

19



Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

Charlotte Rechtsteiner-Merz

Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung

Entwicklung und Förderung von
Rechenkompetenzen bei Erstklässlern,
die Schwierigkeiten beim Rechnen-
lernen zeigen

WAXMANN

Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

herausgegeben von

Götz Krummheuer
und Aiso Heinze

Band 19

Wissenschaftlicher Beirat

Tommy Dreyfus (Tel Aviv University, Israel)
Uwe Gellert (Freie Universität Berlin)
Gabriele Kaiser (Universität Hamburg)
Christine Knipping (Universität Bremen)
Konrad Krainer (Universität Klagenfurt, Österreich)
Kristina Reiss (Technische Universität München)
Kurt Reusser (Universität Zürich, Schweiz)
Heinz Steinbring (Universität Duisburg-Essen)

Editorial

Der Mathematikunterricht steht vor großen Herausforderungen: Neuere empirische Untersuchungen legen (erneut) Defizite und Unzulänglichkeiten offen, deren Analyse und Behebung einer umfassenden empirischen Erforschung bedürfen. Der Erfolg derartiger Bemühungen hängt in umfassender Weise davon ab, inwieweit hierbei auch mathematikdidaktische Theoriebildung stattfindet. In der Reihe „Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik“ werden dazu empirische Forschungsarbeiten veröffentlicht, die sich durch hohe Standards und internationale Anschlussfähigkeit auszeichnen. Das Spektrum umfasst sowohl grundlagentheoretische Arbeiten, in denen empirisch begründete, theoretische Ansätze zum besseren Verstehen mathematischer Unterrichtsprozesse vorgestellt werden, als auch eher implementative Studien, in denen innovative Ideen zur Gestaltung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse erforscht und deren theoretischen Grundlagen dargelegt werden. Alle Manuskripte müssen vor Aufnahme in die Reihe ein Begutachtungsverfahren positiv durchlaufen. Diese konsequente Begutachtung sichert den hohen Qualitätsstandard der Reihe.

Charlotte Rechtsteiner-Merz

Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung

Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen
bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten
beim Rechnenlernen zeigen



Waxmann 2013
Münster / New York / München / Berlin

Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Diese Arbeit entstand als Dissertation an der Fakultät II der Pädagogischen Hochschule Weingarten, 2013.

Gutachterinnen

Prof. Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer

Prof. Dr. Silvia Wessolowski

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 19

Print-ISBN 978-3-8309-3037-2

E-Book-ISBN 978-3-8309-8037-7

© Waxmann Verlag GmbH, 2013

Postfach 8603, 48046 Münster

www.waxmann.com

info@waxmann.com

Umschlaggestaltung: Christian Averbeck, Münster

Titelbild: Anne Maria sortiert Termkarten in „leicht“

und „schwer“ © Charlotte Rechtsteiner-Merz

Satz: Sven Solterbeck, Münster

Druck: Hubert & Co., Göttingen

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier,
säurefrei gemäß ISO 9706



Printed in Germany

Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck, auch auszugsweise, verboten.
Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des
Verlages in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung
elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Vorwort

Die Idee für diese Arbeit entstand in der Übergangsphase von der Lehrerin zur Forscherin. Als langjährige Lehrerin konnte ich immer wieder erleben, dass Kinder, die zunächst Schwierigkeiten beim Rechnenlernen hatten, mit zunehmender Auseinandersetzung mit Aktivitäten zur Zahlenblickschulung auch Flexibilität entwickelten – stets auf ihrem eigenen Niveau. Ohne dieses gemeinsame Voranschreiten im Lernprozess – die Kinder auf dem Weg zum (flexiblen) Rechnen und ich auf dem Weg mein didaktisches Wissen auszubauen und meinen diagnostischen Blick zu schärfen – wäre diese Arbeit nie möglich gewesen. Daher gilt mein erster Dank all den Kindern, die meinen Lernprozess begleitet und mich durch ihr Lernen und ihre Freude an der Mathematik mit ihrer Begeisterung angesteckt haben.

Darüber hinaus waren am Gelingen dieser Arbeit zahlreiche Menschen in unterschiedlicher Weise beteiligt, denen ich auf diesem Weg meinen herzlichen Dank ausdrücken möchte.

Zu allererst gilt mein ganz besonderer Dank meinen beiden Gutachterinnen Frau Prof. Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer und Frau Prof. Dr. Silvia Wessolowski.

Frau Rathgeb-Schnierer hat mich von Anfang an bestärkt, dieses spannende Thema zu verfolgen. Sie hat diese Arbeit durch zahlreiche Gespräche und enormes Engagement intensiv begleitet. Durch ihr Vertrauen in meine Arbeit leistete sie einen wesentlichen Beitrag zu ihrem Gelingen.

Frau Wessolowski möchte ich ganz herzlich danken für die Bereitschaft diese Arbeit mitzubetreuen. Sie half mir durch diverse Impulse und Fragestellungen mein Denken zu überprüfen und zu entwickeln.

Herrn Prof. Dr. Peter Baireuther verdanke ich zahlreiche intensive Diskussionen, in denen er sich auf meine Gedanken und meinen Lernprozess einließ. Dies ermöglichte mir mein Denken zu reflektieren und den Arbeitsprozess voranzutreiben. Damit trug er wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Auch bei Dr. Hartmut Köhler möchte ich mich besonders bedanken: Er hat durch seine langjährige Begleitung und unsere Zusammenarbeit im Programm SINUS-Transfer-Grundschule wesentlich zu meiner Haltung gegenüber dem Lernen von Mathematik beigetragen. In vielen Gesprächen schärfte er meinen Blick „das Ganze im Auge zu behalten“. Für seine Förderung und sein Vertrauen in mich bin ich sehr dankbar.

Wesentliche fachliche Hinweise im Bereich der Argumentationsanalyse erhielt ich von Prof. Dr. Götz Krummheuer. Er war stets bereit sich durch Gespräche oder kritisches Lesen in meine Auseinandersetzung mit den kindlichen Argumentationen einzubringen. Auch Marei Fetzer danke ich für das Gespräch auf der GDM, das mich in meinem weiteren Vorgehen bestärkte.

Wertvolle Unterstützung und kritische Hinweise erhielt ich zu Beginn meiner Arbeit von Herrn Prof. Dr. Heinrich Bauersfeld. Er verschaffte mir durch seine Gedanken eine weitere Perspektive, für die ich sehr dankbar bin.

Prof. Dr. Gerald Wittmann danke ich für sein Interesse an meiner Arbeit und für wesentliche fachliche Hinweise bei der Fertigstellung.

Das hochschulübergreifende Doktorandenkolloquium (der Pädagogischen Hochschulen Freiburg, Ludwigsburg und Weingarten), geleitet von Prof. Dr. E. Rathgeb-Schnierer, Prof. Dr. S. Wessolowski und Prof. Dr. G. Wittmann, bot mir die Möglichkeit, mit anderen Doktorandinnen in einen fachlichen Austausch zu treten. Hier wurde die Arbeit über all die Jahre durch kontinuierliche Treffen begleitet und in zahlreichen Diskussionen weiterentwickelt. Aus diesem Kreis entwickelte sich mit Birgit Gysin und Dr. Stephanie Schuler eine intensive Arbeitsgruppe, in der wir mehrmals jährlich an unseren Daten arbeiteten (unsere „Nullentreffen“). Diese produktiven Gespräche trieben meinen Arbeitsprozess wesentlich voran und motivierten mich dazu „am Ball“ zu bleiben.

Ein wichtiger Baustein dieses Projekts war die Arbeit an den Schulen und damit verbunden die große Bereitschaft der Lehrerinnen, den Zahlenblick durch verschiedene Aktivitäten zu schulen, mich an ihrem Unterricht teilhaben zu lassen, diesen durch meine Interviews zu unterbrechen und mir immer wieder mit Rat und Tat zur Seite zu stehen. Hierfür danke ich herzlich Brigitta Brugger-Schmitt, Monika Grupp, Christiane Hartmann, Melanie Haug, Rita Schurr, Silvia Sperling und Anita Steinhart. Ihren besonderen Beitrag am Gelingen dieses Projekts leisteten die Kinder, die in jeweils vier Interviews bereit waren mit mir zu arbeiten und mich an ihrem Denken teilhaben ließen: Admire, Amelie, Andrija, Lars, Lena, Leon, Luisa, Manuela, Maxi, Maxim, Melissa, Moritz, Nida, Noah, Seyda, Sophie, Tim, Tobias, Viktor und Yannik.

Für ihre zuverlässige Unterstützung beim Filmen und bei der Transkription der Interviews bedanke ich mich bei Anna Folke, Kerstin Hager, Verena Hölz, Christina Hölzel und Sandra Rupf. Ihre Mitarbeit an der Datenerhebung und -aufbereitung wäre ohne die Finanzierung des Zentrums für Primar- und Elementarbildung der Pädagogischen Hochschule Weingarten nicht möglich gewesen. Auch dafür vielen Dank! Nina Dillmann danke ich ganz besonders für das Raten der Kategoriensysteme.

Meinen Kolleginnen und Kollegen des Faches Mathematik der Pädagogischen Hochschule Weingarten möchte ich ebenfalls meinen Dank aussprechen. Sie haben mir durch Übernahme von Arbeiten im Fach und durch vielfältige Unterstützung nicht nur einmal den Rücken freigehalten. Ebenso danke ich dem Dekanat unter Herrn Prof. Dr. W. Knapp, Frau Prof. Dr. P. Burmeister und Frau Prof. Dr. C. Löffler für das Vertrauen in meine Arbeit und den Einsatz für meine Belange.

Julie Adam, Christiane Hofmann, Julia Weinsheimer und Roland Neubert bin ich dankbar für das intensive Lesen meiner Arbeit und ihre konstruktiven Rückmeldungen.

Nicht zuletzt danke ich von Herzen meinem Freundeskreis und meiner Familie für die vielfältige und fortwährende Unterstützung während der letzten Jahre. Sie haben meine Arbeit mitgetragen und blieben mir trotz der wenigen Zeit, die ich für sie hatte, eng verbunden.

Inhalt

Einleitung	13
Teil I Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung betrachten	18
Rechnen beschreiben	19
1 Verschiedene Lösungswerkzeuge	19
1.1 Zählen	20
1.2 Nutzen von strategischen Werkzeugen	24
1.3 Abrufen von Fakten	25
2 Vom Zählen zum Rechnen	26
2.1 Gründe für die Ablösung vom Zählen	27
2.2 Die Entwicklung vom Zählen zum Rechnen	28
2.3 Bedeutung der strategischen Werkzeuge	32
2.3.1 Strategische Werkzeuge und der Weg zur Automatisierung	32
2.3.2 Strategische Werkzeuge als Basis für flexibles Rechnen	33
Rechnen grundlegen und ausbauen	35
3 Den Zahlbegriff entwickeln	35
3.1 Konzepte und Tätigkeiten zur Zahlbegriffsentwicklung	36
3.2 Anschauungsmittel zur Zahlbegriffsentwicklung	41
3.2.1 Kardinale Materialien unterschiedlicher Strukturierung	42
3.2.2 Sinnfällige Vorstellungsbilder	45
3.2.3 Anschauungsmittel für das Ordnen von Zahlen	46
3.2.4 Anschauungsmittel für das Verorten von Zahlen	46
3.3 Die Zahlaspekte	47
3.3.1 Der Zählzahlaspekt	48
3.3.2 Der Kardinalzahlaspekt	48
3.3.3 Der Ordnungszahlaspekt	49
3.3.4 Der Rechenzahlaspekt	49
3.3.5 Der Maßzahlaspekt	50
3.3.6 Der Systemzahlaspekt	51
3.4 Strukturierung der Zahlaspekte	52
3.4.1 Die Strukturierung der Zahlaspekte in der Literatur	52
3.4.2 Zahlaspekte und Zahlbegriffsentwicklung in vorliegender Studie	54
4 Rechnen entwickeln	59
4.1 Operationsverständnis aufbauen	60
4.2 Die Entwicklung der sprachlichen Ausdrucksformen	63
4.3 Algebraische Vorstellung als Grundlage der Addition	64
4.4 Größen-Vorstellungen als Grundlage der Addition	68
4.5 Fazit	71

5	Flexibles Rechnen entwickeln	72
5.1	Begriffsklärung	73
5.1.1	Die Adäquatheit von Lösungsweg und Aufgabencharakteristik.	74
5.1.2	Die Adäquatheit von Lösungsrichtigkeit und Lösungsgeschwindigkeit	75
5.1.3	Die Adäquatheit des Referenzrahmens	76
5.1.4	Begriffsbildung „flexibles Rechnen“ in vorliegender Studie	78
5.2	Indikatoren für flexibles Rechnen.	80
5.3	Flexibles Rechnen fördern	82
5.3.1	Ansätze zum Mathematiklernen	83
5.3.2	Flexibles Rechnen im sozialen Austausch entwickeln	88
5.3.3	Flexibles Rechnen fördern	90
5.4	Fazit	95
6	Zahlenblick und Zahlenblickschulung	95
6.1	Begriffsklärung Zahlenblick.	96
6.1.1	„Number sense“ oder „Zahlensinn“	96
6.1.2	„Structure sense“ oder Struktursinn.	98
6.1.3	Zahlenblick.	99
6.2	Die Schulung des Zahlenblicks	100
6.2.1	Die Schulung des Zahlenblicks in der Literatur	100
6.2.2	Die Schulung des Zahlenblicks in vorliegender Studie	102
6.2.3	Aktivitäten zur Zahlenblickschulung	107
	Besondere Schwierigkeiten beim Rechnenlernen.	115
7	Mögliche Ursachen für die Entwicklung von Schwierigkeiten beim Rechnenlernen.	115
7.1	Die kognitions- und entwicklungspsychologische Perspektive	115
7.1.1	Störungen in der kognitiven Verarbeitung	116
7.1.2	Störungen in der Zahlenrepräsentation	116
7.1.3	Schwierigkeiten in der (kognitiven) Verarbeitung im Arbeitsgedächtnis und in der Zahlenrepräsentation	118
7.1.4	Entwicklungsmodell zur Zahlenrepräsentation	121
7.2	Die fachdidaktische Perspektive	124
7.2.1	Aufbau und Hierarchie der Inhalte.	125
7.2.2	Der Einfluss von Unterricht.	127
8	Symptome.	129
9	Förderung und Prävention.	132
9.1	Prävention	132
9.2	Förderung	134
9.3	Die Entwicklung flexiblen Rechnens bei Kindern mit Lernschwierigkeiten in Mathematik	139
	Standortbestimmung	141
10	Positionierung	141
10.1	Begründungslinien	141
10.2	Forschungsdesiderate	144

11	Forschungsfokus	146
11.1	Inhaltlicher Fokus	146
11.2	Methodologischer und methodischer Fokus	148

Teil II Die Entwicklung flexiblen Rechnens untersuchen 150

Methodologische und methodische Überlegungen		150
1	Forschungsdesign	151
1.1	Vorüberlegungen	151
1.2	Untersuchungsverlauf	153
2	Das Interview als Datenerhebungsinstrument	154
2.1	Planung klinischer Interviews	154
2.2	Besondere Herausforderungen bei der Befragung von Kindern	155
3	Die Datenauswertung	158
3.1	Die qualitative Inhaltsanalyse	158
3.1.1	Allgemeine Beschreibung	158
3.1.2	Übertrag auf die vorgestellte Untersuchung	160
3.2	Gliederung und Interpretation der Argumentationen	161
3.3	Typenbildung	163
Beschreibung der Untersuchung		167
4	Beschreibung der Stichprobe	167
4.1	Auswahl der Klassen	167
4.2	Auswahl der Kinder	169
4.2.1	Beschreibung der Diagnoseinstrumente	170
4.2.2	Beschreibung der Stichprobe	175
5	Die klinischen Interviews	176
5.1	Umsetzung der methodischen Vorüberlegungen	176
5.2	Beschreibung der Interviewaufgaben	178
5.2.1	Kurzdarstellung der Aufgabenstellungen der Bereiche I und III	178
5.2.2	Sortieraufgabe aus Schwerpunkt II	181
5.3	Beschreibung der Interviewverläufe	190
5.3.1	Erstes Interview	190
5.3.2	Zweites Interview	192
5.3.3	Drittes Interview	193
5.3.4	Viertes Interview	195
6.	Datenauswahl und Datenaufbereitung	196
6.1	Datenauswahl	196
6.2	Datenaufbereitung	196
7	Analyse der Daten	200
7.1	Analyse der Lösungswerkzeuge	202
7.2	Analyse der Argumentationen der Kinder	205
7.2.1	Theorien zur Strukturierung des Kategoriensystems	207
7.2.2	Entwicklung des Kategoriensystems	209

8	Die Interpretation der Argumentationen.	211
8.1	Theoretische Ansätze zur Analyse der Argumentationen	211
8.1.1	Der argumentationstheoretische Ansatz	211
8.1.2	Theorie zum Beweisen	212
8.2	Qualitative Einschätzung der Argumente	214
9	Typenbildung.	216
9.1	Methodische Vorüberlegungen.	216
9.2	Entwicklung einer Typologie zum Rechnenlernen in der ersten Klasse.	217
9.2.1	Entwicklung des Merkmalsraums	217
9.2.2	Gruppierung der Fälle und Analyse der Zusammenhänge	219
9.3	Erarbeitung einer Gesamttypologie zur Entwicklung des flexiblen Rechnens	222
9.3.1	Entwicklung des Merkmalsraums und Gruppierung der Fälle.	222
9.3.2	Typenbildung zum flexiblen Rechnen	224
	Das Unterrichtssetting – die Schulung des Zahlenblicks.	227
10	Die Schulung der Lehrkräfte	227
11	Die Aktivitäten im Einzelnen	228
11.1	Aktivitäten zum Sehen mit Stützung	229
11.1.1	Anzahlen.	229
11.1.2	Größenrelationen	233
11.2	Aktivitäten zum Sehen auf formaler Ebene.	235
11.3	Aktivitäten zum Sortieren mit Stützung	236
11.4	Aktivitäten zum Sortieren auf formaler Ebene.	237
11.5	Aktivitäten zum Strukturieren mit Stützung.	238
11.6	Aktivitäten zum Strukturieren auf formaler Ebene	239
Teil III Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung verstehen –		
	Ergebnisse	241
	Ergebnisse und Erkenntnisse.	241
1	Typologie zum flexiblen Rechnen.	241
1.1	Charakterisierung der Typen	242
1.1.1	Der Zähler – ein Haupttypus.	244
1.1.2	Der mechanische Rechner – ein Haupttypus	245
1.1.3	Der flexible Rechner – ein Haupttypus	247
1.1.4	Der Experte – ein Haupttypus.	248
1.1.5	Der Zähler mit mechanisch orientierten Abweichungen – ein Zwischentypus.	250
1.1.6	Der verfahrensorientierte Rechner – ein Zwischentypus	252
1.1.7	Der Zähler mit beziehungsorientierten Abweichungen – ein Zwischentypus.	253
1.1.8	Der versuchsweise beziehungsorientierte Rechner – ein Zwischentypus	254
1.1.9	Der beziehungsorientierte Rechner – ein Zwischentypus	256
1.2	Einordnung der Typen in die Theorie	257

2	Deskription und Interpretation der Entwicklungsverläufe	264
2.1	Unterschiedliche Entwicklungsverläufe beim Rechnenlernen	264
2.1.1	Entwicklungsverläufe zum Zähler	265
2.1.2	Entwicklungsverläufe zum Zähler mit mechanisch orientierten Abweichungen	266
2.1.3	Entwicklungsverlauf zum Zähler mit beziehungsorientierten Abweichungen	267
2.1.4	Entwicklungsverlauf zum verfahrensorientierten Rechner	268
2.1.5	Entwicklungsverläufe zum mechanischen Rechner	269
2.1.6	Entwicklungsverläufe zum beziehungsorientierten Rechner	269
2.1.7	Entwicklungsverläufe zum flexiblen Rechner	270
2.1.8	Entwicklungsverläufe zum Experten	272
2.2	Einfluss der Zahlenblickschulung auf die Rechenentwicklung	273
2.3	Einordnung der Entwicklungsverläufe in die Theorie	277
2.3.1	Entwicklungen in Wellen	278
2.3.2	Die Funktion strategischer Werkzeuge	279
2.3.3	Die Rolle der Zahlenblickschulung	280
2.3.4	Der Einfluss von Sprache und Lernangeboten	281
3	Deutungshypothesen	282
4	Zusammenfassung	286
Diskussion und Ausblick		290
Literatur		297
Abbildungsverzeichnis		318

Der Anhang ist online verfügbar unter www.waxmann.com/buch3037

Einleitung

„Nur der Eingeweihte kennt die richtige
Schublade der Zahlbeziehungen,
und der Laie überläßt ihm
bewundernd dies Geheimnis.“
(Menninger 1950, 3)

Inhaltliche Einbettung

Die Bildungsstandards der KMK (2004) formulieren als Ziel des Mathematiklernens in der Grundschule „die Entwicklung eines gesicherten *Verständnisses* mathematischer Inhalte“ (ebd., 6; Hervorhebung im Original). Darüber hinaus fordern verschiedene Bildungsstandards und Rahmenlehrpläne der Länder wie beispielsweise in Baden-Württemberg die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen (2004, 55).

„Oberstes Ziel ist der aufgabenadäquate Einsatz flexibler Rechenstrategien.“
(Bildungsplan BW 2004, 55)

Die Ergebnisse der TIMS-Studien 2007 und 2011 machen allerdings deutlich, dass mindestens ein Fünftel aller Kinder in Deutschland die geforderten Bildungsstandards zum Ende der Grundschulzeit nicht erreicht: Etwa 17% verfügen danach „nur über elementare mathematische Fertigkeiten“ (Bos et al. 2008, 11) und weitere 4% erlangen nicht einmal dieses Niveau.

Eine Untersuchung von Moser Opitz (2001a, 2007b) zu mathematischen Schwierigkeiten von Schülern¹ aus der Sekundarstufe zeigt eindrücklich, dass die Defizite aus Mängeln im Grundschulstoff resultieren. Da die Lerninhalte in Mathematik hierarchisch aufgebaut sind, wird der Grundstein für erfolgreiches Rechnen bereits in der ersten Klasse gelegt, und gleichzeitig können hier auch besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen entstehen (u.a. Gaidoschik 2007, 2009; Gerster 2007; Gerster/Schultz 1998; Kaufmann/Wessolowski 2006; Lorenz 2003; Meyerhöfer 2010, 2011; Schipper 2002, 2009, 2011; Wessolowski 2007, 2012).

In Anbetracht dieser Ergebnisse stellt sich die zentrale Frage, wie Unterricht gestaltet werden kann, um möglichst viele Kinder bei der Ablösung vom zählenden Rechnen und der Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen zu unterstützen. Erhärtet wird die Notwendigkeit dieser Fragestellung durch Helmkes Aussage:

„Wir wissen also immer besser Bescheid über fachliche Schwächen und Stärken von Schülern. Wenn es dagegen darum geht, aus den Ergebnissen der großen Evaluationsstudien unterrichtliche Konsequenzen für die systematische Verbesserung des

1 Der sprachlichen Einfachheit halber wird die männliche Form benutzt, sie bezieht sich selbstverständlich auf beide Geschlechter.

Lehrens und Lernens, für den Ausgleich von Kompetenzdefiziten abzuleiten, sieht die Lage schlechter aus.“ (Helmke 2009, 16)

Hier knüpft die vorliegende Untersuchung an, in der die Förderung flexiblen Rechnens von Erstklässlern, die zunächst Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen, fokussiert wird. Damit werden in dieser Forschungsarbeit verschiedene Bereiche tangiert:

- die Ablösung vom zählenden Rechnen als arithmetisches Kernthema der ersten Klasse,
- die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen, die in Klasse 1 grundgelegt werden sowie
- die Prävention der Entstehung besonderer Schwierigkeiten beim Rechnenlernen, da die Ablösung vom Zählen *die* Hürde (u.a. Gerster 2007; Gerster/Schultz 1998; Lorenz 2003; Kaufmann/Wessolowski 2006; Meyerhöfer 2008, 2011; Schipper 2009) auf dem Weg zum Rechnen darstellt.

Im Mittelpunkt der Ablösung vom Zählen und der Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen steht die Ausbildung eines umfassenden Zahlbegriffs und verschiedener strategischer Werkzeuge. Beides erfordert Einblicke in Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen, die im Rahmen der Konzeption zur Schulung des Zahlenblicks explizit gefördert werden (Rathgeb-Schnierer 2006a, 2010d, 2011; Rechtsteiner-Merz 2011a; Schütte 2002a, 2002b, 2004, 2008).

Daraus lassen sich zwei weiterführende Überlegungen ableiten:

Zunächst stellt sich die Frage, wie Unterricht das Rechnenlernen von Kindern unterstützen kann, die anfangs Schwierigkeiten zeigen. Aus fachdidaktischer Perspektive herrscht weitgehend Einigkeit darüber, dass sowohl die Inhalte als auch die Vorgehensweise für alle Kinder die gleichen sind:

„Die Tatsache, dass Kinder mit Rechenstörungen „anders“ sind als andere Kinder, bedeutet nicht, dass auch die auf sie bezogenen mathematikdidaktischen Überlegungen „anders“ sein müssen. Wir brauchen für sie keine „besondere“ Mathematikdidaktik, sondern eine Mathematikdidaktik, die sich besonders intensiv auf mathematische Lösungs- und Lernprozesse konzentriert.“ (Schipper 2009, 329)

Damit wird der Fokus im zweiten Schritt auf die Frage gerichtet, wie mathematische Lösungs- und Lernprozesse unterstützt werden können.

Führt man diese verschiedenen Überlegungen zusammen, lässt sich daraus eine zentrale Forschungsfrage formulieren:

Können Kinder, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen, mithilfe kontinuierlicher Aktivitäten zur Schulung des Zahlenblicks flexible Rechenkompetenzen entwickeln?

Somit möchte diese Untersuchung einen Beitrag zur Unterrichtsentwicklung in Mathematik und damit zur Qualitätsverbesserung leisten.

Forschungsmethodische Einbettung

Die Studie ist der interpretativen Unterrichtsforschung und damit der qualitativen empirischen Sozialforschung zuzuordnen. Sie lässt sich in zwei Stränge gliedern: den *Unterrichts-* und den *Forschungsstrang* (Kapitel II 1).

Im *Unterrichtsstrang* lag der Fokus auf der Schulung des Zahlenblicks (Reichsteiner-Merz 2008a, 2011a; Schütte 2002a, 2002b, 2004a, 2008). Um die Entwicklungsprozesse auf dem Weg vom Zählen zum (flexiblen) Rechnen anzuregen und beobachten zu können, wurden in fünf von acht Klassen während eines gesamten Schuljahres wöchentlich in mindestens einer Stunde Aktivitäten zur Zahlenblickschulung durchgeführt.

Der *Forschungsstrang* war darauf ausgerichtet, die Rechenentwicklung von Erstklässlern in zwei unterschiedlichen Unterrichtssettings zu untersuchen. Dabei waren verschiedene Aspekte zu berücksichtigen. Wie in jeder Forschungsarbeit beeinflussten die jeweiligen Theorien methodologische und methodische Entscheidungen. Für die vorliegende Studie waren zwei Theorien grundlegend: die Ansätze zu einer Theorie zum Rechnenlernen, die in der vorliegenden Arbeit in Kapitel I 3.4.2 und I 4 entwickelt werden, sowie die Theorie zum flexiblen Rechnen (Kapitel I 5). In beiden Theorien spielt neben den Lösungswerkzeugen der Rückgriff² auf Beziehungen beim Rechnen eine grundlegende Rolle. Vor diesem Hintergrund wurden zur Datenerhebung Leitfadenterviews durchgeführt, um dem Denken der Kinder auf die Spur zu kommen. Die Lösungswegbegründungen und -beschreibungen der Kinder zeigten einerseits die genutzten Lösungswerkzeuge auf, andererseits machten ihre Ausführungen deutlich, inwieweit sie sich dabei auf ein Verfahren oder auf Beziehungen stützten. Um diesen Aspekt aufgreifen zu können, wurden die Argumentationen der Kinder in die Auswertung einbezogen. Diese Vorgehensweise machte eine mehrperspektivische Auswertung notwendig, in der verschiedene methodische Aspekte zum Zuge kamen:

- die Entwicklung zweier Kategoriensysteme (zur Analyse der Lösungswerkzeuge und der Argumentationen) auf der Basis der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2008a, 2008b),
- die Analyse der Argumentationen mithilfe eines Teilbereichs des argumentationstheoretischen Ansatzes (u.a. Fetzer 2007, 2010; Knipping 2003; Kopperschmidt 2000; Krummheuer/Brandt 2001; Krummheuer/Fetzer 2005; Krummheuer/Naujok 1999; Toulmin 1996),

2 Der Begriff „Rückgriff“ ist nicht als aktives Vorgehen oder Auswahl zu verstehen. Vielmehr ist damit gemeint, dass sich der Lösende automatisch auf den Referenzrahmen stützt, welcher verfahrens- oder beziehungs-basiert sein kann.

- die Interpretation der Argumentationen auf der Basis der Argumentationsanalyse und vor dem Hintergrund der Theorien zum Rechnenlernen (Baireuther 2011; Baireuther/Rechtsteiner-Merz 2012), zum flexiblen Rechnenlernen (Rathgeb-Schnierer 2006a, 2010d, 2011, 2013; Threlfall 2002, 2009) und zum Beweisen (Almeida 2001; Balacheff 1992; Harel/Sowder 2007; Sowder/Harel 2007),
- die Typenbildung nach Kluge (1999) und Kelle/Kluge (2010).

Gliederung der Arbeit

Die Arbeit ist in drei³ Teile gegliedert.

- Teil I: Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung betrachten
- Teil II: Die Entwicklung des flexiblen Rechnens untersuchen
- Teil III: Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung verstehen

Der erste Teil *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung betrachten* beschäftigt sich mit verschiedenen Bezugspunkten, die für diese Arbeit eine Rolle spielen. Dabei werden literaturbasierte Ausführungen mit den wichtigsten Aspekten zum jeweiligen aktuellen Forschungsstand zusammengeführt.

Zunächst stehen die verschiedenen Lösungswerkzeuge für das Rechnen und die Entwicklung vom Zählen zum Rechnen im Fokus. Anschließend werden Ansätze zu einer Theorie zum Rechnenlernen entwickelt sowie verschiedene Theorien zur Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen beleuchtet. In der Auseinandersetzung mit verschiedenen Förderansätzen zum flexiblen Rechnen wird die Konzeption der Zahlenblickschulung ausführlich beschrieben und weiterentwickelt. Neben der Ablösung vom Zählen und der Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen spielt in der Untersuchung die Prävention von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen eine wichtige Rolle. Diesbezügliche Überlegungen sind anschließend beschrieben. Den Abschluss dieses Kapitels bildet die Standortbestimmung, in der ausgehend von den Erörterungen der beschriebenen Theorien und Forschungsergebnisse sowohl die inhaltlichen als auch die daraus resultierenden methodischen Fragestellungen formuliert werden.

Der zweite Teil *Die Entwicklung des flexiblen Rechnens untersuchen* widmet sich der Forschungsarbeit. Damit wird der Forderung nach „*intersubjektive(r) Nachvollziehbarkeit*“ (Steinke 2007, 324) Rechnung getragen, die besonders im Kontext qualitativer Sozialforschung formuliert wird (ebd., 324 f.). Das Forschungsdesign sowie die methodologischen und methodischen Überlegungen und Entscheidungen werden erläutert und begründet. In diesem Teil wird auch der aktuelle Stand zur Interpretation der Argumentationen dargestellt. Diese dienen als *eine* der Grundlagen für die Typenbildung.

3 Terminologie: In der gesamten Arbeit werden Zahlen bis zwölf in der Regel als Zahlwort geschrieben. Hingegen werden für Zahlen in Kinderaussagen, Termen, Zahlensätzen (Rechnungen), in Verbindung mit Größenangaben und in Tabellen Zahlzeichen verwendet.

Das Unterrichtssetting und damit verbunden die Einführung der Lehrkräfte werden ebenfalls in diesem Kapitel beschrieben.

Im dritten Teil *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung fördern – Forschungsergebnisse* werden die empirischen Ergebnisse vorgestellt und diskutiert sowie Schlussfolgerungen skizziert. Hier erfolgt die Charakterisierung der Typen (Kapitel III 1.1) sowie die Beschreibung der Entwicklungsverläufe der Kinder (Kapitel III 2). Auffälligkeiten, die sich mithilfe bisheriger theoretischer Ansätze nicht ausreichend erklären lassen, werden schließlich als Deutungshypothesen (Kapitel III 3) formuliert.

Der letzte Abschnitt fasst die Diskussion der verschiedenen Ergebnisse zusammen und formuliert Schlussfolgerungen im Hinblick auf Forschung, Lehrerbildung und Unterrichtspraxis.

Teil I Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung betrachten

„Mathematiklernen heißt, Zahlbeziehungen und mathematische Operationen zu verstehen, denn Einsichten sind auch für rechenschwache Schüler wichtiger als Automatismen.“
(Lorenz 2003, 95)

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird in einem theoriebasierten Überblick die Verortung der Untersuchung aufgezeigt.

Das Kapitel *Rechnen beschreiben* befasst sich mit begrifflichen Klärungen und bietet einen ersten Überblick zur Entwicklung des Rechnens. Dabei spielen die verschiedenen Lösungswege und deren Bedeutung eine wesentliche Rolle.

Das Kapitel *Rechnen grundlegen und ausbauen* widmet sich der Grundlegung und dem Ausbau des Rechnens. Da die Entwicklung des Zahlbegriffs und des Rechnens im Anfangsunterricht unmittelbar miteinander verbunden sind, werden zunächst wesentliche Aspekte zur Entwicklung eines umfassenden Zahlbegriffs (Kapitel I 3) ausgeführt. Daraus lassen sich direkte Folgerungen für die Entwicklung des Rechnens im Zahlenraum bis zwanzig (Kapitel I 4) ableiten. Ein Hauptziel im Arithmetikunterricht der Grundschule ist die Entwicklung verstehenden und damit flexiblen Rechnens bei möglichst allen Kindern. Für den Begriff flexibler Rechenkompetenzen existieren verschiedene Definitionen und entsprechend auch unterschiedliche Förderansätze (Kapitel I 5). Vorgestellter Untersuchung liegt der Ansatz zur Zahlenblickschulung zugrunde, der in Kapitel I 6 beschrieben wird.

Im Prozess des Rechnenlernens können „*besondere Schwierigkeiten*“ entstehen, die aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten sind: aus kognitions- und entwicklungspsychologischer sowie aus fachdidaktischer Perspektive (Kapitel I 7). Schwierigkeiten beim Rechnen äußern sich durch verschiedene Symptome, die in Kapitel I 8 beschrieben sind. Wie dieser Entwicklung präventiv begegnet werden kann und welche Möglichkeiten der Förderung bestehen, ist in Kapitel I 9 skizziert.

Aus den ausgeführten theoretischen Überlegungen und Forschungsergebnissen werden schließlich Begründungslinien und Forschungsdesiderate (Kapitel I 10) aufgezeigt, woraus sich die Forschungsfragen ableiten lassen (Kapitel I 11).

Rechnen beschreiben

Das folgende Kapitel beleuchtet verschiedene Aspekte zum Thema Rechnen: mögliche Lösungswerkzeuge (Kapitel I 1) sowie erstrebenswerte Werkzeuge und Wege vom Zählen zum Rechnen (Kapitel I 2).

Da keine Einheitlichkeit bezüglich genutzter Begriffe existiert, ist zunächst eine Klärung angezeigt. Auf dieser Basis können anschließend die verschiedenen Lösungswerkzeuge beschrieben werden (Kapitel I 1).

Auf dem Weg zum Rechnen zeigen sich zählende Vorgehensweisen langfristig als hinderlich, wohin gehend die Entwicklung strategischer Werkzeuge förderlich ist. In Kapitel I 2 werden die Gründe dafür erläutert und die Stadien auf dem Weg zum Rechnen sowie die Funktionen von strategischen Werkzeugen beschrieben.

1 Verschiedene Lösungswerkzeuge

In der Literatur finden sich unterschiedliche Bezeichnungen für die verschiedenen Lösungswege, die beim Rechnen genutzt werden können: „Rechenstrategien“ (Radatz et al. 1996, 82), „Basisstrategien“ (Carpenter/Moser 1984, 181), „Lösungswerkzeuge“ (Rathgeb-Schnierer 2011, 17). Der Strategiebegriff wird allerdings gleichzeitig mit heuristischen Strategien oder Formen des Rechnens – wie Kopfrechnen oder halbschriftliches Rechnen – gleichgesetzt (Rathgeb-Schnierer 2011, 16 ff.). Darüber hinaus spricht man von Strategie auch in Bezug auf kognitive Kompetenzen wie „Flexibilität, Zielorientiertheit und Effizienz“ (Stern 1992, 102)⁴. Zur Klärung der verschiedenen „Ebenen des Lösungsprozesses“ (Rathgeb-Schnierer 2011, 16; vgl. Kapitel I 5.1) benutzt Rathgeb-Schnierer für die Ebene des Lösungsweges die Bezeichnung „Lösungswerkzeuge“, die auch im Folgenden Verwendung findet.

Als Lösungswerkzeuge stehen drei grundsätzlich verschiedene Vorgehensweisen und deren Kombinationen zur Verfügung (Gray 1991, 554; Radatz et al. 1996, 82 f.):

- das Zählen (vgl. Kapitel I 1.1),
- das Lösen mithilfe heuristischer beziehungsweise operativer Strategien (im englischsprachigen Raum auch „number fact strategies“ (Carpenter/Moser 1984, 181) genannt (Kapitel I 1.2) und
- das Abrufen von Fakten (Kapitel I 1.3).

Strategien oder strategische Werkzeuge

Unter heuristischen oder operativen Strategien werden im Zusammenhang mit Lösungswerkzeugen ableitende Strategien wie beispielsweise Nachbaraufgaben, Fastverdoppeln oder gegensinniges Verändern verstanden. Allerdings treten innerhalb eines Lösungsweges häufig auch unterschiedliche „Teilstrategien“ im Sinne von

4 Eine ausführliche Diskussion hierzu findet sich bei Rathgeb-Schnierer 2006a, 53 ff.

kleinsten Werkzeugen auf, die miteinander verknüpft werden. Beispielsweise kann ein Kind bei der Aufgabe $8 + 7$ auf einen Blick bis zur Zehn ergänzen, muss dann aber die restlichen Fünf dazu zählen (Thompson 2008, 101). Oder Kinder lösen $18 + 7$ indem sie $8 + 7$ auswendig wissen und damit gleichzeitig zum Faktenabruf das strategische Werkzeug der Analogie als Hilfsaufgabe nutzen. In beiden Beispielen verknüpfen die Kinder ein weiteres Lösungswerkzeug (einmal das Zählen und einmal das Abrufen) mit einem kleinsten strategischen Werkzeug. Daher wird im Folgenden der differenziertere und damit umfassendere Begriff der „strategischen Werkzeuge“ (Rathgeb-Schnierer 2006a, 55) herangezogen.

„Charakteristisch für diese strategischen Werkzeuge ist ihre Aufgabenunabhängigkeit sowie die Kombinierbarkeit mehrerer strategischer Werkzeuge beim Lösen einer Aufgabe.“ (Rathgeb-Schnierer 2006a, 56)

Als strategische Werkzeuge beschreibt Rathgeb-Schnierer folgende Tätigkeiten:

- „Zerlegen und Zusammensetzen von Zahlen,
- Analogien nutzen,
- Aufgaben verändern: Vereinfachen von Aufgaben durch das Umstellen von Summanden oder das gegen- beziehungsweise gleichsinnige Verändern,
- Hilfsaufgaben nutzen: Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben; Aufgaben mit Zahlen, die leichter zu überschauen sind,
- Beziehungen nutzen: Beziehungen von Rechenoperationen, Zahlbeziehungen.“ (ebd., 2006a, 55)

Im Folgenden werden die drei grundsätzlich verschiedenen Lösungswerkzeuge – das Zählen, das Nutzen von strategischen Werkzeugen und das Abrufen von Fakten – genauer beschrieben.

1.1 Zählen

Die natürliche Entwicklung des Zählens im frühkindlichen Alter führt dazu, dass Zählstrategien als Lösungswerkzeuge für einfache Aufgaben ausgebildet werden. Die verschiedenen Zählstrategien lassen sich zunächst in „counting-all“-Strategien, künftig „Alleszählen“ genannt, und „counting-on“-Strategien, künftig „Weiterzählen“ genannt (Fuson 1982, 67), aufteilen. Darüber hinaus kann zwischen dem Zählen mit Gegenständen (direct modeling strategy) und mentalen Zählstrategien (counting strategies) (Carpenter/Moser 1984, 181) unterschieden werden.

Beim Alleszählen wird die Summe ermittelt, indem beide Summanden vollständig gezählt werden (Abb. 1.1). Bei der Aufgabe $3 + 6$ zum Beispiel wird zunächst die Menge „drei“ zählend erfasst und im Anschluss daran sechs Schritte weiter gezählt. Es wird deutlich, dass Alleszählen nur mithilfe von abzählbaren Materialien wie beispielsweise den Fingern oder Plättchen möglich ist. Diese Vorgehensweise des Alleszählens mit Material – „Counting All With Models“ (Carpenter/Moser 1982, 14; Hervorhebung im Original) – ist die primitivste Form Aufgaben zu lösen.

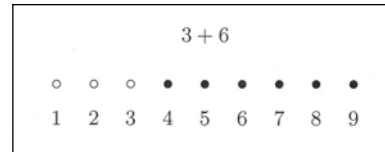


Abb. 1.1: Alleszählen an Material (Padberg/Benz 2011, 89)

Das Alleszählen ohne Material – „*Counting All Without Models*“ (Carpenter/Moser 1982, 14/15; Hervorhebung im Original) – auch als SUM-Strategie bezeichnet, entspricht dem oberen Lösungsweg, allerdings ohne Material und Finger. Bei dieser Vorgehensweise taucht das Problem auf, dass der Überblick über die bereits gezählten mentalen Objekte schnell verloren geht. In einer Untersuchung von Carpenter und Moser (1982, 14 ff.) berichten einige Kinder, dass sie sowohl den ersten als auch den zweiten Summanden doppelt zählen; bei anderen entsteht der Eindruck, dass sie sich über rhythmische Bewegungen behelfen; wiederum andere können ihre Vorgehensweise gar nicht beschreiben. Ziehen die Kinder ihre Finger hinzu, so nicht unbedingt, um den zweiten Summanden zu repräsentieren, sondern vielmehr, um den Zählprozess zu begleiten (ebd., 14 ff.).

„Concrete materials can be used to support (or rather, avoid) the double counting that is so frequently a feature of children’s difficulties.“ (Gray 2008, 88)

Beim Weiterzählen wird von einem Summanden aus weitergezählt. Bei der Aufgabe $3 + 5$ werden ausgehend von Drei fünf Schritte dazu gezählt. Tauschen der beiden Summanden, was bei diesem Beispiel effizienter ist, wird auch als „counting-on from the larger addend“ (Fuson 1992a, 256) oder als „min’ strategy“ (Siegler/Jenkins 1989, 28 f.; Wilson/Dehaene 2007, 220; Hervorhebung im Original) bezeichnet.

Die Strategie des Weiterzählens setzt verschiedene Vorstellungen bezüglich der Summanden voraus:⁵

- Beide Zählstrategien benötigen die Vorstellung einer Zahl als Einheit mit der Möglichkeit der Untergliederung in kleinere Einheiten. Aus Sicht der Zählentwicklung betrachtet befinden sich die Kinder also mindestens auf der Ebene des unbreakable chain levels (Fuson/Hall, 1983), der unzerbrechlichen Kette.⁶
- Voraussetzung für das Alleszählen ist die Fähigkeit, das zuletzt genannte Wort beim Zählen als Anzahl der Menge zu interpretieren. Beim Weiterzählen verhält sich dies zunächst umgekehrt. Das Kind muss den ersten Summanden von der Anzahl in eine Zählzahl uminterpretieren, um dann weiterzählen zu können.

„This bidirectionality of the dual meaning of the first counting-on word can be seen more clearly as follows: The count-to-cardinal direction (cardinal principle) summarizes an action that has been completed. The cardinal-to-count direction predicts an action that may be carried out.“ (Fuson 1982, 68/69)

5 Die Ausführungen beziehen sich, soweit nicht anders gekennzeichnet, auf Fuson 1982, 68 ff.

6 Deutsche Begriffe nach Weißhaupt/Peucker (2009, 60 ff.)

- Der erste Summand wird als Einheit betrachtet, die nicht mehr gezählt werden muss und von der aus weiterzuzählen ist.

„This substitution is what leads to the counting-on procedure: the production of the first addend word as the abbreviation of the first addend enumeration and the continuation of the enumeration of the entities in the second addend.“ (Fuson 1982, 69)

- Den Summanden kommt eine Doppelbedeutung zu: Sie sind sowohl Summanden als auch Teile der Summe. Das bedeutet, dass die Fünf sowohl als aus Einheiten bestehendes Element der Zahlwortreihe betrachtet werden kann als auch als Einheit selbst, die die Gesamtmenge repräsentiert.
- Die beiden Summanden müssen richtig gezählt und zusammengezählt werden können. Ein häufiger Fehler ist beispielsweise, dass das Zahlwort des ersten Summanden und die erste Einheit des zweiten Summanden gleichgesetzt werden: $5 + 3$ wird dann als „fünf, sechs, sieben“ gezählt.

Die Vorgehensweise der Kinder scheint sowohl vom Alter und damit von ihren Fähigkeiten als auch von der Darstellung der Addition abzuhängen. Erhalten Kinder über die symbolische Darstellung hinaus Bilder mit Objekten, so neigen sie eher zum Alleszählen, anders als bei der rein symbolischen Präsentation der Aufgabe (Fuson 1982, 71 f.). Auch Kinder, die in der Regel weiterzählen, fallen durch die Hinzunahme von Bildern teilweise auf die Ebene des Alleszählens zurück.

Grundsätzlich lassen sich verschiedene Zählstrategien bei Kindern beobachten (Abb. 1.2):

- Kinder, die keine Objekte gezeigt bekommen, zeichnen auf dem Tisch oder einer Karte mit dem Finger virtuelle figurierte Objekte („a *figural representation*“ (Fuson 1982, 71; Hervorhebungen im Original)), um diese dann abzuzählen.
- Vor dem Weiterzählen wird der erste Summand sehr gedehnt und langsam gesprochen oder aber auf der Karte angetippt.
- Ist der zweite Summand größer als vier, so finden sich verschiedene Zählssysteme, mithilfe derer Kinder in der Lage sind, korrekt dazuzuzählen (Abb. 1.2). Dabei ist das Abzählen von Objekten (z.B. Plättchen oder Finger) deutlich einfacher als das mentale Abzählen oder das Gegenzählen der bereits dazu gezählten Einheiten (Fuson 1982, 72 ff.).

Baroody (1987b) untersuchte bei 17 Kindergartenkindern während neun Monaten bis zum Schuleintritt die Entwicklung der Zählstrategien. Die meisten der Kinder lösen in dieser Phase die Aufgaben an Material zählend. Nur einige wenige Kinder zeigen bereits mentale Zählstrategien. Baroody leitet daraus die Wichtigkeit zahlreicher konkreter Handlungen zu Schulbeginn ab (ebd., 154).

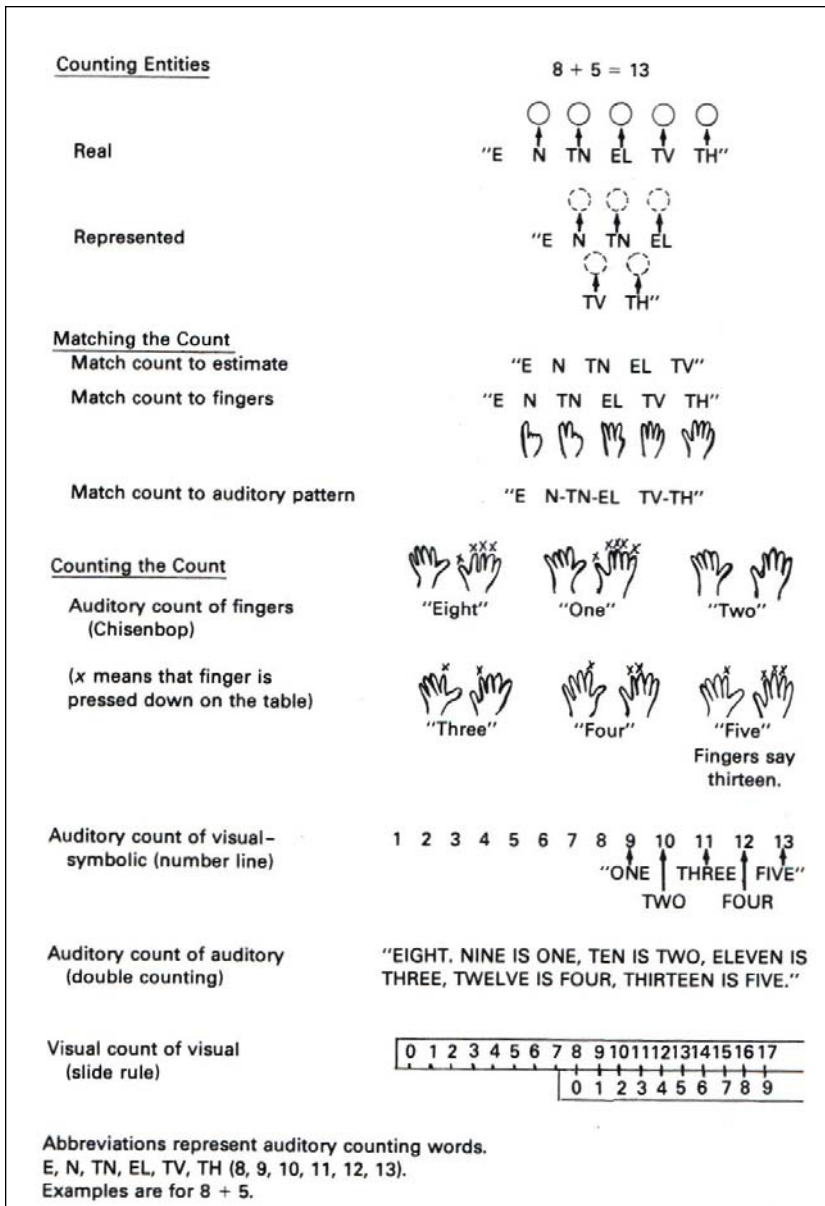


Abb. 1.2: Zählsysteme von Kindern (Fuson 1982, 74)

Carpenter und Moser (1982) beobachteten die Lösungswerkzeuge und das Operativverständnis von Kindern beim Addieren und Subtrahieren während des ersten Schuljahres – vor der Behandlung im Unterricht und danach. Beim Addieren zeigen die Kinder vor der Behandlung im Unterricht verschiedene zählende Lösungsstrategien: Es war den Kindern in den Interviews erlaubt, auf Material zurückzugreifen. Dabei war das Alleszählen mit Material der dominierende Lösungsweg. Einige Kinder zeigten auch Alleszählen ohne Material. Darüber hinaus konnten auch Strate-

gien zum Weiterzählen vom ersten Summanden sowie vom größeren Summanden – „*Counting-On-From-First*“ und „*Counting-On-From-Larger*“ (Carpenter/Moser 1982, 15; Hervorhebungen im Original) – beobachtet werden (sogenannte MIN-Strategie).

Siegler und Jenkins (1989, 28 f.) zeigen, dass Kinder häufiger auf die MIN-Strategie als auf das Alleszählen zurückgreifen, wenn ein Summand sehr groß und der andere sehr klein ist, wie beispielsweise bei $2 + 9$.

„This pattern makes sense. The greater the difference between the two addends, the greater the savings in number of counts that the min strategy provides over the sum strategy. The smaller the size of the smaller addend, the easier it is to execute the min strategy correctly.“ (Siegler/Jenkins 1989, 29)

Nach der Behandlung im Unterricht lösen die Kinder die Aufgaben zunehmend durch Weiterzählen, aber auch durch das Zurückgreifen auf Faktenwissen oder mithilfe strategischer Werkzeuge (Carpenter/Moser 1982).

Thompson (2008, 102 f.) beobachtete bei Kindern mit zunehmender Dauer des Schulbesuchs auch zählendes Lösen in größeren Schritten. Er bezeichnet diese Form des Zählens als „step-counting“ (ebd., 102). Das Führen und Auszählen von Strichlisten beispielsweise in Fünferpäckchen wird als „systematisches Zählen“ (Baireuther 2011, 41) bezeichnet.

1.2 Nutzen von strategischen Werkzeugen

Für die „nicht zählenden“ Lösungswerkzeuge finden sich unterschiedliche Aufteilungen und Bezeichnungen (vgl. Gerster/Schultz 1998, 364; Krauthausen 1995, 87 ff.; Radatz et al. 1996, 83 f.; Wittmann/Müller 1990, 43 ff.): Radatz et al. (1996, 83) beschreiben „Verdoppeln/Halbieren, Zerlegen und Zusammensetzen, gleich- und gegensinniges Verändern“. Bei Gerster/Schultz (1998, 364) findet sich eine Aufteilung in Grundaufgaben und Ableitungsstrategien. Unter Grundaufgaben werden Addieren und Subtrahieren der Null, Eins und Zwei, Verdoppeln/Halbieren, Zehnersummen, zehn als Summand [...], „Kraft der Fünf“ gefasst. Unter Ableitungsstrategien fügen Gerster und Schultz „Tauschaufgaben, Nachbaraufgaben [...], gegensinniges Verändern“ (ebd., 364) an.

In den angeführten Beschreibungen werden diese Lösungswege vorwiegend beziehungsweise ausschließlich als fertige Strategien im Sinne einer durchgängigen Lösungsmethode verstanden. Im Gegensatz dazu geht die vorliegende Studie davon aus, dass Lösungswerkzeuge abhängig vom Kontext einer Aufgabe unterschiedlich zusammengesetzt werden (Rathgeb-Schnierer 2006a, 277) und auch während des Lösungsprozesses gewechselt werden können (Rathgeb-Schnierer 2006a, 55). In diesem Sinne handelt es sich also um strategische Werkzeuge (siehe oben).

Diese können entsprechend den zugrunde liegenden mathematischen Tätigkeiten geordnet werden (vgl. auch Kapitel II 7.1):

- Das Zerlegen und Zusammenfassen der Summanden entspricht dem Umformen von Termen oder dem „Umweg“ über Ankerzahlen⁷ auf einer Geraden.
- Das Zurückgreifen auf Hilfsaufgaben: Hier liegt der Fokus auf den Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Aufgaben, verbunden mit der Möglichkeit auf eine einfachere Aufgabe zurückzugreifen und mit deren Hilfe die vorliegende Aufgabe zu lösen. Dabei ist zu unterscheiden, ob die Hilfsaufgabe aktiv aus dem Wissen des Kindes abgerufen oder aus dem Lösungskontext entnommen wird. erinnert sich das Kind beispielsweise bei der Aufgabe $6 + 7$ an die nahe liegende Verdopplung $6 + 6 = 12$, so greift das Kind auf eigenes aktives Wissen zurück. Löst das Kind die gleiche Aufgabe als Nachbaraufgabe von $6 + 6$, die es zuvor vielleicht auch zählend oder über ein Anschauungsmittel gelöst hat, so erkennt das Kind diese Aufgabenbeziehung, ohne dabei aber zwingend die Hilfsaufgabe selbst abrufen zu müssen.

Daraus ergibt sich folgende Struktur der strategischen Werkzeuge (vgl. a. Kapitel II 7.1):

Zerlegen – zusammensetzen:

- Bündeln zum ganzen Zehner durch:
 - Ausnützen der „Kraft der Fünf“
 - Ergänzen zur Zehn
- Bilden anderer Bündelungen

Rückgriff auf eine Hilfsaufgabe:

- Nutzen von Nachbaraufgaben (auch Verdopplung)
- Verändern der Aufgabe (durch Tauschen, durch gegen- oder gleichsinniges Verändern)
- Analogiebildung

Zu unterscheiden ist, ob auf eine Hilfsaufgabe aus dem Lösungskontext oder auf eine bereits automatisierte Aufgabe zurückgegriffen wird.

1.3 Abrufen von Fakten

Aufgaben werden dann als automatisiert bezeichnet, wenn der Lösende für die Ergebnisfindung maximal zwei bis drei Sekunden benötigt (Gerster/Schultz 1998, 373).

„Ziel der Erarbeitung des Kleinen Einspluseins im ersten Schuljahr ist es, die Sätze des Kleinen Einspluseins am Ende des Schuljahres entweder schon auswendig zu kennen oder durch Rechenstrategien (und möglichst nicht mehr durch Zählstrategien) rasch zu finden.“ (Padberg/Benz 2011, 101; Hervorhebung im Original)

⁷ Mit „Ankerzahlen“ werden die Zahlen bezeichnet, die für die Gliederung des Zahlenraums zentral sind und damit eine bessere Orientierung ermöglichen (vornehmlich die Zehnerzahlen und im kleinen Zahlenraum auch die Fünf).

Wenngleich die Betonung auf der Erarbeitung operativer Zusammenhänge liegt (Gaidoschik 2006, 81; Hess 2012; Kaufmann/Wessolowski 2006, 107; Krauthausen/Scherer 2006, 22 ff.; Padberg/Benz 2011, 101 ff.; Schütte 2008, 116 f.; Wittmann/Müller 1990), so ist das erklärte Ziel der ersten Klasse dennoch die Automatisierung des kleinen Einspluseins (dazu auch Gaidoschik 2012, 11; Gerster 1994, 46; Gerster/Schultz 1998, 373; Krauthausen 2009, 104 f.; Wittmann/Müller 1990, 46).

„In the third and last stage of the learning process, all single-digit addition and subtraction combinations are gradually memorised.“ (Verschaffel/De Corte 1996, 118)

Auch Verschaffel und De Corte (1996, 117 f.) machen deutlich, dass am Ende des Lernprozesses im Zahlenraum bis zwanzig die Automatisierung des kleinen Einspluseins steht. Die Entwicklung heuristischer beziehungsweise operativ-strategischer Werkzeuge geht der Automatisierung voraus (Kapitel I 2.3.1).

„Das in der Vergangenheit nicht selten verpönte Auswendiglernen des kleinen Einspluseins und Einsminuseins hat auch in einem modernen Anfangsunterricht seine Berechtigung. Dass dies nicht in Form eines sturen Drills erfolgt, sondern mit Hilfe vielfältiger, auch operativer Übungen zur Förderung eines flexiblen Rechnens, versteht sich von selbst.“ (Radatz et al. 1996, 84)

Die Ausbildung strategischer Werkzeuge bildet gleichzeitig auch eine Grundlage für die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen (Kapitel I 2.3.2). Da das Ableiten von Hilfsaufgaben aber nur auf der Grundlage sinnhafter Vorstellungen und deren Verständnis gebildet werden kann (Gray 2008, 87; Krauthausen 1995, 87 ff.), muss der Arbeit mit strategischen Werkzeugen beziehungsweise der Zahlenblickschulung (Kapitel I 6) zur Wahrnehmung von Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen viel Raum gegeben werden (Schütte 2008, 105).

Vielfach wird beschrieben, dass Kinder mit Schwierigkeiten beim Rechnenlernen auch größere Probleme mit der Automatisierung des kleinen Einspluseins zeigen.

„Earlier research by the author indicated that many below average attainers do not remember number facts and use alternative strategies to obtain solutions to basic arithmetical problems.“ (Gray 1991, 551)

2 Vom Zählen zum Rechnen

Der zentrale und entscheidende Schritt in die Mathematik der ersten Klasse ist die Entwicklung strategischer Werkzeuge und die Automatisierung von Fakten. Damit einher geht die Ablösung vom Zählen.

2.1 Gründe für die Ablösung vom Zählen

Die Ablösung vom Zählen zum Abrufen von Fakten und Nutzen strategischer Werkzeuge stellt die Hauptaufgabe des Mathematikunterrichts im ersten Schuljahr dar (Gerster/Schultz 1998, 363 ff.).

„Zählmethoden als alleinige oder vorwiegend praktizierte Lösungsstrategie bei Kindern über das erste Schuljahr hinaus zu tolerieren ist *unterlassende Hilfeleistung* und bewirkt, dass sich Unterschiede zwischen schwachen und befähigten Schülern ständig vergrößern.“ (Gerster 1994, 46; Hervorhebungen im Original)

Für die Ablösung vom Zählen werden zahlreiche Gründe genannt:

- Zählendes Rechnen ist stark fehleranfällig, da die Kinder sich häufig um eins verzählen. Grundsätzlich kann festgehalten werden, dass Rechnen zu weit größerer Lösungsrichtigkeit führt als Zählen (Benz 2005, 175 ff.).
- Sogenannte „Zählkinder“ (Gerster 1994, 45) zählen auch Aufgaben, die sie bereits automatisiert haben oder für die sie ein strategisches Werkzeug kennen. Zählen ist hier ein unreflektierter Automatismus. Durch das Perfektionieren von Zählstrategien erscheint das Zurückgreifen auf automatisiertes Wissen unnötig (Gaidoschik 2010, 518 ff.).

„Some children – often with a limited array of known facts – may become so efficient in counting, that they use it as a universal method that does not involve them in a risk of attempting to use a limited number of known facts.“ (Gray 2008, 89)

- Auch wenn die Techniken des Zählens anstrengend sind, bereiten sie Kindern in kleinen Zahlräumen in der Regel zunächst keine Probleme. Daher sehen diese zunächst auch keinen Grund, von ihrem gewohnten und natürlichen Zugang abzuweichen und so automatisiertes Wissen zu entwickeln. Darin aber liegt die Gefahr des verhärteten Zählens (Gerster 1994, 45).

„[...]counting does not enable the child to encapsulate the knowledge, indeed the indications are that it in fact does not reverse.“ (Gray 1991, 571)

- Für Zählkinder stellt jede Aufgabe erneut einen Auftrag zum Zählen dar (Gaidoschik 2010, 519 ff.; Gray 2008, 85 ff.). Sie erkennen daher auch keine Aufgabenbeziehungen und rechnen bzw. zählen jede Aufgabe erneut (Gerster 1994, 45).

„In one sense *they make things more difficult for themselves* and as a consequence *become less able*.“ (Gray 1991, 570; Hervorhebungen im Original)

- Der Zeitraum zwischen dem Anschauen einer Aufgabe und dem Finden des Ergebnisses ist zu groß, als dass eine Verbindung hergestellt werden könnte. Außerdem ist die gesamte Aufmerksamkeit auf das Zählen gerichtet, so dass eine Automatisierung unwahrscheinlich wird und auch keine strategischen Werkzeuge entwickelt werden (Gray 1991, 570; Scherer/Moser Opitz 2010; Schipper 2005a, 2005b).

- Durch das langwierige, zählende Lösen von Aufgaben entstehen „Einzelfakten“ (Gerster 1994, 45; Hervorhebung im Original), die nicht mit anderen Aufgaben vernetzt werden können und daher schneller wieder verloren gehen (Scherer/ Moser Opitz 2010).
- Beim Rechnen in höheren Zahlenräumen, bei anwendungsorientierten Aufgaben, beim Problemlösen oder in der Geometrie beansprucht das zählende Lösen so viel Kapazität, dass die eigentliche Aufgabe in den Hintergrund rückt (Gerster 1994, 45).

„These procedures (counting procedures) may be successful for simple combinations but they may become extremely difficult for larger numbers.“ (Gray 2008, 87; Erläuterung in Klammer durch die Autorin)

2.2 Die Entwicklung vom Zählen zum Rechnen

Der Übergang vom Zählen zum Rechnen wird nicht in einem Schritt vollzogen, vielmehr können verschiedene Phasen beschrieben werden. Carpenter und Moser (1984, 196 ff.) nennen fünf Entwicklungsebenen für das Erlernen der Addition:

- Ebene 0: Die Kinder sind nicht in der Lage, Additionsaufgaben zu lösen.
- Ebene 1: Beim Zählen wird auf Objekte zurückgegriffen.
- Ebene 2: Dabei handelt es sich um ein Zwischenstadium. Es wird sowohl an Objekten als auch mental gezählt.
- Ebene 3: Es werden überwiegend mentale Zählstrategien genutzt.
- Ebene 4: Aufgaben werden über das Abrufen von Fakten oder durch Ableitungen von Fakten gelöst.

Fuson (1992a, 250 ff.) unterscheidet ausgehend von Rechengeschichten drei Entwicklungsstufen auf dem Weg zum Rechnen. Dabei nimmt sie die Deutung der Summanden beim Lösenden in den Blick und kommt zu folgenden Unterscheidungen:

- Perceptual unit items: Auf dieser Stufe nehmen die Kinder jeden Summanden als aus einzelnen Objekten bestehende Anzahl wahr und addieren entsprechend durch Alleszählen.
- Sequence unit items: Hier nehmen die Kinder beide Summanden als Teilmengen der Gesamtmenge wahr. Die Summanden können nun als quasi-simultane Einheiten wahrgenommen oder in Teileinheiten zum geschickten Zählen gegliedert werden. Daher kann die Summe nun über Weiterzählen (auch in größeren Schritten) ermittelt werden.
- Ideal chunkable unit items: In dieser Phase zerlegen die Kinder die Summanden in Teilsummen, die sie durch Faktenabruf bereits berechnen können. Dabei sind sowohl Nachbaraufgaben als auch das Ergänzen zur Zehn möglich.

Diese Entwicklung wird auch von Sarama und Clements (2009, 126 ff.) unterstrichen. Sie beschreiben, dass mit der Entwicklung eines numerischen Teile-Ganzes-Konzeptes im Alter von etwa sechs Jahren das Nutzen von Ableitungen im Lösungsprozess möglich wird, was bei Fuson der Phase des „ideal chunkable unit item[s]“ entspricht.

Auch Verschaffel und De Corte (1996, 117 f.) können drei Phasen identifizieren, die allerdings im Wesentlichen den oben (Kapitel I 1) beschriebenen Typen von Lösungswerkzeugen entsprechen:

1. zählende Lösungsstrategien,
2. das Entwickeln von Lösungen über das Ableiten und das Nutzen von Rechengesetzen und
3. die Automatisierung des kleinen Einspluseins.

Mulligan (2011, 19 ff.) referiert verschiedene australische Studien mit Kindergartenkindern und Schulanfängern, in denen die Kompetenzen zum Erkennen und Darstellen geometrischer Muster und strukturierter Punktemengen sowie zum Zählen in verschiedenen Schritten mit und ohne Förderprogrammen untersucht werden. Sie formuliert die Hypothese, dass schwache Kinder von sich aus den Blick nicht auf Strukturen in Mustern richten und sie damit auch Schwierigkeiten beim Darstellen von Mustern in Punktemengen o. ä. entwickeln (ebd., 35). Abschließend kommt sie zu der Schlussfolgerung, dass Kinder ohne ein Musterverständnis bei Punktedarstellungen im basalen Zählen in Einerschritten verbleiben und dabei keine geschickten Strategien entwickeln.

Carpenter und Moser (1984, 189 ff.) heben hervor, dass Kinder in der Übergangsphase vom Zählen zum Rechnen zu einem Erhebungszeitpunkt nicht durchgängig den gleichen Lösungsweg nutzen, sondern die Lösungswerkzeuge aufgabenabhängig einsetzen. Je nach Aufgabe können sowohl Zählstrategien mithilfe von Materialien, Strategien des Weiterzählens oder auch das Abrufen von Fakten genutzt werden. Da einzelne Aufgaben schneller automatisiert werden als andere, können Kinder gleichzeitig Aufgaben über Faktenwissen und Ableitungen lösen (Carpenter/Moser 1984, 181).

Gray (1991, 554 ff.) beschreibt in seinem Modell eine Hierarchie von Lösungswegen („preferential hierarchy with route of regression“; ebd., 555): Der schnellste und damit auch bevorzugte Lösungsweg ist das Abrufen von Fakten. Ist dies bei einer Aufgabe nicht möglich, so sucht der Lösende einen anderen Weg, der jedoch einen Rückschritt in der Hierarchie bedeutet. Dies kann sowohl das Nutzen strategischer Werkzeuge durch Rückgriff auf Basisfakten sein als auch das Nutzen von Zählstrategien.

In seiner Studie konnte Gray zeigen, dass überdurchschnittlich und durchschnittlich begabte Kinder tendenziell eher auf strategische Werkzeuge zurückgrei-