

Studien zur theoretischen und empirischen
Forschung in der Mathematikdidaktik

RESEARCH

Luisa-Marie Hartmann

Prozesse beim Problem Posing zu gegebenen realweltlichen Situationen und die Verbindung zum Modellieren

MOREMEDIA



Springer Spektrum

Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von

Gilbert Greefrath, Münster, Deutschland

Stanislaw Schukajlow, Münster, Deutschland

Hans-Stefan Siller, Würzburg, Deutschland

In der Reihe werden theoretische und empirische Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik – von der vorschulischen Bildung bis zur Hochschule – publiziert. Dabei kann eine Vernetzung innerhalb der Mathematikdidaktik sowie mit den Bezugsdisziplinen einschließlich der Bildungsforschung durch eine integrative Forschungsmethodik zum Ausdruck gebracht werden. Die Reihe leistet so einen Beitrag zur theoretischen, strukturellen und empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik im Zusammenhang mit der Qualifizierung von wissenschaftlichem Nachwuchs.

Luisa-Marie Hartmann

Prozesse beim Problem
Posing zu gegebenen
realweltlichen
Situationen und die
Verbindung zum
Modellieren

 Springer Spektrum

Luisa-Marie Hartmann
Münster, Deutschland

ISSN 2523-8604

ISSN 2523-8612 (electronic)

Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

ISBN 978-3-658-43595-0

ISBN 978-3-658-43596-7 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-43596-7>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2023

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geographische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Marija Kojic

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Das Papier dieses Produkts ist recyclebar.

Geleitwort

„Das ist irgendwie richtig schwierig, wenn man so viele Ideen hat und das so durcheinander geht...“, bemerkt Max während er eigene Fragestellungen zu vorgegebenem situativem Kontext entwickeln muss. Dieses Zitat aus der Untersuchung von Frau Hartmann verdeutlicht die Herausforderungen beim Problem Posing – der Entwicklung eigenständiger Problemstellungen.

Problem Posing bietet aber auch viele Chancen, für das Problemlösen und Modellieren. Mathematische Modellierungskompetenz ist ein wichtiges Thema in der Mathematikdidaktik. In den letzten Jahrzehnten wurden vielfältige Untersuchungen zur Modellierungskompetenz durchgeführt, die unser Wissen über die Entwicklung dieser Kompetenz erweitert haben. Allerdings ist die Forschungslage bezüglich einzelner Aspekte der Modellierungskompetenz noch sehr unterschiedlich ausgeprägt. Während eine breite Befundlage zu Charakterisierungen von Modellierungsprozessen existiert, sind differenziertere Analysen von spezifischen prozessbezogenen Aspekten der Modellierungskompetenz noch wenig vorhanden. Frau Hartmann hat einen solchen prozessbezogenen Aspekt als Thema ihrer Dissertation ausgewählt und Prozesse beim Problem Posing zu gegebenen realweltlichen Situationen untersucht. Zunächst lässt sich konstatieren, dass Problem Posing ein relativ neues Forschungsfeld darstellt, deren Bedeutsamkeit durch die Arbeiten von Jinfu Cai, Roza Leikin, Peter Liljedahl, Benjamin Rott und anderen Kolleg:innen in letzten zehn Jahren deutlich zugenommen hat. Die Verbindung beider Forschungsfelder – Untersuchungen zur mathematischen Modellierungskompetenz und zum Problem Posing – wurde noch nicht geleistet. Frau Hartmanns Arbeit ist an der Schnittstelle beider Forschungsfelder angesiedelt und leistet Pionierarbeit in diesem Bereich. Das Hauptziel ihrer Studie war, den Modellierungsprozess um die Problem Posing-Perspektive zu ergänzen und eine Verbindung zwischen dem Modellierungsprozess und dem Prozess des

Problem Posing herzustellen. Dementsprechend beziehen sich die Forschungsfragen der Arbeit auf die Prozesse des Problem Posings und des Modellierens sowie auf die Verbindung beider Prozesse. Um der Analyse eine klare Struktur zu geben, werden die Arbeit in zwei Phasen gegliedert: Analyse der Generierung eigener Fragestellungen und Analyse der Bearbeitung selbst entwickelter Fragestellungen. Methodisch hat Frau Hartmann einen qualitativ-explorativen Ansatz gewählt, der sehr gut geeignet ist, um Prozesse zu beschreiben. Dieser ermöglicht tiefgehende Analysen des Forschungsgegenstandes.

Ergebnisse der Studie sind höchst interessant und leisten einen wesentlichen Beitrag zur Erforschung der Modellierungskompetenz und des Problem Posings. Frau Hartmann dokumentiert zunächst die Prozesse und den Wechsel zwischen den Prozessen bei Problem Posing und anschließend beim Modellieren jeweils in der Entwicklungsphase und in der Phase der Bearbeitung von selbst entwickelten Problemen. Einzelfallanalysen ergänzen das Bild und ermöglichen einmalige Eindrücke darin, wie eine Generierung von Fragestellungen aus den realweltlichen Situationen und die Bearbeitung selbst entwickelter Probleme erfolgt. Ein zentrales Ergebnis der Studie ist das häufige Auftreten der Modellierungsaktivitäten Verstehen, Vereinfachen/Strukturieren und zum Teil auch des Mathematisierens in der Entwicklungsphase. Die Lösungsprozesse der Studierenden in der Bearbeitungsphase führen zur Generierung weiterer Fragestellungen, Teilfragestellung sowie Evaluation und Reformulierung der ursprünglichen Fragestellungen.

Ein wichtiger Teil der Diskussion bezieht sich auf die Einordnung der Ergebnisse in die bisherigen Befunde aus den Forschungen zum Problem Posing und zum Modellieren. Beispielsweise geben die Ergebnisse der Studie von Frau Hartmann empirische Hinweise darauf, dass initiale Lösungsprozesse bereits sehr früh während der Entwicklung der Fragestellung stattfinden können. Somit zeigt es sich, dass eine Generierung der Fragestellungen großes Potential hat, kognitive Aktivitäten – hier spezifisch Modellierungsaktivitäten – anzuregen. Dies ist ein neues Ergebnis, das empirisch noch nicht gezeigt wurde. Als Ergebnisse der Arbeit formuliert Frau Hartmann Hypothesen, die in künftigen Studien überprüft werden können. Eine Hypothese besagt, dass bereits während der Entwicklungsphase die Konstruktion des Realmodells stattfinden kann und die Mathematisierung vorbereitet wird. Ein hypothetisches Modell zur Beschreibung modellierungsbezogener Problem Posing- und Modellierungsaktivitäten rundet die Diskussion ab. Dieses Modell dient als eine Art Bindeglied, welches Theorien des Problem Posings und des Modellierens verbindet.

Abschließend wünschen wir Ihnen, liebe Leserinnen und Leser, eine erkenntnisreiche Lektüre und hoffen, dass die Ergebnisse und Erkenntnisse aus dieser Studie Ihr Verständnis für die mathematische Modellierungskompetenz und das

Problem Posing bereichern werden. Möge dieses Buch dazu beitragen, neue Perspektiven und Impulse für die Lehre und Forschung in der Didaktik der Mathematik zu schaffen. Lassen Sie uns gemeinsam die Herausforderungen und Chancen des Problem Posings und des Modellierens erkunden, um die mathematische Bildung unserer Schülerinnen und Schüler zu fördern.

Stanislaw Schukajlow
Universität Münster
Münster, Deutschland

Benjamin Rott
Universität Köln
Köln, Deutschland

Danksagung

Drei spannende Jahre voller schöner Momente und großen Herausforderungen liegen hinter mir. In diesen drei Jahren konnte ich nicht nur fachlich einen tiefen Einblick in die mathematikdidaktische Forschung erlangen, sondern auch persönlich über mich hinauswachsen. Auf diesem Weg haben mich zahlreiche Menschen begleitet und inspiriert, denen ich an dieser Stelle herzlich danken möchte.

Zu Beginn möchte ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow danken, der mir bereits während meines Studiums erste Einblicke in die Welt der mathematikdidaktischen Forschung geboten, mich für diese Forschung begeistert und so diese Arbeit erst ermöglicht hat. Danke für dein Vertrauen, deine großartige Unterstützung im Rahmen konstruktiver Diskussionen und Co-Autorenschaften sowie für die Chance, meine Ideen auf nationalen und internationalen Konferenzen und Forschungsaufenthalten zu diskutieren. Außerdem danke ich Prof. Dr. Benjamin Rott als Zweitgutachter für die gewinnbringenden Diskussionen und die bereitwillige Übernahme dieser Rolle. Auch meinem Drittprüfer, Prof. Dr. Gilbert Greefrath, möchte ich für die Annahme der Anfrage und für bereichernde Diskussionen – auch im Rahmen interner Institutskolloquien – danken.

An dieser Stelle möchte ich auch meinen Kolleginnen und Kollegen danken, die mich auf meinem Weg begleitet haben. Danke für euer offenes Ohr und die konstruktiven Gespräche im Rahmen von Kolloquien, aber auch zwischendurch auf dem Flur, bei einem Kaffee oder bei der ein oder anderen Joggingrunde. Insbesondere danke ich Dr. Janina Krawitz, die mich für die *Problem Posing*-Forschung begeistert hat und mich mit anregenden Diskussionen bei der Anfertigung der Dissertation unterstützt hat. Auch danke ich den Hilfskräften, Masterkandidatinnen und -kandidaten für die Transkriptionen sowie den Studierenden für die freiwillige Teilnahme an der Studie. Ein großer Dank geht auch

an alle Kolleg:innen sowie Freund:innen, die mir konstruktive Rückmeldungen zu meiner Arbeit gegeben haben. Insbesondere möchte ich Paula Wesselmann und Friederike Tenkamp für die ausführliche Korrekturlektur meiner Arbeit danken.

Ohne die Unterstützung meiner Familie und Freundinnen und Freunde hätte ich die große Herausforderung der Promotion jedoch nicht meistern können. Danke für euer offenes Ohr, euer entgegengebrachtes Vertrauen in mich und eure aufmunternden Worte in herausfordernden Zeiten. Danke, dass ihr mich davon überzeugt habt, die Promotion zu wagen.

Vielen lieben Dank euch allen! Ohne euch wäre diese Arbeit so nicht möglich gewesen.

Zusammenfassung

Die Identifizierung und Entwicklung mathematischer Probleme in realweltlichen Situationen stellt eine notwendige Voraussetzung für das Modellieren dar. Der Entwicklung eigener Probleme (*Problem Posing*) wird ein großes Potential zur Förderung von Problemlösefähigkeiten zugeschrieben, da es Aktivitäten auslösen kann, die für den Lösungsprozess essenziell sind. Das mathematische Modellieren beschreibt das Lösen realweltlicher Probleme. Folglich könnte das *Problem Posing* auch gewinnbringend zur Förderung des Modellierens eingesetzt werden. Um das Potential des *Problem Posings* zur Förderung des Modellierens abzuschätzen, ist Grundlagenforschung bezüglich der beteiligten Aktivitäten und deren Verbindungen notwendig. Bislang fehlt es jedoch an Erkenntnissen zum Modellierungsprozess aus einer *Problem Posing*-Perspektive.

Die vorliegende Studie fokussiert diese Forschungslücke, indem in einem ersten Schritt die Entwicklungs- und Bearbeitungsprozesse bezüglich der ablaufenden *Problem Posing*- und Modellierungsaktivitäten untersucht und in einem zweiten Schritt Verbindungen zwischen diesen Aktivitäten analysiert werden. Dazu wurde eine qualitativ-explorative Studie mit sieben angehenden Lehrkräften durchgeführt. Die angehenden Lehrkräfte wurden aufgefordert, Aufgaben basierend auf vorgegebenen realweltlichen Situationen zu entwickeln und ihre selbstentwickelten Aufgaben im Anschluss zu lösen. Dabei wurde die Methode des Lauten Denkens, ein *Stimulated Recall Interview* und ein Interview angewendet. Die Entwicklungs- und Bearbeitungsprozesse wurden anschließend im Hinblick auf die stattfindenden *Problem Posing*- und Modellierungsaktivitäten analysiert.

In den Entwicklungsphasen konnten die fünf *Problem Posing*-Aktivitäten – Verstehen, Explorieren, Generieren, Evaluieren, Problemlösen – identifiziert

werden. Es zeigte sich, dass insbesondere die in der realen Welt angesiedelten Modellierungsaktivitäten (d. h. Verstehen, Vereinfachen und Strukturieren) bereits beim *modellierungsbezogenen Problem Posing* involviert sind. Dieses Ergebnis deutet darauf hin, dass die Entwicklung eigener Aufgaben basierend auf realweltlichen Situationen vor der Lösung die Konstruktion eines angemessenen Situations- und Realmodells im Lösungsprozess unterstützen kann. Darüber hinaus konnten in den Bearbeitungsphasen selbst-entwickelter Modellierungsaufgaben alle Modellierungsaktivitäten identifiziert werden sowie *Problem Posing* als Problemlösestrategie, als Entwicklung weiterführender Aufgaben und als Evaluation und Reformulierung der selbst-entwickelten Aufgaben. Auf Basis der Ergebnisse konnten Hypothesen generiert werden, die als Grundlage für die Entwicklung eines integrierten Modells des *Problem Posings* und Modellierens dienen. Auf diese Hypothesen und das Modell kann in zukünftigen Studien aufgebaut werden. Insgesamt liefern die Ergebnisse erste Hinweise auf das Potential des *Problem Posings* zur Förderung des Modellierens. Weitere quantitative Untersuchungen bezüglich der Wirkung sind dringend notwendig.

Schlagwörter: Problem Posing · Mathematisches Modellieren · Kognitive Prozesse · Realweltliche Situationen

Keywords: Problem posing · Mathematical modelling · Cognitive processes · Real-world situations

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ziel der Arbeit	3
1.2	Aufbau der Arbeit	4
2	Problemlösen	7
2.1	Definition mathematisches Problem und Problemlösen	7
2.2	Problemlöseprozess	11
2.3	Problemlösestrategien	12
3	Mathematisches Modellieren	15
3.1	Definition mathematisches Modellieren	15
3.2	Relevanz und Perspektiven des mathematischen Modellierens	16
3.2.1	Perspektiven und Ziele des mathematischen Modellierens	16
3.2.2	Mathematisches Modellieren in den Bildungsstandards	20
3.3	Modellierungsaufgaben	21
3.3.1	Klassische Einteilung realweltlicher Aufgaben	21
3.3.2	Aufgabenkriterien von Modellierungsaufgaben	23
3.3.3	Beispielaufgabe Seilbahn	27
3.4	Modellierungsprozess	28
3.4.1	Modellierungsaktivitäten	29
3.4.2	Modellierungsprozess am Beispiel der Aufgabe Seilbahn	34
3.5	Schwierigkeiten beim mathematischen Modellieren	38

4	Problem Posing	43
4.1	Definition <i>Problem Posing</i>	43
4.2	<i>Problem Posing</i> -Stimuli	44
4.2.1	Systematisierung <i>Problem Posing</i> -Stimuli	44
4.2.2	Beispielstimulus <i>modellierungsbezogenes Problem Posing</i>	48
4.2.3	Beispielstimulus <i>lösungsinternes Problem Posing</i>	48
4.3	<i>Problem Posing</i> -Prozess	49
4.3.1	Prozess kreativen mathematischen Denkens	50
4.3.2	Aktivitäten beim <i>Problem Posing</i>	50
4.3.3	<i>Problem Posing</i> -Prozess am Beispielstimulus Seilbahn	56
4.4	Relevanz und Perspektiven des <i>Problem Posings</i>	57
5	Verbindungen des Problemlösens, Modellierens und <i>Problem Posings</i>	61
5.1	Verortung des Problemlösens und <i>Problem Posings</i> im Modellierungsprozess	61
5.2	Verbindung zwischen <i>Problem Posing</i> und innermathematischem Problemlösen	64
5.2.1	<i>Problem Posing</i> vor dem Problemlösen	67
5.2.2	<i>Problem Posing</i> während und nach dem Problemlösen	67
5.3	Verbindung zwischen <i>Problem Posing</i> und Modellieren	69
5.3.1	<i>Problem Posing</i> vor dem Modellieren	70
5.3.2	<i>Problem Posing</i> während und nach dem Modellieren	72
6	Forschungsfragen und Ziele der Untersuchung	75
7	Erhebungsmethode	79
7.1	Verortung der Untersuchung in der empirischen Bildungsforschung	79
7.2	Beschreibung der Stichprobenziehung und der realisierten Stichprobe	81
7.3	Realweltliche Situationen	84
7.3.1	Konzeption der realweltlichen Situationen	84
7.3.2	Theoretische Analyse der verwendeten realweltlichen Situationen	88
7.4	Datenerhebung	97

7.4.1	Datenerhebung über <i>Zoom</i>	98
7.4.2	Ablauf der Untersuchung	99
7.4.3	Lautes Denken	103
7.4.4	Interview	107
8	Auswertungsmethode	109
8.1	Qualitative Inhaltsanalyse	110
8.1.1	Aufbereitung der Daten	112
8.1.2	Initiierende Textarbeit	116
8.1.3	Entwicklung des Kategoriensystems	116
8.1.4	Kodierung	122
8.1.5	Analyse und Ergebnisdarstellung	125
8.2	Gütekriterien	127
8.2.1	Gütekriterien qualitativer Forschung	128
8.2.2	Ethische Gütekriterien	133
9	Ergebnisse	137
9.1	Entwicklungsphase	137
9.1.1	Problem Posing -Aktivitäten in der Entwicklungsphase	138
9.1.2	Modellierungsaktivitäten in der Entwicklungsphase	157
9.1.3	Gemeinsames Auftreten der <i>Problem Posing</i> - und Modellierungsaktivitäten in der Entwicklungsphase	166
9.2	Bearbeitungsphase	175
9.2.1	Modellierungsaktivitäten in der Bearbeitungsphase	175
9.2.2	<i>Problem Posing</i> in der Bearbeitungsphase	192
9.2.3	Gemeinsames Auftreten der Modellierungsaktivitäten und des <i>lösungsinternes Problem Posings</i> in der Bearbeitungsphase	198
9.3	Fallanalysen	204
9.3.1	Übersicht der Fälle und Fallauswahl	204
9.3.2	Ausgangssituation Esststäbchen	208
9.3.3	Ausgangssituation Feuerwehr	226
9.3.4	Ausgangssituation Seilbahn	241
9.4	Zusammenfassung der Ergebnisse	257

9.4.1	Entwicklungsphase	258
9.4.2	Bearbeitungsphase	260
9.4.3	Verbindung <i>Problem Posing</i> und Modellieren	261
10	Diskussion	263
10.1	Entwicklungsphase	264
10.1.1	<i>Problem Posing</i> -Aktivitäten in der Entwicklungsphase	264
10.1.2	Modellierungsaktivitäten in der Entwicklungsphase	267
10.1.3	Verbindung <i>Problem Posing</i> und Modellieren in der Entwicklungsphase	269
10.2	Bearbeitungsphase	271
10.2.1	Modellierungsaktivitäten in der Bearbeitungsphase	271
10.2.2	<i>Problem Posing</i> in der Bearbeitungsphase	273
10.2.3	Verbindung Modellieren und <i>Problem Posing</i> in der Bearbeitungsphase	276
10.3	Hypothetisches Modell zur Beschreibung des <i>modellierungsbezogenen Problem Posing</i> - und des nachfolgenden Modellierungsprozesses	277
11	Stärken und Limitationen der Untersuchung	283
12	Implikationen für Forschung und Praxis	289
12.1	Implikationen für die Forschung	289
12.2	Implikationen für die Praxis	293
13	Fazit	299
	Literaturverzeichnis	301

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1	Problemlösen als Überwindung der Barriere zur Transformation eines Anfangs- in einen Zielzustand	9
Abbildung 3.1	Modellierungsaufgabe Seilbahn	28
Abbildung 3.2	Der idealisierte Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2005)	29
Abbildung 3.3	Mögliches Realmodell zur Aufgabe Seilbahn	35
Abbildung 3.4	Skizze des mathematischen Zusammenhangs zur Aufgabe Seilbahn	36
Abbildung 4.1	Unstrukturierter realweltlicher Stimulus Seilbahn	48
Abbildung 4.2	Exemplarische Lösung einer selbst-entwickelten Fragestellung zur Ausgangssituation Seilbahn	49
Abbildung 4.3	Sequenz der <i>Problem Posing</i> -Aktivitäten von Novizinnen und Novizen (links) und Expertinnen und Experten (rechts) (Pelczer & Gamboa, 2009, S. 359)	53
Abbildung 4.4	Deskriptives Prozessmodell des strukturierten <i>Problem Posings</i> nach Baumanns und Rott (2018, S. 48)	54
Abbildung 6.1	Übersicht über die Forschungsfragen	76
Abbildung 7.1	Realweltliche Situation Essstäbchen	89
Abbildung 7.2	Realweltliche Situation Feuerwehr	92
Abbildung 7.3	Mögliches Realmodell zur Aufgabe Feuerwehr in Anlehnung an Rellensmann (2019)	93
Abbildung 7.4	Skizze des mathematischen Zusammenhangs zur Aufgabe Feuerwehr	94

Abbildung 7.5	Realweltliche Situation Seilbahn	96
Abbildung 7.6	Erhebungssituation	98
Abbildung 7.7	Aufzeichnungssituationen	102
Abbildung 7.8	Schematischer Ablauf der Erhebung	102
Abbildung 7.9	Ablauf der Informationsaufnahme und -verarbeitung nach dem Drei-Speicher-Modell (Konrad, 2020, S. 6)	103
Abbildung 8.1	Ablauf einer qualitativen Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2018, S. 46)	111
Abbildung 8.2	Ablauf der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse in Anlehnung an Kuckartz (2018, S. 100) und Schreier (2014)	112
Abbildung 8.3	Exemplarischer Transkriptausschnitt	114
Abbildung 9.1	Linus Skizze Seilbahn	142
Abbildung 9.2	Max selbst-entwickelte Fragestellung Seilbahn	146
Abbildung 9.3	Prozessschema der <i>Problem Posing</i> -Aktivitäten in der Entwicklungsphase	157
Abbildung 9.4	Leons Markierungen Feuerwehr	168
Abbildung 9.5	Ninas Fragestellung Feuerwehr	170
Abbildung 9.6	Ninas Fragestellung Seilbahn	171
Abbildung 9.7	Linus Skizze Feuerwehr	180
Abbildung 9.8	Max Skizze Feuerwehr	181
Abbildung 9.9	Fabians aufgestellte Formel Esstäbchen	182
Abbildung 9.10	Fabians Rechnung Esstäbchen	184
Abbildung 9.11	Linus Rechnung Seilbahn	184
Abbildung 9.12	Linus Antwortsatz Seilbahn	185
Abbildung 9.13	Leas Rechnung Esstäbchen	203
Abbildung 9.14	Leas Aufzeichnungen zur Ausgangssituation Esstäbchen	209
Abbildung 9.15	Schematische Darstellung der Entwicklungsphase von Lea zur Ausgangssituation Esstäbchen	211
Abbildung 9.16	Schematische Darstellung der Bearbeitungsphase von Lea zur Ausgangssituation Esstäbchen	214
Abbildung 9.17	Theos Aufzeichnungen zur Ausgangssituation Esstäbchen	217
Abbildung 9.18	Schematische Darstellung der Entwicklungsphase von Theo zur Ausgangssituation Esstäbchen	220
Abbildung 9.19	Theos umformulierte selbst-entwickelte Fragestellung Esstäbchen	221

Abbildung 9.20	Schematische Darstellung der Bearbeitungsphase von Theo zur Ausgangssituation Esstabchen	224
Abbildung 9.21	Leas Aufzeichnungen zur Ausgangssituation Feuerwehr	227
Abbildung 9.22	Schematische Darstellung der Entwicklungsphase von Lea zur Ausgangssituation Feuerwehr	229
Abbildung 9.23	Schematische Darstellung der Bearbeitungsphase von Lea zur Ausgangssituation Feuerwehr	232
Abbildung 9.24	Theos Aufzeichnungen zur Ausgangssituation Feuerwehr	234
Abbildung 9.25	Schematische Darstellung der Entwicklungsphase von Theo zur Ausgangssituation Feuerwehr	235
Abbildung 9.26	Schematische Darstellung der Bearbeitungsphase von Theo zur Ausgangssituation Feuerwehr	239
Abbildung 9.27	Leas Aufzeichnungen zur Ausgangssituation Seilbahn	242
Abbildung 9.28	Schematische Darstellung der Entwicklungsphase von Lea zur Ausgangssituation Seilbahn	244
Abbildung 9.29	Schematische Darstellung der Bearbeitungsphase von Lea zur Ausgangssituation Seilbahn	248
Abbildung 9.30	Theos Aufzeichnungen zur Ausgangssituation Seilbahn	251
Abbildung 9.31	Schematische Darstellung der Entwicklungsphase von Theo zur Ausgangssituation Seilbahn	253
Abbildung 9.32	Schematische Darstellung der Bearbeitungsphase von Theo zur Ausgangssituation Seilbahn	256
Abbildung 10.1	MoPP-Modell	280

Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1	Ausgewählte Heuristiken	13
Tabelle 3.1	Klassische Einteilung realweltlicher Aufgaben nach Greefrath et al. (2013, S. 25)	22
Tabelle 3.2	Kriterien von Modellierungsaufgaben	26
Tabelle 4.1	Beispiele <i>Problem Posing</i> -Stimuli	47
Tabelle 4.2	Übersicht der identifizierten Aktivitäten im <i>Problem Posing</i> -Prozess	51
Tabelle 5.1	Verortung der Problemlöseaktivitäten im Modellierungsprozess in Anlehnung an Greefrath (2010b)	63
Tabelle 7.1	Übersicht über die Versuchspersonen	83
Tabelle 7.2	Ranking der realweltlichen Situationen	86
Tabelle 7.3	Übersicht der Reihenfolge der Ausgangssituationen	87
Tabelle 7.4	Übersicht der Zeiten	100
Tabelle 8.1	Übersicht der genutzten Auswertungsverfahren	125
Tabelle 8.2	Übersicht der Gütekriterien und Techniken zur Sicherung der Kriterien	128
Tabelle 8.3	Übereinstimmungsmaße der Doppelkodierungen	131
Tabelle 9.1	Schritte der Analyse der Entwicklungsphase	138
Tabelle 9.2	Kurzfassung des Kategoriensystems <i>Problem Posing</i> -Aktivitäten	139
Tabelle 9.3	Übersicht Häufigkeitsverteilung und Dauer der <i>Problem Posing</i> -Aktivitäten in der Entwicklungsphase ...	152
Tabelle 9.4	Übersicht über die Anzahl und den Anteil der Aktivitätswechsel	156

Tabelle 9.5	Kurzfassung der Version 1 (Entwicklungsphase) des Kategoriensystems Modellierungsaktivitäten	158
Tabelle 9.6	Übersicht Häufigkeitsverteilung und Dauer der Modellierungsaktivitäten in der Entwicklungsphase	163
Tabelle 9.7	Gemeinsames Auftreten der jeweiligen <i>Problem Posing</i> - und Modellierungsaktivitäten in der Entwicklungsphase	167
Tabelle 9.8	Schritte der Analyse der Bearbeitungsphase	176
Tabelle 9.9	Kurzfassung der Version 2 (Bearbeitungsphase) des Kategoriensystems Modellierungsaktivitäten	177
Tabelle 9.10	Übersicht der Häufigkeitsverteilung und Dauer der Modellierungsaktivitäten in der Bearbeitungsphase	190
Tabelle 9.11	Kurzfassung des Kategoriensystems <i>Lösungsinternes Problem Posing</i>	193
Tabelle 9.12	Übersicht der Häufigkeitsverteilung des <i>lösungsinternen Problem Posings</i> in der Bearbeitungsphase	197
Tabelle 9.13	Gemeinsames Auftreten der jeweiligen Modellierungsaktivitäten und <i>Problem Posing</i> -Ausprägungen	200
Tabelle 9.14	Übersicht über die dem <i>Problem Posing</i> vorangeschalteten Modellierungsaktivitäten	201
Tabelle 9.15	Übersicht über die selbst-entwickelten Fragestellungen der Studierenden	205
Tabelle 9.16	Übersicht der Kategorisierung der selbst-entwickelten Fragestellungen	207
Tabelle 10.1	Übersicht der generierten Hypothesen	279



Einleitung

1

Mathematik ist ein Teil unseres alltäglichen Lebens. Die Mathematik trägt zum Verständnis und zur Weiterentwicklung von Aspekten verschiedener außermathematischer Bereiche bei. Beispielsweise spielt die Mathematik aktuell alltäglich eine Rolle, um die Verbreitung des Corona-Virus zu verstehen und damit einhergehende Fragen, wie *Wie schnell breitet sich das Virus weiter aus?* oder *Wie stark wird die Ausbreitung durch die Impfkampagne reduziert?*, wahrzunehmen und zu beantworten. Basierend auf der Relevanz der Mathematik für das alltägliche Leben ist eine der zentralen Aufgaben des Mathematikunterrichts, den Lernenden die Mathematik als Werkzeug zu vermitteln, „um Erscheinungen der Welt aus Natur, Gesellschaft, Kultur, Beruf und Arbeit in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen“ (Kultusministerkonferenz [KMK], 2012, S. 11). Um die Lernenden zu befähigen, die Mathematik zur Bewältigung von Situationen des täglichen Lebens zu nutzen, ist die Lösung realweltlicher Probleme ein wesentlicher Bestandteil des Lehrens und Lernens von Mathematik (Maaß, 2010; Niss & Blum, 2020, S. 6). Die Lösung realweltlicher Probleme mit Hilfe der Mathematik wird in der mathematikdidaktischen Forschung als mathematisches Modellieren bezeichnet und beinhaltet anspruchsvolle Übersetzungsprozesse zwischen der realen Welt und der Mathematik, um mathematische Modelle zu identifizieren, die zur Lösung eines realweltlichen Problems herangezogen werden können (Greefrath, 2010a, S. 42). Das mathematische Modellieren im Schulkontext startet zumeist mit einer vorgegebenen Modellierungsaufgabe (Pollak, 2015). In außerschulischen Kontexten, wie im alltäglichen Leben oder im späteren Berufsleben, liegen mathematische Aufgaben jedoch nur selten vorgefertigt vor und werden von den Personen selbst präzisiert und entwickelt, bevor eine Lösung generiert

wird (Blomhøj & Kjeldsen, 2018). Die Entwicklung eigener mathematischer Aufgaben wird als *Problem Posing* bezeichnet und rückt die Aufgabe selbst und nicht die Lösung in den Vordergrund (Silver, 1994). Die Entwicklung eigener Aufgaben ist eine notwendige Voraussetzung zur Lösung dieser und demnach ein untrennbarer Teil des Problemlösens (S.-K. S. Leung, 2016). Auch für das Modellieren ist die Entwicklung und Formulierung entsprechender Aufgaben basierend auf realweltlichen Situationen notwendig, bevor eine Lösung generiert werden kann. So ist für das Lehren und Lernen des mathematischen Modellierens im Mathematikunterricht die Entwicklung von realweltlichen Aufgaben unabdingbar und stellt eine zentrale Fähigkeit sowohl für (angehende) Mathematiklehrkräfte als auch für Schülerinnen und Schüler dar (Borromeo Ferri, 2018, S. 41).

Internationale Vergleichsstudien offenbaren große Schwierigkeiten beim mathematischen Modellieren (Reiss et al., 2019, S. 192). So stellt das Modellieren sowohl Lernende als auch Lehrkräfte vor große Herausforderungen (Blum, 2015; Schukajlow et al., 2018), die insbesondere auf die anspruchsvollen Übersetzungsprozesse zwischen der außermathematischen und der mathematischen Welt zurückzuführen sind (Jankvist & Niss, 2020; Krawitz et al., 2022). Dem *Problem Posing* wurde in den letzten Jahren in der mathematikdidaktischen Forschung zunehmend Aufmerksamkeit geschenkt und die Potentiale für den Mathematikunterricht wurden erkannt (Cai et al., 2015). Die Problemlösungsforschung hat gezeigt, dass *Problem Posing* das Potential hat, Problemlösen zu unterstützen (Chen et al., 2013), da die kognitiven Prozesse der Entwicklung und Lösung der Probleme in einer engen Verbindung miteinander stehen (Cai et al., 2013; Chen et al., 2013). Zum einen beinhaltet das *Problem Posing* Aktivitäten, wie die Analyse der gegebenen Situation, die für die Lösung von Aufgaben wichtig sind. Zum anderen kann *Problem Posing* während der Bearbeitung den Lösungsprozess unterstützen (Xie & Masingila, 2017). Da das mathematische Modellieren eine spezielle Form des Problemlösens darstellt, wird auch eine enge Verbindung zwischen dem *Problem Posing* und dem Modellieren vermutet (Hansen & Hana, 2015). Das mathematische Modellieren beschreibt die Lösung realweltlicher Aufgaben bzw. Probleme mit Hilfe der Mathematik und beginnt mit einer realweltlichen Situation, die zunächst verstanden, vereinfacht und strukturiert werden muss. Darüber hinaus umfasst es mathematische Untersuchungen von Aspekten der realen Welt und die Antizipation potenzieller mathematischer Modelle zur Lösung der Aufgabe (Niss, 2010). Folglich ist es möglich, dass das *Problem Posing* basierend auf gegebenen realweltlichen Situationen (d. h. *modellierungsbezogenes Problem Posing*) und die damit einhergehenden Prozesse

gewinnbringend zur Bewältigung der anspruchsvollen Übersetzungsprozesse zwischen der außermathematischen und der mathematischen Welt genutzt werden können.

Trotz der hohen Bedeutsamkeit des mathematischen Modellierens selbst, der auf theoretischer Ebene antizipierten engen Verbindung zwischen dem mathematischen Modellieren und dem *Problem Posing* (Hansen & Hana, 2015) sowie der Notwendigkeit der Entwicklung von Aufgaben, bevor diese gelöst werden können, ist bisher wenig über den Modellierungsprozess aus einer *Problem Posing*-Perspektive bekannt. Insbesondere fehlt ein dem Modellierungskreislauf (Blum & Leiß, 2005) äquivalentes Modell, in dem die ablaufenden Aktivitäten der Entwicklung und Bearbeitung eigener Modellierungsaufgaben sowie deren Verbindung idealisiert dargestellt werden.

1.1 Ziel der Arbeit

Die vorliegende Untersuchung soll zur Schließung dieser Forschungslücke beitragen. Um Hinweise darauf zu erhalten, wie das *Problem Posing* den Modellierungsprozess beeinflusst, ist Grundlagenforschung bezüglich der beteiligten Aktivitäten und deren Verbindungen notwendig. Das übergeordnete Ziel der Arbeit ist demnach, den Modellierungsprozess aus einer *Problem Posing*-Perspektive zu ergänzen sowie die Verbindungen zwischen den beiden Prozessen besser zu verstehen. Dazu wurde eine qualitativ-explorative Studie geplant, um die Prozesse des *Problem Posings* und des Modellierens und deren Verbindungen aus einer kognitiven Perspektive in der Tiefe zu erkunden und zu beschreiben sowie darauf aufbauend Hinweise auf mögliche Verallgemeinerungen zu generieren. Zur Exploration der Prozesse und möglicher Verbindungen aus einer kognitiven Perspektive werden zunächst die Entwicklungs- und Bearbeitungsprozesse eigener Aufgaben zu gegebenen realweltlichen Situationen mit Blick auf die stattfindenden *Problem Posing*- und Modellierungsaktivitäten systematisch beschrieben. Die Ergebnisse sollen das Feld der *Problem Posing*- und Modellierungsforschung durch die ablaufenden Aktivitäten beim *modellierungsbezogenen Problem Posing* ergänzen und Zusammenhänge zwischen den Prozessen des *Problem Posings* und des Modellierens aufdecken. Aus den Ergebnissen der vorliegenden Studie werden Hypothesen über die ablaufenden Aktivitäten und deren Zusammenhänge abgeleitet und zur Entwicklung eines integrierten Modells des

Problem Posings und des Modellierens genutzt, auf das in zukünftigen Studien aufgebaut werden kann.

1.2 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in einen Theorie- und einen Empirieteil untergliedert. Der Theorieteil befasst sich mit den theoretischen Hintergründen sowie empirischen Ergebnissen, die zentral für die vorliegende Untersuchung sind. Der Theorieteil beginnt mit einer theoretischen Darstellung zum Problemlösen (Kapitel 2), in der eine begriffliche Definition des Problemlösens gegeben und auf den Problemlöseprozess aus kognitiver Perspektive sowie Problemlösestrategien eingegangen wird. Die zentralen Themengebiete der Arbeit stellen das mathematische Modellieren und das *Problem Posing* dar. In Kapitel 3 wird sich den theoretischen Grundlagen des mathematischen Modellierens gewidmet, indem eine begriffliche Definition des Modellierens gegeben wird sowie die Relevanz und Perspektiven des Modellierens dargestellt werden. Außerdem werden Modellierungsaufgaben charakterisiert und der Modellierungsprozess sowie die damit einhergehenden Schwierigkeiten aus einer kognitiven Perspektive beschrieben. In Kapitel 4 wird das *Problem Posing* fokussiert. Dazu wird zunächst eine begriffliche Definition des *Problem Posings* vorgenommen sowie Stimuli des *Problem Posings* beschrieben, bevor daran anschließend auf den Prozess des *Problem Posings* aus einer kognitiven Perspektive sowie auf die Relevanz und Perspektiven des *Problem Posings* eingegangen wird. Die Themenfelder des Problemlösens, Modellierens und *Problem Posings* werden in Kapitel 5 miteinander in Verbindung gebracht. Dabei werden die Prozesse des Problemlösens und des *Problem Posings* zunächst im Modellierungsprozess verortet. Im Anschluss werden die bereits gut erforschten Verbindungen zwischen dem *Problem Posing* und dem innermathematischen Problemlösen fokussiert, um darauf aufbauend Schlussfolgerungen für die Verbindungen zwischen dem *Problem Posing* und dem mathematischen Modellieren abzuleiten. Aus den theoretischen Ausführungen werden abschließend die mit der Untersuchung verfolgten Forschungsfragen und Ziele abgeleitet und erörtert (Kapitel 6).

Der Empirieteil der Arbeit beschäftigt sich mit der Darstellung und Begründung der genutzten Erhebungsmethode, die zur Beantwortung der Forschungsfragen herangezogen wird (Kapitel 7). Anschließend wird sich der Darstellung und Begründung der gewählten Auswertungsmethode gewidmet (Kapitel 8). In Kapitel 9 werden die Ergebnisse der Arbeit zu den ablaufenden Prozessen der

Entwicklung und Bearbeitung eigener Aufgaben sowie deren Verbindungen präsentiert. Diese Ergebnisse werden dann in Kapitel 10 auf Grundlage der bisher bekannten empirischen Ergebnisse diskutiert. Basierend auf den Ergebnissen werden Hypothesen sowie ein integriertes Modell des *Problem Posings* und des Modellierens generiert. Der Empirieteil der Arbeit schließt mit einer Erörterung der Stärken und Limitationen der Arbeit (Kapitel 11), Implikationen für Forschung und Praxis (Kapitel 12) sowie einem kurzen Fazit (Kapitel 13).



Die Lösung mathematischer Probleme gilt als eines der zentralen Ziele des Mathematikunterrichts, da es zum Erkenntnisgewinn beiträgt (Winter, 1995). Demnach ist Problemlösen fest als allgemeine mathematische Kompetenz in den Bildungsstandards verankert (KMK, 2003, 2012). Während über die Bedeutung des Problemlösens in der Forschung Einigkeit besteht, existiert deutlich weniger Konsens bezüglich der Definition eines Problems und des Problemlösens (Büchter & Leuders, 2018, S. 28). Um das in dieser Arbeit zugrundeliegende Verständnis eines Problems und des Problemlösens darzustellen, soll im Folgenden zunächst auf die Definition eines mathematischen Problems und des Problemlösens eingegangen werden (Kapitel 2.1), bevor anschließend der Prozess des Problemlösens (Kapitel 2.2) sowie Problemlösestrategien (Kapitel 2.3) thematisiert werden.

2.1 Definition mathematisches Problem und Problemlösen

Nach Dörner (1976) ist ein Individuum mit einem Problem konfrontiert,

wenn es sich in einem inneren oder äußeren Zustand befindet, den es aus irgendwelchen Gründen nicht für wünschenswert hält, im Moment aber nicht über die Mittel verfügt, um den Zustand in den wünschenswerten Zielzustand zu überführen (S. 10).

Beispielsweise kann ein verlegter Schlüssel für ein Individuum ein Problem darstellen. Nach Dörners (1976, S. 10) Definition ist ein Problem zusammenfassend durch zwei Zustände gekennzeichnet: einen Anfangs- und einen Zielzustand. Der

Anfangszustand beschreibt eine bestimmte Situation oder einen Zustand, mit dem das Individuum unzufrieden ist und konfrontiert wird. Der Zielzustand ist der vom Individuum erwünschte Zustand, dessen Erreichung gleich der Lösung des Problems ist (Klix, 1971, S. 640). Im oben beschriebenen Beispiel wäre demnach der verlegte Schlüssel der Anfangszustand, mit dem das Individuum konfrontiert wird und das Wiederfinden des Schlüssels der erwünschte Zielzustand. Von einem Problem wird jedoch erst dann gesprochen, wenn „die Überführung des Anfangszustandes in den [Zielzustand] nicht oder nicht unmittelbar gelingt“ (Klix, 1971, S. 640). Dörner (1976, S. 10) spricht hierbei von einer Barriere, durch die eine direkte Überführung des Anfangs- in den Zielzustand verhindert wird. Im Beispiel des verlegten Schlüssels handelt es sich also erst um ein Problem, wenn das Individuum nicht weiß, wo sich der Schlüssel befindet und keine unmittelbare Lösung zum Auffinden des Schlüssels vorhanden ist.

Ein mathematisches Problem liegt nach Büchter und Leuders (2018) vor, wenn ein Individuum aufgefordert wird, „eine Lösung zu finden, ohne dass ein passendes Lösungsverfahren auf der Hand liegt“ (S. 25). Ein unbekanntes Lösungsverfahren geht jedoch nicht notwendigerweise mit hohen Anforderungen an das problemlösende Individuum einher und folglich ergänzt Heinze (2007) die Definition in Anlehnung an Dörner (1976) durch das Vorhandensein einer Barriere. Insgesamt ist ein mathematisches Problem also dadurch gekennzeichnet, dass der Lösungsweg bzw. das Lösungsverfahren nicht direkt auf der Hand liegt und für die mit der Aufgabe konfrontierte Person eine Barriere darstellt. Die Barriere kann zum einen durch die Unbekanntheit der einzelnen Lösungsschritte oder zum anderen durch die Unbekanntheit der Kombination der einzelnen Lösungsschritte verursacht werden (Dörner, 1976, S. 11).

In der mathematikdidaktischen Forschung werden mathematische Probleme (auch Nicht-Routineaufgaben) von Routineaufgaben abgegrenzt (Dörner, 1976, S. 10). Eine Abgrenzung der beiden Aufgabentypen kann über die dabei ablaufenden Prozesse vorgenommen werden, ist jedoch nicht immer eindeutig möglich. Eine Aufgabe stellt eine Routineaufgabe dar, wenn die mit der Aufgabe konfrontierte Person den Lösungsweg direkt erkennt, die notwendigen Lösungsschritte bekannt sind und unmittelbar angewendet werden können (Højgaard, 2021; Rott, 2013, S. 32). Dabei können oft zuvor erlernte Standardverfahren (Algorithmen) aus dem Unterricht genutzt werden. Die Lösung basiert folglich auf der Reproduktion zuvor erlernten Wissens. Wenn dies nicht der Fall ist oder bekannte Lösungsverfahren zwar unmittelbar angewendet werden können, aber während des Lösungsprozesses verworfen werden, stellt die Aufgabe für die mit der Aufgabe konfrontierte Person ein Problem dar (Rott, 2013, S. 36). Die Bearbeitung eines Problems wird als Problemlösen bezeichnet. Folglich beschreibt

das Problemlösen die Aktivitäten zur Überwindung der Barriere, um von dem unerwünschten Anfangszustand zu dem erwünschten Zielzustand zu gelangen (siehe Abbildung 2.1) (Büchter & Leuders, 2018, S. 28). Die Überführung vom Anfangs- zum Zielzustand wird als Transformation bezeichnet.

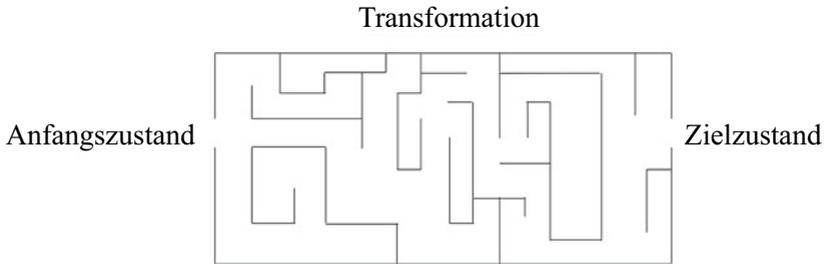


Abbildung 2.1 Problemlösen als Überwindung der Barriere zur Transformation eines Anfangs- in einen Zielzustand

Um ein passendes Lösungsverfahren bzw. eine passende Transformation zu finden und somit die vorhandene Barriere zu überwinden, muss ein geeigneter Weg gefunden werden (Pólya, 1966, S. 182). Der Suchprozess nach einem geeigneten Weg oder der Verkettung geeigneter Wege scheint demnach elementarer Bestandteil des Problemlösens (Klix, 1971, S. 640). Dabei muss das problemlösende Individuum das bereits vorhandene Wissen und die bereits vorhandenen Daten des Anfangszustandes auf eine neue Weise kombinieren. Über die Suche und Bildung neuer Relationen sowie einer Verknüpfung dieser kann dann der erwünschte Zielzustand erreicht werden (Klix, 1971, S. 640). Dies erfordert höhere Denkprozesse. Die Suche nach einem geeigneten Weg kann immer wieder in Sackgassen enden (siehe Abbildung 2.1), wodurch neue Wege ausprobiert werden müssen. Bei einem mathematischen Problem können geeignete Wege als eine Sequenz mathematischer Operationen (Operatoren) beschrieben werden (Heinze, 2007). Durch die einzelnen mathematischen Operationen werden Zwischenzustände der Transformation erreicht. Die Operatoren können dem problemlösenden Individuum entweder bereits bekannt sein oder durch bereits vorhandenes Wissen aktiviert werden. Sie werden gemeinsam mit den durch die einzelnen Operationen erzeugten Zwischenzustände als Suchraum bezeichnet (Heinze, 2007).

Der Erfolg bei der Suche nach einer geeigneten Sequenz von Operationen hängt neben der Fähigkeit zum flexiblen Denken auch von dem Wissen über die anzuwendenden mathematischen Operationen und dem Wissen über

die Sequenz der anzuwendenden Operationen ab (Heinze, 2007). So entsteht eine Wechselwirkung zwischen der gegebenen Situationsbeschreibung und den bereits vorhandenen internen kognitiven Strukturen des Individuums (Klix, 1971, S. 640). Folglich hängt es von den individuellen Fähigkeiten und dem Wissen ab, ob eine Barriere vorhanden ist und ob die präsentierte Aufgabe für das Individuum zum Zeitpunkt der Lösung ein Problem darstellt. So kann beispielsweise die Ermittlung des Volumens eines Pyramidenstumpfs je nach Wissensstand des Individuums ein Problem darstellen. Für eine Schülerschaft der neunten Jahrgangsstufe kann diese Aufgabe ein Problem darstellen, da die einzelnen Schritte der Lösung (die Berechnung des Volumens einer Pyramide und die Subtraktion) zwar bekannt sind, aber die Sequenz der anzuwendenden Operationen unbekannt ist. Wird die Barriere von den Lernenden aufgrund der Bekanntheit der Sequenz der anzuwendenden Operationen unmittelbar bewältigt, stellt die Aufgabe für sie kein Problem dar. Die Aufgabe kann für diese spezifischen Lernenden dann als eine Routineaufgabe bezeichnet werden (Dörner, 1976, S. 10). Ausgehend von dem Beispiel und den oben dargestellten Definitionen des Problemlösens wird deutlich, dass es von dem individuellen Wissens- und Fähigkeitsstand des problemlösenden Individuums zum Zeitpunkt der Aufgabebearbeitung abhängt, ob die präsentierte Aufgabe ein Problem oder eine Routineaufgabe darstellt (Klix, 1971, S. 639; Rott, 2013, S. 31).

Die dem Problemlösen zugrundeliegenden Probleme können sowohl aus der außermathematischen Welt als auch aus der mathematischen Welt stammen. Im Allgemeinen kann der Begriff des Problemlösens bezüglich des Einbezugs der Realität aus zwei verschiedenen Perspektiven betrachtet werden: Problemlösen im engeren Sinne und Problemlösen im weiteren Sinne (Büchter & Leuders, 2018, S. 30). Problemlösen im engeren Sinne basiert auf Problemen, die aus der mathematischen Welt stammen. Folglich begrenzt sich das Problemlösen nach dieser Auffassung auf die Lösung innermathematischer Probleme. Beim Problemlösen im weiteren Sinne werden dagegen Probleme aus der mathematischen Welt als auch aus der außermathematischen Welt (d. h. der realen Welt) berücksichtigt. Dieser Auffassung folgend umfasst das Problemlösen sowohl die Lösung innermathematischer Probleme als auch die Lösung außermathematischer Probleme. Beiden Auffassungen gemein ist jedoch die Überwindung einer Barriere, um von dem Anfangs- zum Zielzustand zu gelangen.