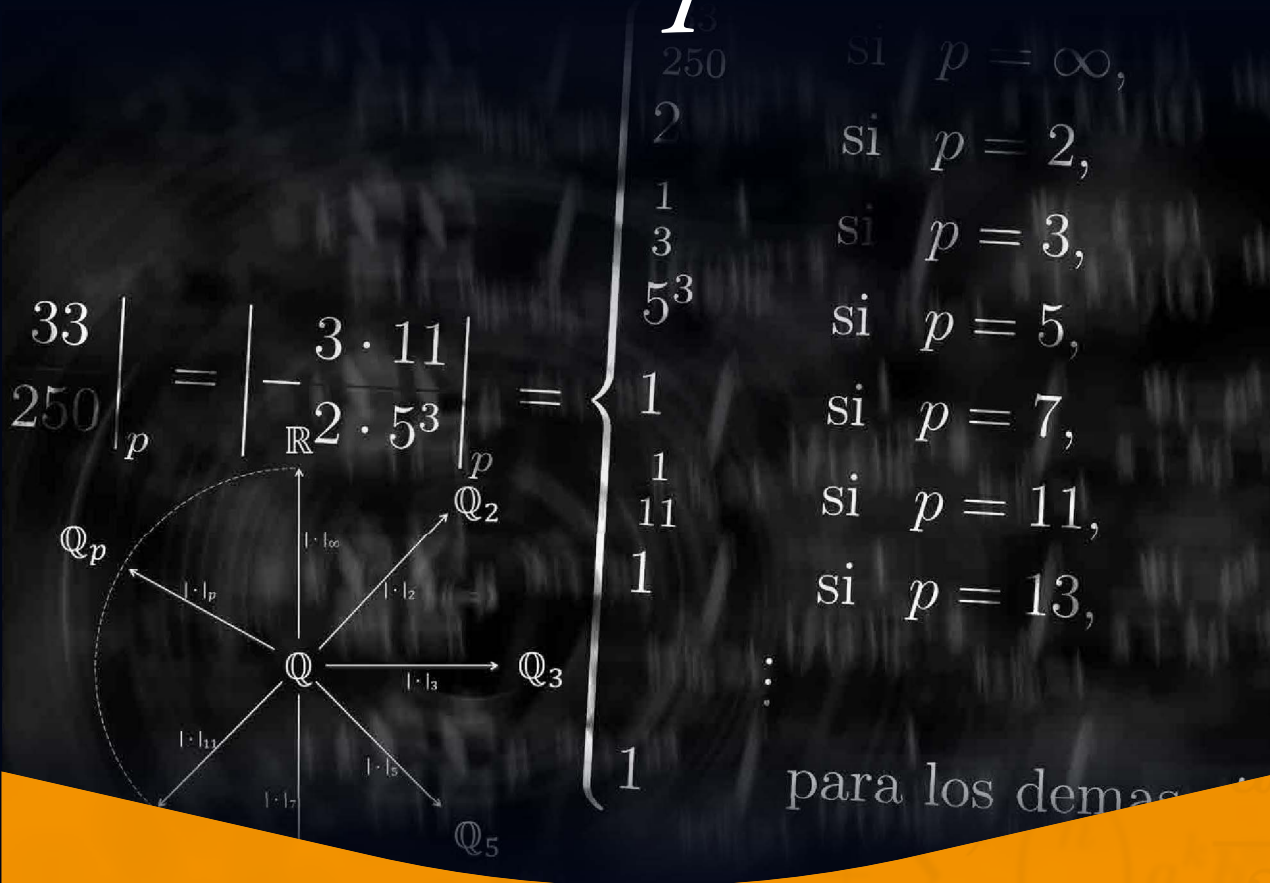


Operadores no locales sobre los números p -ádicos



O. F. Casas-Sánchez,
L. F. Chacón-Cortés,
J. Galeano-Peñaloza,
J. J. Rodríguez-Vega



EDITORIAL



Casas Sánchez Oscar Francisco

Matemático, Magíster en Ciencias Matemáticas y PhD en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá. Profesor asociado de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la UPTC, Tunja.

oscar.casas01@uptc.edu.co

ORCID 0000-0002-8725-5385



Chacón Cortés Leonardo Fabio

Matemático y Magíster en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, PhD en Matemáticas de Cinvestav, México. Profesor asociado del Departamento de Matemáticas de la Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá.

leonardo.chacon@javeriana.edu.co

ORCID 0000-0003-1335-7941

Operadores no locales sobre los números p -ádicos

O. F. Casas-Sánchez,
L. F. Chacón-Cortés,
J. Galeano-Peñaloza,
J. J. Rodríguez-Vega.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
2022



Operadores no locales sobre los números p-ádicos / Non-local operators over p-adic numbers / Casas Sánchez, Oscar Francisco; Chacón Cortés, Leonardo Fabio; Galeano Peñaloza, Jeanneth; Rodríguez Vega, John Jaime. Tunja: Editorial UPTC, 2022. 168 p.

ISBN (impreso) 978-958-660-621-9

ISBN (ePub) 978-958-660-622-6

1. Números p-ádicos. 2. Operadores pseudo-diferenciales. 3. Operadores no locales. 4. Proceso de Markov. 5. Funciones zeta locales. 6. Formas cuadráticas.

(Dewey 510 / 21) (Thema PB - Matemáticas)



Uptc®
Universidad Pedagógica y
Tecnológica de Colombia



Primera Edición, 2022

50 ejemplares (impresos)

Operadores no locales sobre los números p-ádicos

Non-local operators over p-adic numbers

ISBN (impreso) 978-958-660-621-9

ISBN (ePub) 978-958-660-622-6

Colección de Investigación UPTC No. 229

Proceso de arbitraje doble ciego

Recepción: mayo de 2021

Aprobación: octubre de 2021

© Oscar Francisco Casas Sánchez, 2022

© Leonardo Fabio Chacón Cortés, 2022

© Jeanneth Galeano Peñaloza, 2022

© John Jaime Rodríguez Vega, 2022

© Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2022

Editorial UPTC

Edificio Administrativo – Piso 4

La Colina, Manzana 7, Casa 5.

Avenida Central del Norte No. 39-115, Tunja,

Boyacá

comite.editorial@uptc.edu.co

www.uptc.edu.co

Rector, UPTC

Óscar Hernán Ramírez

Comité Editorial

Enrique Vera López, Ph. D.

Zaida Zarely Ojeda Pérez, Ph. D.

Yolima Bolívar Suárez, Mg.

Carlos Mauricio Moreno Téllez, Ph. D.

Pilar Jovanna Holguín Tovar, Mg.

Nelsy Rocío González Gutiérrez, Ph. D.

Manuel Humberto Restrepo Domínguez, Ph. D.

Óscar Pulido Cortés, Ph. D.

Edgar Nelson López López, Mg.

Editora en Jefe

Lida Esperanza Riscanevo Espitia, Ph. D.

Coordinadora Editorial

Andrea María Numpaque Acosta, Mg.

Corrección de Estilo

Nicolás López Blanco

Imprenta

Búhos Editores Ltda.

Tunja - Boyacá

Libro financiado por la Vicerrectoría de Investigación y Extensión - Dirección de Investigaciones de la UPTC. Se permite la reproducción parcial o total, con la autorización expresa de los titulares del derecho de autor. Este libro es registrado en Depósito Legal, según lo establecido en la Ley 44 de 1993, el Decreto 460 del 16 de marzo de 1995, el Decreto 2150 de 1995 y el Decreto 358 de 2000.

Impreso y hecho en Colombia / Printed and made in Colombia.

Libro resultado de investigación con SGI 2920.

Casas Sánchez, O., Chacón Cortés, L., Galeano Peñaloza, J. & Rodríguez Vega, J. (2022). *Operadores no locales sobre los números p-ádicos*. Editorial UPTC.

doi: <https://doi.org/10.19053/9789586606219>

Resumen

Libro dirigido a estudiantes de últimos semestres de la carrera de matemáticas, estudiantes de maestría o doctorado, que quieran iniciar su investigación en el campo de los números p -ádicos o el análisis no-Arquimediano. Nuestro objetivo es mostrar ciertos temas de interés en este tópico, que permitirán al estudiante comprender y asimilar las técnicas usadas para resolver diferentes problemas relacionados con las ecuaciones pseudo-diferenciales, principalmente cuando se trabaja con formas cuadráticas. Este se divide en seis capítulos, en el primero, se introducen conceptos básicos del análisis p -ádico necesarios para el desarrollo de los capítulos posteriores. El segundo capítulo, está dedicado a la clasificación de las formas cuadráticas sobre el cuerpo de los números p -ádicos. En los dos capítulos siguientes, utilizando diferentes técnicas, se encuentran las soluciones fundamentales a las ecuaciones pseudo-diferenciales asociadas a diferentes operadores pseudo-diferenciales no locales. La primera parte del capítulo cinco está dedicada a estudiar el problema de Cauchy utilizando teoría de semigrupos y en la parte final, como caso particular, consideramos los operadores asociados a una forma cuadrática elíptica y resolvemos, de manera clásica, el problema de Cauchy asociado. En el último capítulo estudiamos el proceso de Markov que se genera a partir del problema de Cauchy homogéneo asociado a un operador en particular, ya que la solución fundamental de este, satisface las condiciones para ser una función de transición.

Palabras clave: Números p -ádicos; Formas cuadráticas; Operadores no locales; Proceso de Markov; Funciones zeta locales; Operadores pseudo-diferenciales.

Abstract

This book is aimed at advanced undergraduate, master's or Ph. D. mathematics students, who want to start their research in the field of p -adic numbers and non-Archimedean analysis. Our objective is to show specific topics of interest in this area, which will allow the student to understand and assimilate the techniques used to solve different problems related to pseudo-differential equations, mainly when working with quadratic forms. The book is divided into six chapters. The first one introduces basic concepts of p -adic analysis necessary for the development of subsequent chapters. The second chapter is dedicated to classifying the quadratic forms on the field of the p -adic numbers. In the following two chapters, by using different techniques, we found the fundamental solutions to the pseudo-differential equations associated with different non-local pseudo-differential operators. In the first part of chapter five we study the Cauchy problem using semigroup theory. Then, as a particular case, we consider the operators associated with an elliptic quadratic form and solve the associated Cauchy problem in a classical way. In the last chapter, we study the Markov process generated from the homogeneous Cauchy problem associated with a particular operator, since its fundamental solution satisfies the conditions to be a transition function.

Keywords: p -adic numbers; Quadratic forms; Non-local operators; Markov process; Local zeta functions; Pseudodifferential operators.

A la memoria de nuestro maestro y amigo
V́ctor Samuel Albis Gonźlez

Índice general

1. Análisis p-ádico	5
1.1. El cuerpo de los números p -ádicos	5
1.2. Aritmética en $\mathbb{Q}_p$	13
1.3. La topología de $\mathbb{Q}_p$	16
1.4. El espacio de Bruhat-Schwartz	18
1.5. Integración sobre $\mathbb{Q}_p^n$	19
1.6. La transformada de Fourier	22
1.7. Operaciones sobre distribuciones	28
1.8. La función Gamma p -ádica	29
1.9. Ejercicios	31
2. Formas Cuadráticas sobre $\mathbb{Q}_p$	33
2.1. Formas cuadráticas	34
2.2. Símbolo de Hilbert	38
2.3. Clasificación	43
2.4. La constante de Weil	45
2.5. Ejercicios	47
3. Funciones zeta locales	49
3.1. Funciones zeta locales	50
3.2. Tesis de Tate	52
3.3. Factores Gamma de Tate	54

3.3.1.	Factores gamma para los caracteres cuadráticos asociados al símbolo de Hilbert	55
3.4.	Soluciones fundamentales	63
3.4.1.	Operadores pseudo-diferenciales	64
3.4.2.	Soluciones fundamentales asociadas con el operador de Vladimirov	65
3.4.3.	Soluciones fundamentales para el operador de Taibleson	66
3.4.4.	Soluciones fundamentales asociadas con una forma cuadrática elíptica en dimensión impar	69
3.4.5.	Soluciones fundamentales asociadas con formas cuadráticas en dimensión par	71
3.5.	Ejercicios	75
4.	Espacios de Lizorkin	77
4.1.	Operadores pseudo-diferenciales	78
4.1.1.	Solución de ecuaciones pseudo-diferenciales	80
4.2.	El Núcleo de Riesz	81
4.3.	forma cuadrática de dimensión 4	83
4.3.1.	Los núcleos de Riesz forman un grupo abeliano	88
4.4.	Soluciones fundamentales	91
5.	Problema de Cauchy	95
5.1.	Operadores no locales sobre $\mathbb{Q}_p^n$	96
5.1.1.	Propiedades del símbolo $A_f(\xi)$	100
5.1.2.	Núcleo del Calor	101
5.2.	Uso de la teoría de semigrupos	103
5.2.1.	Ecuación homogénea con valor inicial en $\mathbf{S}(\mathbb{Q}_p^n)$	104
5.2.2.	Ecuación homogénea con valor inicial en $L^2(\mathbb{Q}_p^n)$	105
5.2.3.	Ecuación no homogénea	106
5.3.	Forma cuadrática elíptica de dimensión 4	107
5.3.1.	Operadores del tipo $\mathbf{D}(\partial, \alpha)$	111
5.3.2.	El operador $\mathbf{D}(\partial, \alpha)$	112
5.3.3.	El problema de Cauchy	116

6. Procesos de Markov	123
6.1. Procesos de Markov sobre $\mathbb{Q}_p^n$	124
6.2. Procesos Estocásticos, Markov y Feller sobre C_0	128
6.3. El problema del primer retorno	135
6.3.1. Caso general	135
6.3.2. El problema del primer retorno del proceso de Markov asociado al símbolo $\mathcal{A}_{d_1, d_2}^{-\alpha}(x)$. . .	141
Bibliografía	147

Introducción

Este libro ha sido fruto del Seminario de Análisis p -ádico y del Seminario de Teoría de números que los autores hemos impartido con regularidad en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, aunque no todos pertenecen a esta institución. Todos los autores hemos realizado la tesis doctoral bajo la supervisión del Dr. Wilson Zúñiga-Galindo, quien ha sido fuente de inspiración para la elaboración de este manuscrito.

Es común que el seminario inicie con la teoría básica de los números p -ádicos y luego tome otro camino, dependiendo del enfoque que se quiera dar y el interés de los estudiantes. Así que intentamos recopilar resultados que relacionan las ecuaciones pseudo-diferenciales con la teoría de semigrupos, pero además, en aras de mostrar todos los cálculos que implica probar estos resultados, hemos incluido una buena cantidad de casos particulares, teniendo en mente las formas cuadráticas sobre $\mathbb{Q}_p$. Hemos decidido hacer énfasis en estos ejemplos, dejando un poco de lado los clásicos, debido precisamente a que se encuentran disponibles en varias de las referencias que a menudo usamos.

En la actualidad existen varios libros que abordan diversos temas alrededor del campo de los números p -ádicos, temas como las ecuaciones pseudo-diferenciales, la teoría de wavelets y la teoría de

distribuciones, entre otros. Este sería uno de los primeros textos en español en el que se relacionan los números p -ádicos, las formas cuadráticas, las ecuaciones pseudo-diferenciales y la teoría de semigrupos. Hay que aclarar que algunos de los resultados que se muestran a lo largo del libro son clásicos del análisis p -ádico o de la teoría de números, mientras que otros han sido probados por los autores en otras referencias. Sin embargo, hay tópicos que no se abordan en los libros clásicos, y menos en los artículos de investigación, así como demostraciones que siempre se omiten, es por eso que hemos decidido incluirlas aquí con el objeto de que el libro sea lo más completo posible para un estudiante que se está iniciando en la investigación.

También hemos dejado en algunos capítulos una serie de ejercicios, que esperamos puedan ser resueltos al terminar la lectura correspondiente. Los primeros ejercicios suelen ser clásicos y cualquiera que esté dedicado a entender el tema puede resolverlos, otros son un poco más elaborados y requerirán más cálculos. Estamos seguros que los lectores encontrarán retos en algunos de ellos y la satisfacción de encontrar la respuesta correcta será la recompensa.

El libro está organizado en seis capítulos, de los cuales los dos primeros pueden considerarse como preliminares. Aunque el objetivo del libro no es hacer un tratado sobre hechos que involucran números p -ádicos, es importante incluir la teoría de estos campos, pues para algunos lectores será la primera vez que se enfrentan a los campos no-Arquimedianos, además, el manejo de la integración p -ádica será esencial en el estudio de las funciones zeta locales y los operadores pseudo-diferenciales. El objetivo del segundo capítulo es mostrar la clasificación de las formas cuadráticas elípticas sobre $\mathbb{Q}_p$, que es desconocida para muchos y será de gran utilidad para nuestros propósitos. Es importante mencionar que en la mayoría de documentos en los que se trabaja con formas cuadráticas sobre $\mathbb{Q}_p$ se señala que existe una clasificación y se muestra la lista de ellas, pero no se demuestra que en efecto, esas son las únicas formas cuadráticas elípticas que existen, por eso decidimos incluirlo.

El capítulo tres presenta una introducción a las funciones zeta locales, incluimos un breve comentario sobre la tesis de Tate, y mostramos los cálculos explícitos de los *factores gamma* para el

caso de una forma cuadrática -los cuales aparecen en todas las referencias que trabajan con las ecuaciones funcionales en cuestión, pero sin demostración-. Por último, usando la aproximación de Bernstein-Zúñiga utilizamos la continuación analítica de una función zeta local para encontrar la solución fundamental a la ecuación pseudo-diferencial asociada.

El capítulo cuatro está dedicado a los espacios de Lizorkin, cuya propiedad más importante es que son invariantes bajo la acción de los operadores que trabajamos. Bajo esta situación, se puede mostrar que los núcleos de Riesz forman un grupo abeliano, lo que facilita encontrar la solución de la correspondiente ecuación pseudo-diferencial.

Cuando se trabaja con ecuaciones pseudo-diferenciales es normal poner condiciones iniciales y resolver lo que se conoce como *problema de Cauchy*. En el capítulo cinco se aborda este tópico de dos formas esencialmente diferentes: de la manera clásica y utilizando teoría de semigrupos. Estudiamos diferentes símbolos, lo que nos lleva en ocasiones a trabajar sobre distintos espacios. El lector puede notar en cada uno de los ejemplos, cuáles son las diferencias y cuál es la necesidad de considerar uno u otro espacio, así como la técnica usada en cada caso.

Por último, en el capítulo seis estudiamos los *procesos de Markov* que se generan al trabajar con los operadores en cuestión. Adicionalmente, estudiamos el problema del primer retorno para un operador particular, aplicando un método clásico.

Esperamos que los lectores puedan disfrutar la lectura y realizar con ahínco cada uno de los cálculos señalados, así como los que se proponen, y puedan iniciar o continuar su investigación en el tema.

Oscar Francisco Casas Sánchez

oscar.casas01@uptc.edu.co

Leonardo Fabio Chacón Cortés

leonardo.chacon@javeriana.edu.co

Jeanneth Galeano Peñaloza

jgaleanop@unal.edu.co

John Jaime Rodríguez Vega

jjrodriguezv@unal.edu.co