' verständnisorientiert verschiedene, geeignete Lösungswege entwickeln können. Die Bedeutung konzeptuellen Wissens nimmt in der Fachdidaktik seit Jahrzehnten zu, weil Schüler*innen nicht mehr nur wissen sollen, *wie* Aufgaben korrekt gelöst werden, sondern auch *warum* die jeweiligen Wege zum Erfolg führen (vgl. Übersicht in Baroody 2003, S. 4 ff. und Diskussion in Rittle-Johnson, Schneider und Star 2015, S. 590 ff.). Dies gilt im Besonderen auch für die Entwicklung von Flexibilität. Die Förderung flexiblen Rechnens sollte also nicht nur auf das Beherrschen verschiedener geeigneter Strategien, sondern auch auf das Verständnis der zugrunde liegenden arithmetischen Gesetzmäßigkeiten abzielen. Damit kann ein sinnvoller erster Zugang zur Algebra geschaffen werden, was wiederum in propädeutischem Sinne eine Grundlage für den Algebraunterricht in weiterführenden Schulen bildet (vgl. z. B. Steinweg 2013, S. 123 ff.).

Die Relevanz der Förderung von Flexibilität im Arithmetikunterricht der Grundschule lässt sich nicht zuletzt daran festmachen, dass dies in den bundesweiten KMK-Bildungsstandards und Rahmenplänen verschiedener Länder gefordert wird. In den bis vor kurzem geltenden KMK-Bildungsstandards aus dem Jahr 2004 ist Flexibilität beim Rechnen bereits implizit enthalten, weil der Vergleich verschiedener mündlicher und halbschriftlicher Rechenstrategien und deren Anwendung bei *geeigneten* Aufgaben angesprochen wird (vgl. KMK 2004, S. 9). Die aktuellen Bildungsstandards fordern sogar explizit eine „sinntragende[.] und flexible[.] Nutzung von Rechenstrategien" (KMK 2022, S. 13) ein. Auf der Ebene der ländereigenen Lehrpläne lassen sich ebenfalls unterschiedliche Konkretisierungen finden. Während die Förderung von Flexibilität beispielsweise im Bremer Rahmenplan (2004) durchaus thematisiert wird, dies allerdings – ähnlich wie in den Bildungsstandards von 2004 – nur implizit erfolgt (vgl. Rahmenplan 2004, S. 19 ff.), wird das flexible Rechnen im nordrhein-westfälischen Lehrplan sogar als Schwerpunkt der Leitidee Zahlen und Operationen ausgewiesen (vgl. NRW 2008, S. 63; NRW 2021, S. 89). Neben den inhaltsbezogenen Kompetenzen können mit der Förderung von Vielfalt beim Rechnen zudem auch allgemeine mathematische Kompetenzen weiterentwickelt werden (vgl. KMK 2004, S. 7 f.). Wenn nicht nur die Lösung einer Aufgabe, sondern auch der Weg und im Besonderen die Vielfalt an Wegen thematisiert wird, ist ein Austausch über die unterschiedlichen Vorgehensweisen lohnend. Hierbei kann sowohl das Kommunizieren (*Wie bist du vorgegangen? Wie hat dein*e Mitschüler*in die Aufgabe gelöst?*) und Argumentieren (*Welchen Lösungsweg findest du besser? Warum?*) als auch das Darstellen gefördert werden, wenn beim Lösen auch geeignete Arbeitsmittel und Veranschaulichungen verwendet werden. Teils implizit, teils eindeutig benannt, gehört die Entwicklung flexiblen Rechnens also seit Jahren zum Kanon der Lehrpläne und Bildungsstandards.

Obwohl Flexibilität als wichtiges Ziel des Arithmetikunterrichts der Grundschule gilt, sind die Ergebnisse diverser Studien zu Vorgehensweisen von Kindern dahingehend sehr ernüchternd. Viele Schüler*innen nutzen bevorzugt ein und denselben Lösungsweg zum Lösen sämtlicher Aufgaben und variieren ihr Vorgehen nicht in Abhängigkeit von besonderen Aufgabenmerkmalen (vgl. z. B. Benz 2005, S. 194 ff.; Heinze, Grüßing, Schwabe und Lipowsky 2022, S. 366 ff.; Selter

2000, S. 245 ff.; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière und Verschaffel 2009a, S. 8 ff.). Wie im Eingangsbeispiel von Mai kommt es dabei nicht selten zu Fehlern. Hatano (1988, 2003) würde viele dieser Kinder vermutlich als ‘routine experts’ bezeichnen. Wie aber kann es gelingen, dass Kinder beim Rechnen ‘adaptive experts’ werden und beim Lösen von Rechenaufgaben – wie Lotte – besondere Aufgabenmerkmale erkennen und nutzen?

In einigen nationalen und internationalen Forschungsprojekten der letzen Jahre wurden Unterrichtskonzeptionen entwickelt, die speziell auf die Förderung von Flexibilität beim Rechnen ausgerichtet sind (vgl. z. B. Heinze, Grüßing, Schwabe und Lipowsky 2022; Nemeth, Werker, Arend, Vogel und Lipowsky 2019; Rathgeb-Schnierer 2006b; Rechtsteiner-Merz 2013). Dabei wurden sowohl Untersuchungen, die nur einige Schulwochen umfassen, als auch solche, die ein ganzes Schuljahr in den Blick nehmen, umgesetzt. Damit konnte gezeigt werden, dass die Entwicklung von Flexibilität bei gezielter Förderung durchaus schon im Grundschulalter möglich ist. Bislang fehlen aber noch längsschnittliche Studien, in denen die Entwicklung der Vorgehensweisen von Kindern über mehrere Schuljahre und Zahlenräume hinweg untersucht werden. Kann es gelingen, dass Grundschulkinder langfristig flexibel rechnen lernen? Wie verändert sich ein flexibles Vorgehen nach der unterrichtlichen Thematisierung der schriftlichen Algorithmen, die sich in anderen Studien häufig als neuralgische Stelle in der Rechenwegsentwicklung herausgestellt haben?

Um diesen Fragen nachzugehen, wird ein längsschnittliches Forschungsprojekt zur Förderung von Flexibilität im Grundschulverlauf gestaltet. Auf Grundlage bewährter Aktivitäten zur Zahlenblickschulung (vgl. z. B. Rathgeb-Schnierer 2006b, S. 148 ff.; Rechtsteiner-Merz 2013, S. 229 ff.; Schütte 2008, S. 104 ff.) sowie darauf bezogenen Weiterentwicklungen wird eine Unterrichtskonzeption zur kontinuierlichen Förderung von Flexibilität entwickelt und in Zusammenarbeit mit drei Lehrerinnen umgesetzt. Um die Vorgehensweisen der Schüler*innen beim Addieren und Subtrahieren im Rahmen dieses Unterrichts zu erfassen, werden sieben Mal im Projektzeitraum leitfadengestützte Einzelinterviews mit den Kindern durchgeführt. Anhand qualitativer Inhaltsanalyse mit darauf folgender Fallkontrastierung und Typenbildung (vgl. Kuckartz 2018, S. 63 ff.; Kelle und Kluge 2010, S. 83 ff.) sollen schließlich charakteristische Entwicklungen im Grundschulverlauf rekonstruiert werden.

Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Dissertation ist in drei Teile gegliedert.

Im ersten Teil der Arbeit werden theoretische Grundlagen zum flexiblen Rechnen entfaltet und darauf bezogene Studienergebnisse vorgestellt. Dafür werden zunächst in Kapitel 1 verschiedene Möglichkeiten zum Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben sowie deren angestrebter Stellenwert im Mathematikunterricht der Grundschule thematisiert. Eine darauf folgende Zusammenfassung wichtiger Studienergebnisse belegt eindrucksvoll, dass sich Flexibilität beim Rechnen selten ohne gezielte Förderung entwickelt. Möglichkeiten einer solchen Förderung werden daraufhin in Kapitel 2 aufgezeigt und durch diesbezügliche Forschungsergebnisse gestützt. Hierbei liegt ein besonderer Schwerpunkt auf sogenannten Aktivitäten zur Zahlenblickschulung, die sich zur Förderung von Flexibilität in Studien im ersten und zweiten Schuljahr sehr bewährt haben. In Kapitel 3 folgt eine abschließende Klärung wichtiger Begriffe sowie die Zusammenfassung relevanter Aspekte samt Konsequenzen für die vorliegende Untersuchung.

Der zweite Teil der Arbeit widmet sich der Untersuchung zur Förderung und Entwicklung von Flexibilität im Grundschulverlauf. Dafür werden zunächst im 4. Kapitel die Forschungsfragen entfaltet und das darauf aufbauende Untersuchungsdesign – bestehend aus einem Entwicklungs- und einem Forschungsteil – vorgestellt und begründet. Im folgenden 5. Kapitel wird mit der Beschreibung der Unterrichtskonzeption und deren Umsetzung der Entwicklungsteil des Forschungsprojekts thematisiert. Hier werden zunächst grundlegende Entscheidungen für den Unterricht vom ersten bis zum vierten Schuljahr dargelegt und anschließend zur Förderung von Flexibilität bedeutsame Unterrichtsaktivitäten vorgestellt. Die nächsten beiden Kapitel widmen sich dem Forschungsteil der Untersuchung. In Kapitel 6 wird zunächst erläutert, wie im Rahmen der Interviewstudie Daten erhoben werden, bevor das zur Analyse der Daten entwickelte Kategoriensystem und die darauf aufbauende Typenbildung beschrieben werden. Das anschließende Ergebniskapitel gliedert sich wiederum in zwei Abschnitte. Für einen ersten Überblick über die Daten werden im ersten Teil zunächst die Ergebnisse der deskriptiven Analysen zusammenfassend vorgestellt. Im zweiten Abschnitt – dem Kernstück der Arbeit – wird daraufhin die aus diesen Daten entwickelte Typologie beschrieben, mithilfe derer die Vorgehensweisen der Kinder gruppiert werden, sodass Entwicklungen im Grundschulverlauf rekonstruiert werden können. Beide Abschnitte des 7. Kapitels schließen jeweils mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse sowie deren Diskussion im Kontext der Resultate anderer Studien.

Das Fazit im dritten Teil der Arbeit beginnt mit einer Zusammenfassung in Kapitel 8, in der die Forschungsfragen beantwortet werden. Im abschließenden Ausblick im 9. Kapitel werden zentrale theoretische Grundlagen zur Entwicklung und Förderung von Flexibilität vor dem Hintergrund der Ergebnisse dieser Studie reflektiert, bevor schließlich Konsequenzen für den Mathematikunterricht und für weitere Forschung zum Thema formuliert werden.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Teil I

Theoretischer und empirischer Rahmen

1 Vorgehensweisen beim Addieren und Subtrahieren

Zur Beschreibung und Kategorisierung möglicher Vorgehensweisen beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben lassen sich in nationaler und internationaler fachdidaktischer Literatur verschiedene Bezeichnungen finden. In diesem Kapitel sollen deshalb zunächst die relevanten Begriffe geklärt und der Stellenwert verschiedener Vorgehensweisen im Mathematikunterricht diskutiert werden (vgl. Abschnitt 1.1 und Abschnitt 1.2). Im Anschluss erfolgt ein erster Einblick in Forschungsergebnisse zu Vorgehensweisen von Kindern (vgl. Abschnitt 1.3).

1.1 Rechenformen und deren Stellenwert im Unterricht

Beim Rechnen lassen sich zunächst übergeordnet drei verschiedene **Rechenformen**[1] unterscheiden. Als *Kopfrechnen* oder auch mündliches Rechnen wird die rein mentale Lösung einer Aufgabe bezeichnet. Wenn beim Rechnen Notizen in Form von Zwischenschritten oder Teilergebnissen gemacht werden, wird vom *halbschriftlichen Rechnen* oder gestützten Kopfrechnen gesprochen. Diese beiden Formen werden, in Abgrenzung zum schriftlichen Rechnen, unter dem Oberbegriff *Zahlenrechnen* zusammengefasst, weil hier mit Zahlganzheiten beziehungsweise deren Zerlegungen auf unterschiedliche, nicht vorab festgelegte Weise operiert wird. Das als *Ziffernrechnen* bezeichnete *schriftliche Rechnen* ist hingegen davon geprägt, dass konventionelle Algorithmen angewandt und die Ergebnisse nach festgelegten Regeln stellenweise ermittelt werden (vgl. z. B. Krauthausen 2018, S. 84 ff.; Padberg

[1] Dieser Begriff wird in Anlehnung an Rathgeb-Schnierer (2011b) verwendet, weil im weiteren Verlauf dieser Arbeit auf ein Modell der Forscherin Bezug genommen wird (vgl. Abschnitt 2.1). Andere Autor*innen verwenden bspw. die Begriffe Rechenmethoden (vgl. Krauthausen 2018, S. 84 ff.) oder Rechenverfahren (vgl. Schipper 2009a, S. 126).

A. Körner, *Flexibles Rechnen im Grundschulverlauf*, Mathematikdidaktik im Fokus,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-44057-2_1

und Benz 2021, S. 105; Rathgeb-Schnierer 2011b, S. 16; Schipper 2009a, S. 126; Selter 2000, S. 228). In der englischsprachigen Literatur werden Kopf- und halbschriftliches Rechnen häufig unter *mental calculation* oder *oral calculation* zusammengefasst und als Zahlenrechnen von den *written/standard algorithms* unterschieden (vgl. z. B. Nunes, Dorneles, Lin und Rathgeb-Schnierer 2016, S. 6 ff.).

In den letzten Jahrzehnten ist es in der Mathematikdidaktik in vielen Ländern zu einer Schwerpunktverschiebung bezüglich des Stellenwerts verschiedener Rechenformen gekommen. Während halbschriftliches Rechnen früher als „unelegante Durchgangsstation" (Krauthausen 1993, S. 190) auf dem Weg zur Krönung des Arithmetikunterrichts durch die schriftlichen Rechenverfahren galt, wird dem halbschriftlichen Rechnen seit vielen Jahren eine deutlich höhere Bedeutung beigemessen, wobei gleichzeitig die Relevanz der schriftlichen Verfahren kritisch diskutiert wird (vgl. z. B. ebd., S. 195 ff.).

Bezüglich der *schriftlichen Verfahren* deuteten die Ergebnisse verschiedener Studien unter anderem darauf hin, dass Kinder vielfach nur über ein prozedurales Wissen verfügen und kein tieferes Verständnis der Algorithmen zeigen (vgl. z. B. Brown und VanLehn 1980, S. 379 ff.; Nunes Carraher und Schliemann 1985, S. 40 ff.). In diesem Zusammenhang kam es zu Diskussionen, wie (und wann) das schriftliche Rechnen im Grundschulunterricht verständnisorientiert thematisiert werden sollte (vgl. z. B. Baroody 1990, S. 281 ff.; Bauer 1998, S. 182 ff.; Carroll 1996, S. 146 ff.; Krauthausen 1993, S. 195 ff.) und auch ob dies überhaupt ein relevanter Inhalt sei, der zugunsten anderer Themen vielleicht sogar aus dem Inhaltekanon der Grundschule gestrichen werden sollte (vgl. z. B. Plunkett 1987, S. 43 ff.).

Parallel dazu ist das *halbschriftliche Rechnen* zunehmend aufgewertet worden. Krauthausen (1993) zufolge stehe beim halbschriftlichen Rechnen das Verstehen und Nutzen von strukturellen Beziehungen im Vordergrund, wodurch ein kreatives und bewegliches Denken gefördert werden könne (vgl. Krauthausen 1993, S. 201 ff.). Um dies zu erreichen, dürfe das halbschriftliche Rechnen allerdings nicht von standardisierten Musterlösungen dominiert werden, weil dann kein Unterschied zum Einsatz der schriftlichen Algorithmen bestehe. Stattdessen sollte Schüler*innen im Unterricht Raum für das Entwickeln individueller Wege durch gehaltvolle, beziehungsreiche mathematische Problemstellungen gegeben werden (vgl. z. B. Padberg und Benz 2021, S. 196 ff.; Rathgeb-Schnierer und Rechtsteiner 2018, S. 117 ff.; Schipper 2009a, S. 130 ff.; Sundermann und Selter 1995, S. 165 ff.; Torbeyns und Verschaffel 2016, S. 101 f.). Zur konkreten Gestaltung eines solchen Unterrichts sind verschiedene Konzeptionen entwickelt und in Studien mit verschiedenen Methoden genauer beforscht worden (vgl. dazu Kapitel 2).

In der Fachdidaktik besteht aktuell Konsens darüber, den unterrichtlichen Schwerpunkt auf das verständnisorientierte Zahlenrechnen zu legen und auch beim schriftlichen Rechnen nicht allein auf die schnelle und richtige Ergebnisfindung zu fokussieren, sondern vor allem das Verständnis der Verfahren anzubahnen (vgl. z. B. Krauthausen 2018, S. 93 f.; Padberg und Benz 2021, S. 247 ff.; Schipper 2009a, S. 187 ff.). Torbeyns und Verschaffel (2016) fassen wie folgt zusammen:

> „The claim is that early and prolonged instruction in mental computation strategies, for children of all achievement levels, (a) will lead to the insightful, efficient, and flexible acquisition of these strategies for multi-digit problems, (b) will provide the necessary step-stones for the insightful introduction of the standard algorithms, and (c) will guarantee that learners will continue to use clever mental computation strategies to solve multi-digit problems with particular numerical features once the algorithms are taught.“ (Torbeyns und Verschaffel 2016, S. 102)

1.2 Strategien des Zahlenrechnens und schriftliche Verfahren

Innerhalb der verschiedenen Rechenformen lässt sich beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben eine Vielfalt möglicher Vorgehensweisen unterscheiden, wobei dies insbesondere für das mündliche und halbschriftliche Zahlenrechnen, beim Subtrahieren aber auch bezüglich der schriftlichen Rechenverfahren gilt. In diesem Abschnitt werden zunächst wichtige Vorgehensweisen beim Zahlenrechnen und anschließend gängige Verfahren der schriftlichen Subtraktion vorgestellt und diskutiert.

Zahlenrechnen

Verglichen mit den schriftlichen Verfahren, mithilfe derer Aufgaben gemäß der vorgegebenen Algorithmen nach vorab festgelegten Regeln stellenweise gelöst werden, existiert für das Zahlenrechnen eine weit größere Vielfalt möglicher Vorgehensweisen, da verschiedene Zerlegungen und Veränderungen genutzt werden können und unterschiedliche Reihenfolgen der Zwischenrechnungen möglich sind.

Der Terminus ‚Strategie‘ wird dabei in der mathematikdidaktischen Literatur sehr unterschiedlich verwendet (vgl. Überblick in Köhler 2019, S. 60 ff. oder Rathgeb-Schnierer 2006b, S. 53 ff.). Ein vergleichsweise weites, an psychologische Theorien angelehntes Begriffsverständnis lässt sich beispielsweise bei Stern finden: „Kognitive Prozesse, die sich mit dem Begriffen Flexibilität, Zielorientiertheit und Effizienz charakterisieren lassen, werden unter dem Begriff ‚Strategie‘ zusammengefasst“ (Stern 1992, S. 102, Herv. i. O.). Andere Didaktiker*innen benutzen den Begriff Strategie spezifisch zur Unterscheidung verschiedener