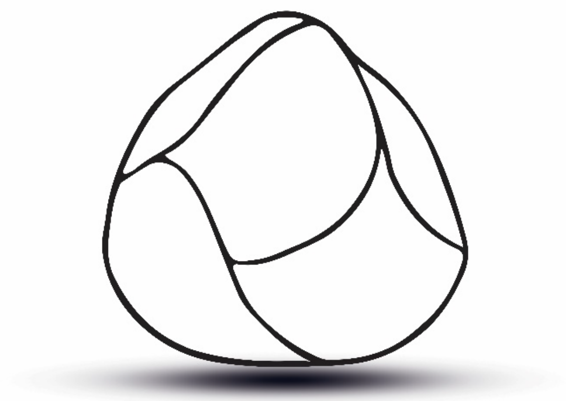
Gabriella Ambrus & Johann Sjuts & Éva Vásárhelyi
(Hrsg.)

Mathematik und mathematisches Denken

Ansprüche und Anforderungen vor, in und nach der Schule



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Mathematiklehren und -lernen in Ungarn 5

Mathematiklehren und -lernen in Ungarn

Herausgegeben von
Éva Vásárhelyi und Johann Sjuts

Band 5

Gabriella Ambrus & Johann Sjuts
& Éva Vásárhelyi
(Hrsg.)

Mathematik und mathematisches Denken – Ansprüche und Anforderungen vor, in und nach der Schule

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://www.dnb.de abrufbar.

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.winterwork.de/

Mit dem Gömböc fanden die ungarischen Mathematiker Gábor Domokos und Péter Várkonyi im Jahr 2006 eine Lösung für einen dreidimensionalen Körper mit der Eigenschaft, nur eine stabile und nur eine labile Gleichgewichtslage zu haben.

Gömböc-Abbildung auf der Buchvorderseite: Attila Daróci

Ferdinand-Freiligrath-Straße 26, 48147 Münster
Münster 2023 - E-Book

ISBN 978-3-95987-272-0
https://doi.org/10.37626/GA9783959872720.0

Anmerkung

Die Beiträge dieses Bandes wurden mittels eines von Gabriella Ambrus, Johann Sjuts und Éva Vásárhelyi organisierten Peer-Review-Verfahrens aufgenommen.

Die Verantwortung für Inhalt und Sprache liegt bei den Autorinnen und Autoren.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Mathematik ist überall. Mathematik ist für alle. Aufgrund ihres hohen Rangs in der Wissensgesellschaft ist Mathematik ein unverzichtbarer Bestandteil einer allgemeinen Bildung, was für die Schule bedeutet, den Wert eines an den Strukturen und Wesenszügen von Mathematik orientierten Denkens für alle zur Geltung zu bringen.

Das Bemühen muss somit darauf gerichtet sein, sowohl über mathematisches Wissen verlässlich zu verfügen als auch mathematisches Denken sicher zu beherrschen. Das Geistig-Substantielle und das Geistig-Instrumentelle sind jedoch untrennbar verbunden. Mathematisches Wissen entsteht nicht ohne mathematisches Denken, mathematisches Denken entwickelt sich nicht ohne mathematisches Wissen.

Ausgewiesenes Ziel des Mathematikunterrichts ist es folglich, den Reiz, die Kraft und die Bedeutung des mathematischen Denkens zu vermitteln. Dabei ist mathematisches Denken allen zuzutrauen und ebenso zuzumuten. Gelingt es nämlich, Mathematik als herausfordernd und anspruchsvoll zu erleben, wird sie auf ganz eigene Weise gesellschaftsfähig.

In bildungstheoretischer Sicht stellen Mathematik und mathematisches Denken einen spezifischen, unersetzbaren Modus der Welterschließung dar, der für die kognitive Entwicklung von fundamentaler Bedeutung ist. Mathematisches Denken ist daher in Vorschul- und Schulzeit kontinuierlich und systematisch zu fördern.

Was das Nicht-Substituierbare des durch mathematisches Denken gekennzeichneten Weltzugangs und Weltverständnisses ausmacht, welche diesbezüglichen Ansprüche und Anforderungen vor, in und nach der Schule wesentlich sind, davon handelt dieser Band.

Die Beiträge betreffen

I. die Struktur und die Genese des mathematischen Denkens,
II. verschiedene Perspektiven zum mathematischen Denken,
III. die Entwicklung des mathematischen Denkens von Kindern, Jugendlichen und jungen Erwachsenen sowie
IV. zentrale Bestandteile mathematischen Denkens.

Zur Sprache kommen dabei
im Kapitel I die Grundzüge sowie die Entwicklungsgeschichte des mathematischen Denkens,
im Kapitel II das mathematische Denken in Sprache und Zeichen, das mathematische Denken in vielfältigen Spannungsverhältnissen, das mathema-

tische Denken aus symbolphilosophischer Sicht und aus kognitionspsychologischer Sicht, die Beziehung des mathematischen Denkens zum kritischen Denken sowie das mathematische Denken als Beitrag zur Persönlichkeitsbildung,
im Kapitel III das frühkindliche mathematische Denken, ein effektives mathematisches Denken beim Lösen von Aufgaben, illustrative Aufgaben zum mathematischen Denken in den mittleren Schuljahrgängen, Anforderungen an das mathematische Denken in curricularer Hinsicht, Ansprüche an das mathematische Denken beim Übergang von der Schule zur Universität sowie Folgerungen für das Lehramtsstudium,
im Kapitel IV Wesenszüge des probabilistischen und statistischen Denkens, des geometrischen Denkens sowie des modellierenden mathematischen Denkens.

Mathematik ist in Ungarn traditionell von hoher kultureller und wissenschaftlicher Bedeutung. Nicht nur für das Problemlösen à la Pólya gilt Mathematik als „Schule des Denkens“. Intention der Buchreihe „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ ist es, die beispielgebende Rolle des Landes und den inspirativen Austausch über Grenzen hinweg zum Ausdruck zu bringen.

Mit der Herausgabe dieses Buches ist die Hoffnung verbunden, dem vielfach vernachlässigten Thema „Mathematik und mathematisches Denken“ neue Anstöße und Anregungen zu geben. An so manchen Stellen im Buch wird zudem ersichtlich, dass für eine Entwicklung des mathematischen Denkens gewisse Bedingungen von nennenswertem Belang sind. Sie betreffen insbesondere die Aufgeschlossenheit gegenüber der Mathematik in Unterricht, Schule und Gesellschaft.

Für die facetten- und ideenreichen Ansätze und Ausführungen zum mathematischen Denken in den vorliegenden Beiträgen sei allen Autorinnen und Autoren herzlich gedankt.

Die Buchreihe „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ verzeichnet seit 2019 nun fünf erschienene Bände. Ein besonderer Dank für die stets ermutigende und immer umstandslose Unterstützung gilt unserem Verleger Martin Stein und dem WTM-Verlag.

Gabriella Ambrus & Johann Sjuts & Éva Vásárhelyi

I. Struktur und Genese des mathematischen Denkens

Vásárhelyi: Struktur und Genese, Wordart

Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Duisburg-Essen

Grundzüge mathematischen Denkens

Kurzfassung: Die Mathematik gründet in Denkhandlungen, die uns Menschen eigen sind. Wurzeln des mathematischen Denkens von früher Kindheit an bestehen im Erkennen und Erforschen von Mustern. Von hier aus gewinnt es eigene Ausprägungen und eine weite Anwendbarkeit, und es unterliegt eigenen Standards der Strenge.

Title: Characteristics of mathematical thinking

Abstract: Mathematics is based on thought processes that are inherent to us humans. Roots of mathematical thinking from early childhood consist in the recognition and exploration of patterns. From here it gains its own characteristics and a wide applicability, and it is subject to its own standards of rigor.

Classification: C30, E20, E40

Keywords: thinking, scientific thinking, concepts, structures, patterns, logic, reasoning, proof, representation, modelling.

> *Die Mathematik ist tief im menschlichen Denken verankert. Betrachtender Verstand, unternehmender Wille, ästhetisches Gefühl finden in ihr den reinsten Ausdruck. Sie vereint Logik und Anschauung, Analyse und Konstruktion, Individualität der Erscheinungen und Abstraktion der Formen.* *(Courant & Robbins, 1992, S. XIX)*

1. Denken als ursprüngliche menschliche Tätigkeit

Denken ist ein Grundwort der Alltagssprache und wird in einem vielfältigen Sinne gebraucht. Als geistiges Aufnehmen und Verarbeiten erscheint es in Verben wie vernehmen, sich erinnern, erfassen, überlegen, zurechtlegen, durchdenken, einsehen, erkennen, verstehen und begreifen. Als absichtsvolle geistige Haltung artikuliert es sich in Substantiven wie Gesinnung, Vorhaben oder Willensrichtung. Zu den exakten Formen des disziplinären wissenschaftlichen Denkens zählen das Bilden von Begriffen, das Fällen von Urteilen und das Ziehen von Schlüssen. Unabdingbar für diese Vollzüge ist es, Vorstellungen mit Bewusstsein zu haben.

Die genannten Bedeutungsfacetten weisen darauf hin, dass das Begriffsfeld Denken in der Geistesgeschichte vielfältige Entwicklungen erlebt hat. In der alten griechischen Sprache (Homer und Vorsokratiker) besteht eine enge Beziehung zwischen Denken, Sehen und Hören. Das Zusammenspiel von Denken und (geistigem) Wahrnehmen findet bei Homer in einer Einheit von dichtendem und denkendem Sagen seinen künstlerischen Ausdruck. (Bormann et al., 1972, S. 61-63). Von hier aus hat Denken als geistiger Akt in der philosophischen Reflexion eine eigene Thematisierung erfahren.

2. Denken als Grundwort der Philosophie

Eine philosophische Thematisierung des Denkens begann um 500 v. Chr. mit dem Bestreben, die Welt nicht mit Hilfe von Mythen zu deuten, sondern sie mit dem Verstand zu erfassen. Einen entscheidenden Schritt vollzog Parmenides, indem er auch logisches Schließen in Betracht zog und Denken nicht nur als unmittelbares intuitives Innewerden verstand (ebd., S. 64). Hier begann eine lange Tradition, die die Frage nach dem Zusammenhang von Denken und Sein und dem Zustandekommen von Erkenntnis verfolgt und innerhalb derer versucht wird, Arten und Teilfunktionen des Denkens zu bestimmen und genauer auszudifferenzieren.

Für Platon (um 400 v. Chr.) geschieht das Erfassen der Wahrheit nicht durch die sinnliche Wahrnehmung, sondern durch Überlegen und Nachdenken (διάνοια). Dieses ist ein diskursives Denken; es geht von Voraussetzungen aus, die als bekannt und ohne Beweis angenommen werden, und bewegt sich dort in „Gedankengängen" (z. B. Schlussketten) hin und her und gelangt so zu Ergebnissen. In der Beschäftigung mit mathematischen Fächern sieht Plato hierfür eine wichtige Voraussetzung und Vorübung (ebd., S. 65 f.). Neben dem diskursiven Denken gibt es in seiner Philosophie die Einsicht (νοῦς bzw. νόησις), die ihren Gegenstand als Ganzes anrührt und bei ihm verweilt.

Aristoteles, Schüler Platons und einer der einflussreichsten Naturforscher und Philosophen der Geschichte, führte die platonische Einteilung des Denkens weiter und verschärfte sie entsprechend seinem deutlicheren Wissenschaftsbegriff. Als zentral gelten seitdem die intellektuellen Tätigkeiten Begriffsbilden, Urteilen und Schließen (ebd., S. 61 ff.). Für die schlussfolgernd beweisende Form des Denkens entwarf Aristoteles mit seiner Syllogistik als erster eine vollständige Theorie der Logik und formulierte einige heute noch gültige Grundsätze (Tschirk, 2022, S. 4).

3. Wissenschaftliches Denken

Somit entwickelte sich in der Antike ein Paradigma wissenschaftlichen Denkens mit weitreichenden Folgen:

> „Philosophie- und Wissenschaftsgeschichte lehren, dass Vernunft und wissenschaftliche Rationalität im europäischen, heute universal gewordenen Sinne ihren *Anfang im griechischen Denken* … nahmen." (Mittelstraß, 2014, S. 275)

Als primäre wissenschaftliche Tätigkeiten werden genannt: Gedankliches Ordnen, Einpassen, Explizieren, Erklären, Beweisen.

Mit diesen Tätigkeiten verbindet die griechische Philosophie klare Ziele (Nestle, 1975; Perilli, 2013):

- die Wirklichkeit in vernünftiger Rede, im *begrifflichen Ausdruck* zutreffend wiedergeben,
- dabei *Strukturen* und innere *Beziehungen* erfassen,
- aus Sichtbarem und aus der Erfahrung Werkzeuge machen, mit deren Hilfe man *zum Unbekannten vordringen* kann.

Begriffe sind Werkzeuge, um Phänomene gedanklich zu organisieren und fassbar zu machen. In diesem Sprachgebrauch werden Handlungen an materiellen Gegenständen metaphorisch auf gedankliche Vorgänge übertragen. Wenn wir mit den Händen Gegenstände begreifen, erfassen wir ihre Form und Beschaffenheit und verstehen sie dadurch besser.

Begriffe sind uns nicht vorgegeben, sie werden als „Konstrukte“ des Denkens gebildet. Indem wir etwas „auf den Begriff bringen“, machen wir es zum „Denkgegenstand“. Begriffe entstehen als Entwürfe, die eine Weise der Betrachtung vorgeben, und können sich in dieser Eigenschaft besser oder schlechter bewähren. Die zugrunde liegenden Entwicklungsprozesse können unterschiedlich langwierig, mühevoll und komplex sein, wie es zum Beispiel beim mathematischen Funktionsbegriff der Fall war. Wesentliche Komponenten der Begriffsbildung sind Ideation und Abstraktion, wobei mit der Abstraktion immer eine Verallgemeinerung einhergeht: Begriffe erfassen Eigenschaften, die allen Elemente einer bestimmten Gesamtheit gemeinsam zukommen.

Das Wort „Struktur“ ist ein Rückgriff auf den lateinischen Ausdruck „structura“, der die Zusammenfügung von Elementen zu einer Ganzheit meint. Von hier aus gewinnt es in den Wissenschaften und ihren Methodiken vielfältige Bedeutungsfacetten. In analogischer Verwendung kann es die „Fügung der Worte“ in einem Text, „das Gefüge der Handknochen“ in der Medizin oder „das Gefüge von Aggregationen“ in der Physik bezeichnen. In allgemeinerer Bedeutung als „Verbindung der Teile in einer sich bildenden Organisation“ kann es sich auf vielfältige Bereiche beziehen, z. B. auf den Aufbau und die Funktionsweise eines Organismus, die Gestalt eines Textes, die ästhetische Organisation eines Kunstwerkes oder den logischen Aufbau eines gedanklichen Systems (Kross, 1998).

Das Erkennen von Strukturen ist eine Möglichkeit, hinter die sichtbaren Dinge zu schauen. Spezielle Strukturen erscheinen in Form von „Mustern“,

d. h. als wiederkehrende, einem Bildungsgesetz folgende regelhafte Phänomene. Diese spielen in der Mathematik eine grundlegende Rolle (siehe Abschnitt 4).

Das schließende Denken ist eine Möglichkeit, aus einem Eingesehenen zur Erkenntnis eines anderen zu gelangen (Bormann et al., S. 72), und es leistet einen weiteren wesentlichen Anteil an der Möglichkeit, zum Unbekannten vorzudringen (s. o.). Wegweisend für die griechische Philosophie seit Aristoteles war die Inkommensurabilität als Prototyp einer wissenschaftlichen Entdeckung, die aus dem reinen Streben nach Erkenntnis gewonnen ist. Sie zeigt, dass Menschen ihr Wissen jenseits des intuitiv Fassbaren allein durch schlussfolgerndes Denken erweitern können (Artmann, 1999).

Die Grundhandlungen und Ziele der wissenschaftlichen Methode lassen sich auf jeden Lebensbereich anwenden. Die Mathematik selbst hat dabei von Anfang an als Prototyp gegolten, auch hier wurde in der griechischen Antike ein Bild geschaffen, das seit mehr als zweitausend Jahren prägend ist (ebd.).

4. Mathematik als besondere Form wissenschaftlichen Denkens

> Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern. Der Mathematiker untersucht abstrakte „Muster“ – Zahlenmuster, Formenmuster, Bewegungsmuster, Verhaltensmuster und so weiter. Solche Muster sind entweder wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende. Sie können aus unserer Umgebung an uns herantreten oder aus den Tiefen des Raumes und der Zeit oder aus unserem eigenen Inneren. (Devlin, 1998, S. 3-4).

Dieser auf die Untersuchung von Mustern gegründete abstrakte Charakter der Mathematik beginnt schon mit der Ausbildung des Anzahlbegriffs. Die Zahl Zwei ist Ausdruck des Musters „eins und noch eins“. Der Wesenszug des Abstrakten stellt eigene Anforderungen an die Zuverlässigkeit und Kontrollierbarkeit des fachbezogenen Denkens und Schließens. Die Mathematik zeichnet sich deshalb hinsichtlich ihrer Methoden der Wissensbildung durch spezielle Standards gedanklicher Exaktheit aus. Diese sind begründet in dem besonderen Verhältnis zwischen Mathematik und Logik, das seit Aristoteles eine explizite thematische Gestalt gewann, in den Elementen des Euklid programmatisch umgesetzt wurde und auf konsensfähigen logischen Prinzipien und Schlussregeln beruht, die die sprichwörtliche mathematische Strenge erzeugen und dem Erklären, Begründen und Beweisen in der Mathematik einen besonderen Anspruch verleihen.

Aristoteles formulierte zwei Grundregeln zur Charakterisierung von Aussagen, die er als unmittelbar einleuchtend annahm und von denen er wusste, dass sie sich ihrerseits nicht beweisen lassen (Tschirk 2022, S. 5):

> Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten: „Jede Aussage ist wahr oder falsch, eine dritte Möglichkeit gibt es nicht“.
>
> Der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch: „Keine Aussage kann zugleich wahr oder falsch sein.“

Mathematische Aussagen müssen auf diese Regeln zugeschnitten sein, was für Aussagen in der Alltagskommunikation nicht immer möglich ist. Eine entsprechende Forderung gilt auch für mathematische Begriffsdefinitionen. Diese müssen so präzise und widerspruchsfrei formuliert sein, dass zumindest im Prinzip eindeutig entscheidbar ist, ob ein Gegenstand unter den bezeichneten Begriff fällt oder nicht.

Hinzu kommt eine Forderung, der ein mathematischer Schluss im strengen Sinne genügen muss:

> *Schluss* ist eine Rede, in welcher bei Setzung einiger Sachverhalte etwas anderes als das Gesetzte mit Notwendigkeit zutrifft aufgrund dessen, dass diese gültig sind. […] Es bedarf keines von außen hinzugenommenen Begriffs, dass die Notwendigkeit zustande komme (Aristoteles 1998, Erste Analytik, erstes Buch, Kap. 1).

Ein mathematischer Schluss muss seine Notwendigkeit in sich tragen und darf nicht auf Stützungen von außen angewiesen sein. Diesem Erfordernis genügt die Abtrennregel (modus ponens), die Tschirk (2022, S. 20) als die wohl wichtigste Schlussregel der gesamten Logik bezeichnet:

$$(A \wedge (A \longrightarrow B)) \longrightarrow B$$

Eine Zusammenstellung von „Regeln natürlichen Schließens“, die für den Mathematikunterricht besonders relevant sind, findet man bei Walsch (1975).

Dieses von Aristoteles angelegte und seitdem maßgebende enge Zusammenspiel von Mathematik und Logik hat zur Folge, dass nur solche Themen in die Mathematik Eingang finden können, die sich nach den genannten Regeln der Strenge behandeln lassen. Eine ausgereifte mathematische Theorie ist deshalb eine Weise des Denkens und Redens in einer „deduktiven Welt eigener Art“ (Winter 1995).

5. Die Verankerung der Mathematik im menschlichen Denken

Die Art und Weise, wie Logik und Mathematik seit Aristoteles verhandelt werden, ist bereits Teil eines erkenntnistheoretischen Diskurses. Der Mathematikunterricht muss jedoch bei ursprünglichen, vorwissenschaftlichen Erfahrungs- und Verstehensweisen ansetzen und kann von hier aus nur schrittweise auf das Fernziel einer ausgereiften Kultur des mathematischen Denkens hinarbeiten. Dazu muss er die richtigen Triebkräfte mobilisieren. Zu deren Verständnis lohnt ein zweiter Blick auf das Eingangszitat, mit dem die Autoren Courant und Robbins (1992, S. XIX) ihr zum Klassiker gewordenes Werk „Was ist Mathematik?“ einleiten:

> Die Mathematik ist tief im menschlichen Denken verankert. Betrachtender Verstand, unternehmender Wille, ästhetisches Gefühl finden in ihr den reinsten Ausdruck. Sie vereint Logik und Anschauung, Analyse und Konstruktion, Individualität der Erscheinungen und Abstraktion der Formen.

Dieser knappen und zugleich ausdrucksvollen Charakterisierung der Mathematik kann man die folgenden Botschaften und resultierenden Schlüsse entnehmen:

1. Die Mathematik ist gegründet in Denkhandlungen, die uns Menschen eigen sind. Der Mathematikunterricht kann daher auf natürliche Ansatzpunkte und Veranlagungen zurückgreifen. Müller und Wittmann (2012) sehen Wurzeln mathematischen Denkens von früher Kindheit an im Erkennen und Erforschen von Mustern.
2. Bestimmte Triebkräfte – „betrachtender Verstand, unternehmender Wille, ästhetisches Gefühl“ – finden in der Mathematik ihren „reinsten Ausdruck“. Es bedarf daher geeigneter Bemühungen, diese zu wecken und ihre Entwicklung zu fördern.
3. Es gibt komplementäre Formen der Wissensbildung, die in ein fruchtbares Spannungsverhältnis zueinander treten. Diese verdienen besondere Beachtung.

Die von Courant und Robbins genannten Triebkräfte und Formen der Wissensbildung begleiten die mathematische Denkentwicklung von Anfang an. Ihnen gilt im Folgenden eine genauere Betrachtung.

5.1 Betrachtender Verstand

Verstand (lat. ratio) bezeichnet diejenigen Erkenntnisfähigkeiten des Menschen, die es mit dem regelgeleiteten Verknüpfen von Elementen zu Zusammenhängen zu tun haben. Rationale Verstandestätigkeit geht *diskursiv* vor, d.h. sie schreitet methodisch voran, indem sie das Ganze aus seinen Teilen aufbaut, Begriffe zu Begriffssystemen verknüpft und nach logischen Regeln Schlüsse zieht. Die Grenzen des Verstandes zeigen sich darin, dass das diskursive Denken auf oberste Prinzipien, vor allem auf den Satz vom zu vermeidenden Widerspruch, zurückgreifen muss (siehe Abschnitte 2-4).

Mathematik ist dort, wo sie das Vorfeld des intuitiven Erahnens verlässt, eine Tätigkeit des rational vorgehenden Verstandes. Ihre Aktivitäten bedürfen der ruhigen und konzentrierten Betrachtung. Nicht umsonst bezeichnete das aus dem Griechischen stammende Wort „Theorie“ ursprünglich die geistige Betrachtung von Ideen, Sachverhalten und abstrakten Zusammenhängen.

5.2 Unternehmender Wille

Anspruchsvolle Mathematik versteht sich nicht so einfach von selbst. Sie bedarf des Willens, konzentriert und beharrlich bei der Sache zu bleiben.

Wille bezeichnet die Fähigkeit des Menschen, sich aufgrund von Motiven für Handlungen zu entscheiden. Unternehmender Wille ist das Streben, etwas zu vollbringen. Er motiviert dazu, ein Vorhaben anzupacken und zielstrebig auszuführen. In der Mathematik kann ein Vorhaben darin bestehen, ein Problem zu lösen, eine Vermutung zu beweisen, eine Theorie zu begründen oder eine praktische Aufgabe mit mathematischen Mitteln zu bearbeiten. Erfolgreiche Mathematikerinnen und Mathematiker sind von solch einem handlungsleitenden Streben erfüllt.

Der englische Mathematiker A. Wiles, dem 1994 der Durchbruch im drei Jahrhunderte währenden Ringen um den Beweis der berühmten Fermat'schen Vermutung gelang, verdankt diesen historischen Erfolg einer besonderen Faszination für die Mathematik, einer außergewöhnlichen Begabung und einem unerschütterlichen unternehmenden Willen, der schon im zehnten Lebensjahr erwachte und sich drei Jahrzehnte lang von keiner noch so hohen Hürde entmutigen ließ.

> „Das war ein Problem, das ich als Zehnjähriger schon verstehen konnte, und von diesem Moment an wusste ich, dass ich nie davon ablassen würde. Ich musste es einfach lösen." (A. Wiles, zitiert nach Singh 1998, S. 30).

Auch normal begabte Schülerinnen und Schüler können im Mathematikunterricht unternehmenden Willen entwickeln. So berichten Müller und Wittmann (1995, S. 81–83) von dem Grundschüler Tim, der fasziniert war von dem Unterrichtsthema „Zahlenmauern" und beschloss, ein „Buch" zu diesem Thema zu schreiben:

> „Wir haben in der Schule über Zahlenmauern gesprochen. Als ich meine Hausaufgaben gemacht hatte, habe ich mich gelangweilt, und es hat geregnet. Vor dem Fernseher kam mir eine Idee, das Zahlenmauerbuch zu schreiben." (Tim Lümkemann, 1. Schuljahr).

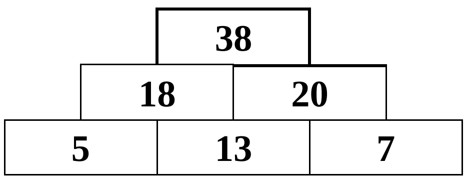


Abb. 1.: Beispiel einer Zahlenmauer

Tim hat aus eigenem Antrieb ein siebzehn Seiten umfassendes „Zahlenmauerbuch" verfasst und darin Zahlenmauern unterschiedlicher Höhe und Schwierigkeit erstellt.

Mathematikunterricht ist anregend, wenn er den unternehmenden Willen der Schülerinnen und Schüler zum Lösen von Problemen und zum Erstellen von Produkten stimuliert und damit im besten Fall sogar den Unterhaltungsmedien Konkurrenz machen kann.

5.3 Ästhetisches Gefühl

Die Mathematik besitzt eine eigene Ästhetik. Die Faszination der Vollkommenheit und Schönheit mathematischer Muster und Strukturen, der Kohärenz der Teildisziplinen und der Eleganz von Schlüssen und Beweisen ist Ausdruck ästhetischen Empfindens. Dieses ist unabhängig von Verstandeserkenntnis und Nützlichkeitserwägungen eine sinnliche Erfahrung eigenen Rechts, die mathematisches Interesse begründen und stimulieren kann.

> „Die Werke des Mathematikers müssen schön sein wie die des Malers oder Dichters; die Ideen müssen harmonieren wie die Farben oder Worte. Schönheit ist die erste Prüfung: es gibt keinen Platz in der Welt für hässliche Mathematik." (Hardy, 1967).

Die Schönheit geometrischer Muster spricht Menschen aller Altersstufen an. Hier sind es Kriterien wie Ebenmaß, Regelmäßigkeit, Symmetrie und Selbstähnlichkeit, die diese Schönheit ausmachen. Regelmäßigkeit und Symmetrie gibt es aber nicht nur in sinnlich wahrnehmbaren Mustern der Geometrie. Symmetrie kann auch in abstrakterer Form in einem Zahlenschema, in einer Formel oder in einer Satzaussage anzutreffen sein.

Die Kohärenz zwischen Teilgebieten der Mathematik artikuliert sich in prägnanter Kürze in der Eulerschen Identität

$$e^{\pi i} + 1 = 0\,,$$

die in einer Umfrage unter Mathematiker*innen zur „schönsten Formel" erhoben wurde (Behrends 2006). Diese Auszeichnung wurde ihr wohl deshalb zuteil, weil sie symbolisch für die Einheit der Mathematik steht. Sie verbindet die wichtigsten Zahlen in einer einzigen markanten Gleichung: die Null und die Eins als die Bausteine, aus denen das gesamte Zahlensystem aufgebaut werden kann, dazu die Kreiszahl π, die Euler'sche Zahl e und die komplexe Einheit i. Sie fügt in geheimnisvoller Schlichtheit einen großen Reichtum an mathematischen Ideen zusammen und schlägt Brücken zwischen verschiedenen Teilgebieten der Mathematik.

Ein Beispiel für einen eleganten Schluss in der Schulgeometrie ist der Beweis des Höhenschnittpunktsatzes für Dreiecke durch Rückgriff auf den Satz vom Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Die Beweisidee besteht darin, die Höhen eines Dreiecks als Mittelsenkrechten des zugehörigen Umdreiecks zu deuten. Elegante mathematische Gedankengänge zeichnen sich aus durch eine Einfachheit, die durch wirkmächtige, oft unkonventionelle Ideen erzeugt ist. Elegante Beweise fügen die Argumente in möglichst prägnanter Weise zusammen zu einem stimmigen Bild.

Ein wichtiges Bildungsziel des Mathematikunterrichts besteht darin, Mathematik erlebbar zu machen als „einen Erfahrungsbereich mit ästhetisch ansprechenden Strukturen, Geheimnissen und Wundern, in dem die spielerische Phantasie ausgelebt und das Empfinden für Schönheit gestärkt werden kann.“ (Müller, Steinbring & Wittmann 1997, S. 23).

5.4 Logik und Anschauung

Die Bedeutung der Logik als „Gesetzeswerk“ für korrektes mathematisches Denken wurde schon in Abschnitt 4 betrachtet. Jedoch ist die Logik als alleiniger Erkenntnisweg unzureichend; sie gibt den mathematischen Begriffen und Schlussweisen die Form, aber keinen Inhalt. So hat z. B. Kant betont, dass unsere gedanklichen Entwürfe bedingt sind durch das Zusammenwirken von zwei ganz heterogenen Erkenntniskräften:

- dem Verstand, der im Denken Begriffe als Möglichkeit setzt,
- der Anschauung, die unter den Bedingungen von Raum und Zeit Objekte sinnlich gegenständlich macht.

Berühmt geworden ist das folgende Zitat aus der „Kritik der reinen Vernunft“: „Ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben, und ohne Verstand keiner gedacht werden. Gedanken ohne Anschauung sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind.“ (siehe hierzu Bormann et al., 1972, S. 86).

Anschauung als sinnlich vermittelter und in sich entwickelbarer Erkenntnisweg hat in der Mathematik eine große Reichweite. Am Anfang der mathematischen Denkentwicklung steht eine gegenstandsbezogene Anschauung: gegenständlich repräsentierte Situationen und Konfigurationen sind Anlässe, arithmetische, geometrische und stochastische Muster zu finden und Begriffe auszubilden und damit bereits „hinter die Dinge“ zu schauen. In einem fortgeschrittenen Stadium kommen metaphorisch vermittelte Anschauungen hinzu. So basiert etwa die Zahlengerade auf der Metapher „Gehen auf Wegen“ und die Mengensemantik auf der „Containermetapher“ (Lakoff & Núñes, 2000). Dazu gibt es auch rein semiotisch gestützte Anschauungen, etwa in symbolischen Ausdrücken oder abstrakten Graphen. Professionelle Mathematiker*innen entwickeln noch abstraktere, von materiellen Darstellungen unabhängige Anschauungen, um sich Sachverhalte, etwa in der Gruppentheorie, zu vergegenwärtigen.

Zum Verhältnis von Logik und Anschauung gibt es grundlegende didaktische Fragestellungen:

- Wie kann man im Mathematikunterricht erreichen, dass anschauliches Erfassen und verstandesmäßiges Durchdringen in ein dynamisches Wechselspiel treten? Wie kann man im Sinne von Pestalozzi „die Anschauung den Schranken ihrer bloßen Sinnlichkeit entreißen und sie […] zum Werk des Verstandes machen?“ (zitiert nach Winter, 1999, S. 254).
- Wie kann man das Anschauungsvermögen so entwickeln, dass „das Sehen mit Denken […] durchsetzt“, also argumentativ strukturiert wird (Winter, 2016, S. 175), dabei zum „Sehen hinter die sichtbaren Dinge“ gelangt und zum „Schauen mit den Augen des Geistes“ wird? (Winter, 1999, S. 257).

5.5 Analyse und Konstruktion

Analyse (Auflösung) und Synthese (Zusammenfügung) in vorphilosophischer Verwendung (z. B. bei Homer) beziehen sich ursprünglich auf handwerkliche Vorgänge: ein Gewebe wird in Fäden „aufgelöst“, ein Teppich aus Fäden durch „Verknüpfung“ gefertigt. Daraus entwickelten sich Schlüsselwörter der philosophischen Methodenlehre nach mathematischem (zunächst geometrischem) Vorbild (Oeing-Hanhoff ,1971):

- Eine als schon konstruiert angenommene Figur wird auf die Bedingungen ihrer Konstruierbarkeit hin analysiert, indem man schrittweise rückwärts arbeitet. Allgemein: ein Ziel wird auf die Mittel seiner Verwirklichung hin analysiert.
- Dann wird der Prozess umgekehrt: Vom Endpunkt der Analyse schreitet man durch Synthese der gefundenen Bedingungen zum Gesuchten voran.

In der Mathematik findet dieser Wechselprozess Anwendung beim Lösen von Problemen, beim Finden von Beweisen und beim mathematischen Modellieren von Sachsituationen.

Eine Synthese zu finden ist eine konstruktive Tätigkeit, aber der Begriff „Konstruktion“ umfasst mehr als die Synthese im o. g. Sinne. Weitere konstruierende Tätigkeiten in der Mathematik sind:

- das Bilden eines Begriffes (Begriffe als „Konstrukte“);
- das Gedankliches Ordnen eines Feldes (z. B. in Form von begrifflichen oder logischen Hierarchien);
- das Generieren von Vermutungen und das Finden von Ideen.

Auch hier geht in der Regel eine Analyse der Situation voraus. Eine erfolgreiche Konstruktion ist ein kreativer Akt und braucht einen inneren Kompass, an dem sich die Gedanken ausrichten. Auch hierzu gibt es grundlegende didaktische Problemstellungen:

- Auf methodischer Ebene: Wie sieht ein erfolgreiches Methodentraining aus, z. B. im Problemlösen, Beweisen, Modellieren?
- Grundsätzlicher: Wie kann man Einsicht oder einen guten Einfall begünstigen? Wie initiiert man z. B. gehaltvolle Befassungen, die den Boden bereiten? Wie arrangiert man fein tarierte Schrittfolgen, die den gedanklichen Aufbau unterstützen? Wie sieht eine förderliche Bemessung von Verweilzeiten zur Ausreifung aus?
- Begleitend: Wie kann man die Einstellungen (beliefs) der Lernenden motivierend beeinflussen?

5.6 Individualität der Erscheinungen und Abstraktion der Formen

Berühmt geworden ist das magische Quadrat (Abb. 2) im Kupferstich „Melencolia“ von Albrecht Dürer (1514):

Abb. 2: Albrecht Dürer: magisches Quadrat (Kupferstich „Melencolia“1514)

Es ist zunächst eine individuelle mathematische Erscheinung. Diese enthält ein herausforderndes arithmetisches Muster (alle Zeilen-, Spalten- und Diagonalen-Summen ergeben denselben Wert) und ruft Fragen nach Existenzkriterien und Konstruktionsbedingungen auf den Plan: Gibt es mehr solche Quadrate, und wenn ja, wie viele? Wie findet man sie? Gibt es vielleicht sogar eine Möglichkeit, einen Überblick über die Gesamtheit dieser Erscheinungen zu generieren?

Mehr als dreihundert Jahre später wurde in der Mathematik die Theorie der Vektorräume als universelles Darstellungsmittel und Explorationsinstrument entwickelt. Sie erlaubt eine mathematische „Beherrschung“ der Frage zu den magischen Quadraten durch Abstraktion der Formen auf folgende Weise: Die Gesamtheit der magischen 4×4-Quadrate aus rationalen Zahlen bildet einen Untervektorraum im Raum der 4×4-Matrizen über $\mathbb{Q}$. Durch die Konstruktion einer Basis zu diesem Unterraum, bestehend aus Quadraten, die mit 0 und 1 besetzt sind, gewinnt man ein Werkzeug zur Konstruktion beliebig vieler neuer Quadrate und einen Überblick über die Größe dieses Raumes.

Das Spannungsfeld zwischen Individualität der Erscheinungen und Abstraktion der Formen kann bereits von der Grundschule an mathematisch fruchtbar gemacht werden. In der Arithmetik und Geometrie beginnt es mit der Entdeckung einfacher Muster und setzt sich mit dem Erwerb der algebraischen Formelsprache und dem Einblick in ihre Leistungsfähigkeit fort. Zahlenmauern stellen hierzu eine herausfordernde Lernumgebung von Anfang an dar.

Auch hierzu stellen sich spannende didaktische Fragen:

- Wie nutzt man die Individualität der Erscheinungen, um Abstraktion der Formen anzuregen? Gibt es hierzu wirkmächtige generische Beispiele und paradigmatische Lernanlässe? Wie sehen geeignete Lernumgebungen und Aufgabenformate aus?
- Was weiß man über Mechanismen der Abstraktion und wie macht man dieses Wissen für die Lehre nutzbar? Wie arrangiert man geeignet bemessene Schritte mit wirksamen Anleitungen? Wie setzt man Impulse, die innere Regelhaftigkeit eines mathematischen Darstellungskontextes zu erkennen? Wie initiiert man Prozesse der „fortschreitenden Schematisierung“ (Glade, 2016)?

6. Entwicklung mathematischer Denkhandlungen im Unterricht

Es gibt grundlegende Denkhandlungen, die die mathematische Denkentwicklung in der gesamten Bildungskette durchziehen und dabei eine fortschreitende Ausreifung erfahren sollten.

6.1 Ordnen und Strukturieren

Das gedankliche Ordnen und Strukturieren ist eine grundlegende Tätigkeit in der Mathematik. Es ist eine geistige Technik, die dazu dient, „Übersicht und Einsicht in einen verwirrenden unüberschaubaren Problembereich“ zu erlangen (Winter, 1972, S. 80), und die und zur Ausbildung formaler Fähigkeiten beiträgt

- Das Ordnen von konkreten Gegenständen der Größe nach ist eine wichtige Tätigkeit zur Ausbildung abstrakter Größenbegriffe wie Länge, Flächeninhalt, Gewicht.
- Das Strukturieren von Zahldarstellungsmitteln wie dem Hunderterfeld ist ein Hilfsmittel zum Erkennen von Zahlbeziehungen und zum flexiblen Rechnen.
- Das Strukturieren einer geometrischen Konfiguration ist ein Hilfsmittel zum Auffinden von Gesetzmäßigkeiten und zum Verstehen oder Auffinden von Beweisen.
- Ein Sinn für Termstrukturen ist unabdingbar für einen erfolgreichen Umgang mit formalen Werkzeugen der Mathematik.

- Das lokale und globale Ordnen eines mathematischen Themenfeldes nach logischen Abhängigkeiten fördert die Einsicht in den Zusammenhang und die Kohärenz der Teile.

Oft führt das Herstellen einer sinnvollen Ordnung bereits zur Lösung eines Problems. Die Formel $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ für die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n ergibt sich aus einem geschickten Ordnungsschema für die Summanden. Ein Ordnungsgedanke kann auch Keim einer mathematischen Entdeckung sein. Die Einsicht, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist, verdankt sich der Idee, die Schreibfiguren der Brüche in einem geeigneten Schema zu arrangieren. In der Regel ist das Auffinden passender Ordnungsgesichtspunkte selbst eine kreative Leistung.

Gedankliches Ordnen und Strukturieren ist überall im Mathematikunterricht zum Erfassen innerer Beziehungen und damit als Grundlage aktiven und verstehenden Lernens erforderlich.

6.2 Begriffe bilden

Mathematisches Denken ist von Anfang an ein „Denken in Begriffen" (Wittenberg, 1957). „Ein mathematischer Begriff kann ein *Objekt* – bzw. eine Klasse von Objekten – bezeichnen, wie etwa ‚Mittelsenkrechte', ‚Viereck' oder ‚Gleichung', *Eigenschaften von Objekten* festlegen, wie etwa ‚monoton', ‚stetig' oder ‚symmetrisch', *Relationen* charakterisieren, wie etwa ‚kongruent zu', ‚ähnlich zu' oder ‚Teiler von', oder er kann *Verfahren* bzw. *Handlungen* bezeichnen, wie etwa ‚schriftlich Multiplizieren', ‚Gauß-Algorithmus', ‚Äquivalenzumformung' oder ‚Differenzieren'." (Ruwisch & Weigand, 2023).

Tragende Begriffe der Mathematik wie Zahl, geometrische Figur, Funktion, Wahrscheinlichkeit durchziehen die gesamte Architektur der Mathematik. Sie sind komplex und erfordern einen langen Lern- und Entwicklungsprozess.

An der Konstitution eines Begriffes können je nach Art mehrere Prozesse beteiligt sein:

- *Die Diskrimination*, d.h. das Unterscheiden und Herausheben einzelner Merkmale, wie zum Beispiel der gleich langen Kanten beim Würfel.
- *Die Abstraktion* als Herausheben relevanter und Vernachlässigen irrelevanter Merkmale. So sieht etwa die Anzahl einer Menge von der Beschaffenheit der Elemente ab.
- Die *Idealisierung* als normierende Gestaltgebung: So wird einer Geraden, einem Kreis, einem Würfel eine je eigene Idealgestalt zugedacht, die jede materielle Verkörperung nur näherungsweise realisieren kann.

- Die *Vergegenständlichung* eines Prozesses: So geschieht es bei den Begriffen Folge oder Funktion.
- Die *symbolische Konstitution* eines fiktiven Objektes als Ergebnis einer Operation, so etwa bei einer negativen Zahl als dem gedachten Ergebnis einer Subtraktion oder einer irrationalen Zahl als „Fang" einer Intervallschachtelung.

Ein wichtiges Motiv zur Konstitution von Begriffen ist die Präzisierung von ungenauen Problemstellungen und intuitivem Wissen. Die allgemeine Frage „Wann sind Figuren ähnlich?" erhält durch den geometrischen Ähnlichkeitsbegriff eine genaue Antwort. Die intuitive Vorstellung von Konvergenz wird durch den Grenzwertbegriff der Analysis präzisiert, und die Frage nach der Messbarkeit von Veränderung erhält durch den Begriff der *Ableitung* eine exakte Antwort. Begriffe können auch Ausdrucksmittel zur Lösung eines Problems sein. Determinanten wurden definiert, um Lösungen von Gleichungssystemen angeben zu können.

Ein mathematischer Begriff eröffnet oft einen ganzen Kosmos an Bedeutung. Dieser erschließt sich in dem Maße, wie sich, in der Diktion von Tall und Vinner (1981) gesprochen, hinter einer formalen „concept definition" ein reichhaltiges „concept image" auftut. Ein adäquates Verständnis grundlegender mathematischer Begriffe erfordert deshalb eine langfristige Entwicklung.

6.3 Argumentieren, Begründen und Beweisen

Die Idealform der mathematischen Wissenssicherung ist ein Beweis, der eine behauptete Aussage in einer Kette von Folgerungen nach anerkannten Schlussregeln aus den gegebenen Voraussetzungen ableitet. Dies erfordert jedoch ausgereifte Fähigkeiten im Explizieren mathematischer Zusammenhänge und eine Beherrschung der geltenden Standards der Logik.

Dahinter stehen ursprünglichere Formen der Suche nach Gewissheit, deren einfache Ausdrucksform die Fragen „Warum?" ist. Gewissheit kann intuitiv, also durch unvermittelte Erfassung entstanden oder diskursiv vermittelt sein. Im zweiten Fall ist es – mehr oder weniger streng – überprüft und begründet.

Infragestellen, Überprüfen und Begründen vollziehen sich auf dem Wege der *Argumentation*. Darunter verstehen wir eine Rede für oder gegen die Wahrheit einer Aussage mit dem Ziel, die Zustimmung oder den Widerspruch wirklicher oder fiktiver Gesprächspartner zu dieser Aussage zu erlangen. Dabei wird schrittweise und möglichst lückenlos auf bereits gemeinsam anerkannte Aussagen zurückgegangen. Die einzelnen Schritte heißen die für bzw. gegen die zur Diskussion gestellte Aussage vorgebrachten *Argumente*. Eine Argumentation heißt *schlüssig*, wenn niemand, der ihren Ausgangssätzen (Aussagen oder Normen) zugestimmt hat, irgendeinem ihrer Schritte die Zustimmung verweigern kann, ohne sich in Widersprüche zu verwickeln (Thiel, 1995).

Ein Bewusstsein für Schlüssigkeit in der Mathematik und ihre expliziten Ausdrucksformen muss aber erst langsam wachsen. Krummheuer (1997, 2008) hat gezeigt, dass Grundschulkinder im Mathematikunterricht zwar argumentieren und zu überzeugen versuchen, jedoch keine Begründungen im mathematisch strengen Sinne führen, indem sie Voraussetzungen und Konklusion exakt benennen und nach logischen Schlussregeln vorgehen. Vielmehr erzählen sie eine Geschichte über ihre Aufgabenlösungen, wobei die Richtigkeit des Vorgehens mit thematisiert wird, meist aber nur implizit in Andeutungen oder Gesten aufscheint.

Es ist daher ein tiefliegendes und spannendes didaktisches Problem, wie aus diesen vordiskursiven Denkweisen schrittweise Ausdrucksformen „reiner Diskursivität“ in folgendem Sinne entwickelt werden können: „Sie treten in Aussagesätzen auf, in denen ein geschlossener Gedanke ausgedrückt ist. Das Gemeinte ist darin sachlich aufgehoben und kann voll aus dem Gesagten entnommen werden. Es ist präzise und eindeutig in der einen diskursiven Formulierung beschlossen, intendierter Gegenstand und sprachlicher Ausdruck decken sich.“ (Misch, 1994, Vorbericht der Herausgeber, S. 34).

6.4 Mathematisches Modellieren

Der Begriff „Modell“ ist abgleitet von dem lateinischen „modulus“ mit der ursprünglichen Bedeutung von „Maß“ oder „Maßstab“ und wird in der Alltags- und Wissenschaftssprache vielfältig verwendet. Die dabei erlangte Bedeutung lässt sich allgemein als „fasslichere oder leichter realisierbare Darstellung unübersichtlicher oder abstrakter Gegenstände oder Sachverhalte“ beschreiben (Wolter, 1995, S. 911). Dabei können die idealisierende Reduktion auf relevante Züge und die Betonung von relationalen und funktionalen Beziehungen eine wichtige Rolle spielen (ebd.).

Modellvorstellungen für mathematische Inhalte unterstützen das Lernen und Verstehen. Ein aus Holz gefertigter Würfel ist ein gegenständliches Modell für den geometrischen Begriff „Würfel“ und lässt sich mit dem Gesichts- und Tastsinn „erfassen“. Die Zahlengerade ist ein geometrisches Modell für den angeordneten Körper der reellen Zahlen, in dessen Gebrauch die Analogie zwischen räumlicher Anordnung und arithmetischer Größenordnung maßgebend ist.

Eine wichtige Rolle an der Schnittstelle zwischen Mathematik und Realität spielen mathematische Modelle, mit deren Hilfe Realität gestaltet oder beschrieben werden kann. Wenn Straßenverläufe nach geometrischen Vorbildern modelliert oder Steuertarife nach arithmetischen Regeln festgesetzt werden, dann wird ein Teilbereich der Realität nach Maßgabe eines normativ verwendeten mathematischen Modells erschaffen. Wird umgekehrt ein Teilbereich der Realität durch einen hierfür ausgewählten oder zielbezogen konstruierten Bereich der Mathematik beschrieben, so entstehen deskriptive Modelle. Sie dienen dazu, reale Sachverhalte oder Prozesse in mathematischer Form zu simulieren und damit zu explorieren, um Zusammenhänge aufzuklären und Probleme zu lösen, die sich in der Realsituation stellen. Die zunehmend prägende Bedeutung der Mathematik für unsere Lebenswelt hängt mit diesen Möglichkeiten des mathematischen Modellierens zusammen (vgl. hierzu Bauer, 2021). Deshalb wird es in gegenwärtigen Bildungskonzepten als wichtig erachtet, dass dieses Potential der Mathematik mit seinen Chancen und ggf. auch Ambivalenzen im Unterricht erfahrbar wird.

Die Auseinandersetzung mit Problemen der Lebenswelt, die sich mit Hilfe der Mathematik beschreiben und rechnerisch behandeln lassen, beginnt schon in der Grundschule mit der Entwicklung von Vorstellungen, wie natürliche Zahlen und ihre Rechenoperationen als Ordnungsschemata umweltlicher Situationen eingesetzt werden können (Winter 2004). Die Bruchrechnung und die Werkzeuge der Algebra und Funktionenlehre wie auch stochastische Überlegungen erweitern in der Sekundarstufe die Spielräume.

Die mathematische Modellbildung an der Schnittstelle zwischen Mathematik und Realität erfordert eine Erschließung sowohl der betrachteten Realsituation wie auch der einzusetzenden mathematischen Werkzeuge und die Ermittlung der Passungen zwischen beiden. Solche Denkhandlungen erfordern kreative Züge in zwei Richtungen (ebd., S. 11):

- das Auswählen oder Bilden eines abstrakten Modells beim Betrachten einer realen Situation,
- das Auffinden von realen Bezügen, die durch ein mathematisches Begriffsgefüge gedeutet werden können.

Die didaktische Konzeption der „Grundvorstellungen mathematischer Inhalte“ zielt darauf, von der Grundschule an ein Bewusstsein für solche Passungen auszubilden (vom Hofe & Blum, 2016).

7. Denken und Darstellen

Die Darstellungsmittel der Mathematik dienen der materiellen Fixierung von Gedanken. Durch diese Materialisierung werden die Sachverhalte den

Sinnen zugänglich, insbesondere dem Gesichtssinn, so dass man von einer „vergegenständlichenden Auslagerung des Denkens“ (Fischer, 2003.) reden kann. Diese ermöglicht eine Fokussierung der Aufmerksamkeit und unterstützt die Kommunikation. Sie erleichtert das Abstrahieren und damit das Distanzieren von dem, was den Darsteller nicht interessiert, sie fördert die Konzentration und sie verleiht den Gedanken Stabilität und Realität. Das Sichtbarmachen von Beziehungen, Begriffen und Mustern durch Diagramme und Symbole vermittelt diesen eine Konkretheit, die sie auch für den Gedankenaustausch zugänglich machen (ebd.).

Es gibt ein großes Spektrum möglicher Darstellungsformen in der Mathematik. Deren Vielfalt kann nach verschiedenen Gesichtspunkten geordnet werden.

Einteilung nach der Art der verwendeten Mittel: Der Kognitionspsychologe J. S. Bruner unterschied im Anschluss an die Theorie der Genfer Schule drei Arten, Wissen darzustellen bzw. zu erschließen: *enaktiv* (durch Handlungen), *ikonisch* (durch bildliche Zeichen), *symbolisch* (durch konventionalisierte Zeichen und Sprache). Zum enaktiven Repräsentationsmodus gehört es zum Beispiel, geometrische Körpermodelle zu basteln oder ein Einheitsquadrat von der Größe 100 m^2 auf dem Schulhof abzustecken und zu Fuß zu umrunden. Zur ikonischen Darstellungsform gehören Bilder, die eine Rechengeschichte erzählen, aber auch stilisierte Darstellungen wie Piktogramme, Funktionsgraphen oder Baumdiagramme. Symbolische Darstellungen verwenden künstliche Zeichen mit festen Gebrauchskonventionen. Dazu gehören Zahldarstellungen im Ziffernsystem, Tabellen und Formeln.

Eine andere Unterscheidungsmöglichkeit richtet sich nach dem Grad der Regelhaftigkeit. Dazu kann man drei Stufen ansetzen: *informelle*, *regelhafte* und *formale* Darstellungen.

Informelle Darstellungen sind jede Art von Skizzen oder Notizen, die die Gedanken unterstützen. *Regelgeleitete* Darstellungen verwenden Darstellungssysteme, für die allgemein akzeptierte Regeln der Herstellung und des Gebrauchs festgelegt sind, z. B. Zahldarstellungssysteme, nach bestimmten Regeln aufgestellte Tabellen wie die Wertetabelle einer Funktion, Funktionsgraphen im cartesischen Koordinatensystem, algebraische Formeln, Matrizen und weitere disziplintypische Symbolsysteme.

Formale Darstellungen sind spezielle regelgeleitete Darstellungen. Formalisieren ist das Übertragen von Wissen in eine bestimmte Notationsform mit wohldefinierten und -deklarierten Ausdrücken und der Möglichkeit der regelhaften Umgestaltung (Krämer, 1988). Beispiele sind das dezimale

Stellenwertsystem, die Symbolsprache der Algebra und die Quantorensprache der Logik.
Gemeinsam ist diesen Beispielen die Möglichkeit des kontextfreien und damit interpretationsfreien schematischen Vorgehens. Damit erhalten formale Darstellungen eine erhöhte operative Reichweite und Produktivität. Durch die Möglichkeit der regelhaften Umgestaltung können innerhalb eines formalen Darstellungssystems Produkte erzeugt werden: „Formale Sprachen aber sind Werkzeuge, mit denen wir nicht nur etwas darstellen, sondern auch herstellen" (Krämer 1988, S. 11). „Herstellen" kann man z. B. Aufgabenlösungen, die durch symbolische Rechenverfahren gewonnen werden, oder Darstellungsänderungen, aus denen neue Informationen gezogen werden. Schließlich kann man neue Objekte, z. B. $\sqrt{-2}$, symbolisch konstituieren.
Das Zusammenspiel von Form und Inhalt in der Mathematik ist ein zweifach dynamisches. Es besteht in der Herstellung von Beziehungen zwischen Symbolsystemen und Deutungskontexten (Steinbring, 2000), die horizontal wie vertikal verlaufen können.
Die formale Darstellung hilft, Wissen einer bestimmten Erkenntnisstufe explizit zu machen, und bezieht hieraus ihren Sinn. Sie zeichnet Konturen, die den Umgang mit dem Wissen und die diesbezügliche Kommunikation erleichtern. Sie transportiert jedoch nicht die gesamte Bedeutungsfülle ihres Referenzkontextes in selbsterklärender Weise; diese zurückzugewinnen, ist ein eigener Verstehensakt. Das Wechselspiel zwischen darstellendem Formalisieren und verstehendem Deuten ist die horizontale Dimension des Zusammenspiels von Form und Inhalt. In einem Prozess fortschreitender Formalisierung kann ein Symbolsystem selbst wieder zum Deutungskontext höherer Stufe werden. Das ist die vertikale Dimension des Zusammenspiels.

Der amerikanische Naturwissenschaftler und Philosoph Charles Sanders Peirce (1839 – 1914) sah im Zentrum der mathematischen Tätigkeit

- die Konstruktion von Darstellungen,
- das Experimentieren mit solchen
- und das Formulieren der Beobachtungen in allgemeinen Begriffen.

Er bezeichnete alle regelgeleiteten Darstellungen in der Mathematik als Diagramme. Deshalb war für ihn mathematische Erkenntnistätigkeit im Wesentlichen „diagrammatisches Schließen."

Das Experimentieren mit Diagrammen erhält nach Peirce den Charakter logischen Schließens, weil seine Ergebnisse durch die Regeln des Darstellungssystems bestimmt sind. Der Umgang mit den Zeichen und Darstellungssystemen hat aber auch Freiheitsgrade und kann damit kreative Spielräume eröffnen. Diese betreffen die Auswahl und Konstruktion von Darstellungssystemen, Strategien des Experimentierens sowie Möglichkeiten, das System weiterzuentwickeln, neue und unterschiedliche Interpretationen zu finden und es auch metaphorisch zu verwenden, also in neue Kontexte zu übertragen. Deshalb schließen sich Strenge und Kreativität in der Mathematik nicht aus (die Ausführungen zu Peirce orientieren sich an Hoffmann, 2005).

Das Zusammenspiel zwischen Denken und Darstellen, Form und Inhalt für die mathematische Erkenntnisentwicklung fruchtbar zu machen ist eine didaktische Herausforderung in der gesamten Bildungskette.

8. Übergänge

Die Entwicklung mathematischen Denkens aus dem Alltagsdenken erfordert auch Übergänge zwischen Stufen der Theoriebildung, die für die Lernenden erhebliche Hürden darstellen können. Struve (1990) hat das exemplarisch am Beispiel der Geometrie gezeigt. Anhand detaillierter Schulbuchanalysen hat er herausgearbeitet, dass Schülerinnen und Schüler im Geometrieunterricht bis zum 10. Schuljahr weitgehend eine „empirische Theorie“ mit Zeichen- und Faltblattfiguren als paradigmatischen intendierten Anwendungen lernen. Darin bleiben operativ gewonnene Begriffe wie „senkrecht“ oder „parallel“ zunächst unscharf und sind nur nach Maßgabe einer möglichen Zeichengenauigkeit bestimmt, und die auf einer anderen Stufe der Theoriebildung stehenden Begriff „Gerade“ und „Abbildung“ werden nicht wirklich benötigt und deshalb auch nicht verlässlich gelernt. Die Sicherung des Wissens geschieht vorrangig durch Beobachtung und Experiment. Der Übergang zu einem fortgeschrittenen, mehr an Idealen mathematischer Strenge orientierten Geometrieunterricht ist dann für die Lernenden mit epistemologischen Hürden verbunden, die den Lehrenden oft gar nicht bewusst sind.

Müller-Hill (2015) führt ergänzend aus, dass sich in diesem Prozess auch der Status geometrisch-zeichnerischer Darstellungen ändert, indem sie sich vom ikonischen Abbild zum regelhaft verwendeten Diagramm wandeln. Dadurch erhalten die diagnostizierten Lernhürden auch eine semiotische Komponente.

Ähnliche Hürden und Erfordernisse von „conceptual changes“ bestehen auch in anderen Bereichen. So müssen die Vorstellungen von den Rechenoperationen wie auch Konnotationen zu ihren Begleiteffekten bei jeder neuen Stufe im Aufbau des Zahlensystems passend erweitert oder sogar modifiziert werden.