



COLECCIÓN
INVESTIGACIÓN

Análisis histórico de las necesidades de agua del cultivo de la papa en la región central de Boyacá



- Zagalo Enrique Suárez Aguilar
- Omaida Sepúlveda Delgado
- Miguel Patarroyo Mesa
- Luis Carlos Canaria Camargo
- Nelsy Rocío González Gutiérrez



EDITORIAL



Nelsy Rocío González G.

Doctora en Ciencias de la Educación por la Red de Universidades Estatales RUDECOLOMBIA, CADE Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – Tunja. Magíster en Ciencias Matemáticas por la Universidad Nacional de Colombia – Bogotá. Licenciada en Matemáticas y Física por la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – Tunja. Docente Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia - Tunja. Facultad de Ciencias. Par evaluador reconocido por Minciencias. Integrante de los grupos: Grupo de Investigación en Álgebra y Análisis UPTC & Grupo Somos maestr@s, ambos categorizados en Minciencias. Líneas de investigación. Álgebra conmutativa; Epistemología e historia de la matemática; Saberes, conocimientos y prácticas en la formación de profesores de matemáticas; género y matemáticas. Correo electrónico: nelsy.gonzalez@uptc.edu.co



Omaida Sepúlveda Delgado

Doctora en Ciencias de la Educación por la Red de Universidades Estatales RUDECOLOMBIA, CADE Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – Tunja. Magíster en Ciencias Matemáticas por la Universidad Nacional de Colombia – Bogotá. Especialista en Computación para la Docencia por la Universidad Antonio Nariño. Ingeniera de Sistemas por la misma Universidad. Licenciada en Matemáticas por la Universidad Industrial de Santander – Bucaramanga. Docente Titular de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia - Tunja. Facultad de Ciencias. Par evaluador reconocido por Minciencias. Coordinadora del Grupo de Investigación en Álgebra y Análisis UPTC, categorizado en Minciencias. Investigadora Junior. Líneas de investigación. Álgebra abstracta (Teoría de grupos, anillos, lineal); Educación Matemática (Conocimiento didáctico matemático, Enfoque Ontosemiótico EOS, Estudios históricos y epistemológicos, educación matemática crítica). ORCID iD <https://orcid.org/0000-0002-5710-6063> Correo electrónico: omaida.sepulveda@uptc.edu.co



Análisis histórico de las necesidades de agua del
cultivo de la papa en la región central de Boyacá

Grupo de Investigación Álgebra y Análisis

Zagalo Enrique Suárez Aguilar

Omaida Sepúlveda Delgado

Miguel Patarroyo Mesa

Luis Carlos Canaria Camargo

Nelsy Rocío González Gutiérrez

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

2022



Análisis histórico de las necesidades de agua del cultivo de la papa en la región central de Boyacá / Historical analysis of the water needs of potato cultivation in the central region of Boyacá / Suárez Aguilar, Zagalo Enrique; Sepúlveda Delgado, Omaidá; Patarroyo Mesa, Miguel; Canaria Camargo, Luis Carlos; González Gutiérrez, Nelsy Rocío. Tunja: Editorial UPTC, 2022. 325 p.

ISBN (impreso) 978-958-660-666-0

ISBN (ePub) 978-958-660-667-7

Incluye referencias bibliográficas

1. Hidrología. 2. Evapotranspiración. 3. Agroclimatología. 4. Necesidad de Agua 5. Modelo matemático. 6. Probabilidad (Dewey 338.1 /21) (Thema PDR - influencia de la ciencia y la tecnología sobre la sociedad)



Uptc
Universidad Pedagógica y
Tecnológica de Colombia



**Dirección de
Investigaciones**

Primera Edición, 2022

50 ejemplares (impresos)

Análisis histórico de las necesidades de agua del cultivo de la papa en la región central de Boyacá
Historical analysis of the water needs of potato cultivation in the central region of Boyacá

ISBN (impreso) 978-958-660-666-0

ISBN (ePub) 978-958-660-667-7

Colección de Investigación UPTC N.º 252

Proceso de arbitraje doble ciego

Recepción: junio de 2021

Aprobación: agosto de 2021

© Zagalo Enrique Suárez Aguilar, 2022

© Omaidá Sepúlveda Delgado, 2022

© Miguel Patarroyo Mesa, 2022

© Luis Carlos Canaria Camargo, 2022

© Nelsy Rocío González Gutiérrez, 2022

© Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2022

Editorial UPTC

Edificio Administrativo – Piso 4

La Colina, Bloque 7, Casa 5

Avenida Central del Norte 39-115, Tunja, Boyacá

comite.editorial@uptc.edu.co

www.uptc.edu.co

Rector, UPTC

Óscar Hernán Ramírez

Comité Editorial

Dr. Enrique Vera López

Dra. Zaida Zarely Ojeda Pérez

Mg. Yolima Bolívar Suárez

Dr. Carlos Mauricio Moreno Téllez

Mg. Pilar Jovanna Holguín Tovar

Dra. Nelsy Rocío González Gutiérrez

Dr. Manuel Humberto Restrepo Domínguez

Dr. Óscar Pulido Cortés

Mg. Edgar Nelson López López

Editor en Jefe:

Ph. D. Witton Becerra Mayorga

Coordinadora Editorial:

Mg. Andrea María Numpaque Acosta

Corrección de Estilo

Nicolás López Blanco

Imprenta.

Búhos Editores Ltda.

Impreso y hecho en Colombia

Printed and made in Colombia

Libro financiado por la Vicerrectoría de Investigación y Extensión - Dirección de Investigaciones de la UPTC. Se permite la reproducción parcial o total, con la autorización expresa de los titulares del derecho de autor. Este libro es registrado en Depósito Legal, según lo establecido en la Ley 44 de 1993, el Decreto 460 de 16 de marzo de 1995, el Decreto 2150 de 1995 y el Decreto 358 de 2000.

Libro resultado de investigación con SGI 3019

Citar este libro / Cite this book

Suárez Aguilar, Z.; Sepúlveda Delgado, O.; Patarroyo Mesa, M.; Canaria Camargo, L. & González Gutiérrez, N. (2022). *Análisis histórico de las necesidades de agua del cultivo de la papa en la región central de Boyacá*. Editorial UPTC.

doi: <https://doi.org/10.19053/9789586606660>

Resumen

Comprender del comportamiento del clima, es de interés en diversos sectores de la producción. En este sentido, el libro presenta resultados de la investigación que tenía como propósito describir la incidencia ejercida por el clima en los requerimientos de agua del cultivo de la papa en la región central de Boyaca. Para esto, se presenta un modelo que relaciona la intensidad, duración y frecuencia de las lluvias (IDF), para describir y predecir el comportamiento de la precipitación, a través del análisis probabilístico de la información registrada en estaciones agroclimatológicas, ubicadas en la cuenca del río de la región, donde predomina el cultivo objeto de estudio. Posteriormente, se determinan requerimientos de agua para el cultivo, del cálculo y relación entre: la evapotranspiración del pasto (ET_o), el coeficiente único (K_c), la evapotranspiración bajo condiciones estándar (ET_c), el coeficiente dual (suma del coeficiente de la evaporación (K_e) y de la transpiración (K_{cb})) y el coeficiente de estrés hídrico. Finalmente, al implementar los modelos anteriores con la caracterización del tubérculo y los registros de una estación agroclimatológica durante 51 años; se describe el comportamiento del clima, los requerimientos de agua en los posibles periodos del cultivo en cada uno de estos años y se identifican las épocas que presentaron condiciones climatológicas favorables o desfavorables. Con esta información y el modelo IDF se pueden establecer periodos de retorno de los eventos críticos de precipitación que incidirán en los calendarios de siembra.

Palabras clave: Hidrología; Evapotranspiración; Agroclimatología; Necesidad de Agua; Modelo matemático; Probabilidad.

Abstract

Understanding the behavior of the climate is of interest in various sectors of production. In this sense, the book presents the results of the research that had the purpose of describing the incidence exerted by the climate on the water requirements of potato cultivation in the central region of Boyacá. For this, a model is presented that relates the intensity, duration and frequency of rains (IDF), to describe and predict the behavior of precipitation, through the probabilistic analysis of the information recorded in agroclimatological stations, located in the basin of the river of the region, where the crop under study predominates. Subsequently, water requirements for the crop are determined, from the calculation and relationship between: the grass evapotranspiration (E_{To}), the single coefficient (K_c), the evapotranspiration under standard conditions (E_{Tc}), the dual coefficient (sum of the coefficient of the evaporation (K_e) and transpiration (K_{cb})) and the water stress coefficient. Finally, by implementing the previous models with the characterization of the tuber and the records of an agroclimatological station for 51 years; the behavior of the climate, the water requirements in the possible periods of the crop in each of these years are described and the times that presented favorable or unfavorable weather conditions are identified. With this information and the IDF model, it is possible to establish return periods for critical precipitation events that will affect planting schedules.

Keywords: Hydrology; Evapotranspiration; Agroclimatology; Need for water; Mathematical model; Probability.

Dedicatoria

A nuestras familias, por darnos el tiempo extra, para la realización de este proyectos donde se conjugan una amplitud de conocimientos matemáticos que tienen fines importantes para el desarrollo de las sociedades. En este caso, pretendemos dar un aporte al estudio del cultivo de la papa de la región de Boyacá.

“La preocupación por el hombre y su destino siempre debe ser el interés primordial de todo esfuerzo técnico. Nunca olvides esto entre tus diagramas y ecuaciones”.

Albert Einstein

Agradecimientos

Los investigadores del grupo de Álgebra y Análisis adscrito a la Escuela de Matemáticas y Estadística de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC) agradecen a la Dirección de Investigaciones de la UPTC, por la gestión y apoyo con los recursos que permitieron el desarrollo del proyecto, que cimentó el presente libro

Al doctor Serafín Bautista, profesor de la Universidad Nacional de Colombia, por las capacitaciones, sugerencias y observaciones en el desarrollo del seminario sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas dinámicos y caos, que contribuyeron al desarrollo del marco teórico del proyecto.

Al señor Nestor A. González C, técnico operativo de la estación climatológica de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Facultad de Ciencias Agrarias, Escuela de Agronomía, por el suministro de la información climatológica para el desarrollo del proyecto.

Al Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales de Colombia, IDEAM de la ciudad de Bogotá, por permitirnos visitar y conocer sus instalaciones y equipos para el registro, suministro de información climatológica y las técnicas matemáticas utilizados en el pronóstico del clima.

Índice general

Agradecimientos	v
Prólogo	x
Introducción	xiii
1. Curvas intensidad duración y frecuencia (IDF)	1
1.1. Terminología	1
1.2. Metodología	20
1.3. Análisis de las frecuencias de la precipitación	22
1.4. Funciones de probabilidad en hidrología	22
1.4.1. Normal	22
1.4.2. Lognormal	23
1.4.3. Pearson III o Gamma de tres parámetros	24
1.4.4. Gumbel	25
1.5. Pruebas de homogeneidad y ajuste	25
1.5.1. Prueba de homogeneidad estándar (SNHT)	25
1.5.2. Método del error cuadrático mínimo	27
1.5.3. Prueba de ji cuadrada χ^2	34
1.5.4. Prueba de Kolmogorov-Smirnov	37
1.5.5. Eficiencia de Nash-Sutcliffe	38
1.6. Selección de la función de distribución	40
1.7. Cálculo de las curvas IDF, estación ECFAT.	41
1.7.1. Ecuación de intensidad	44

1.7.2.	Intensidades de lluvia	44
1.8.	Cálculo de las curvas IDF, estación Chíquiza	52
1.9.	Cálculo de las curvas IDF, estación El Encanto	60
1.10.	Cálculo de las curvas IDF, estación Cómbita	67
2.	Evapotranspiración de los cultivos	72
2.1.	Evapotranspiración (ET)	72
2.2.	Factores que afectan la ET	76
2.3.	Necesidad de agua del cultivo	78
2.4.	Modelos matemáticos	78
2.4.1.	Factor de conversión del viento, la altura (u_2)	80
2.4.2.	Calor latente de vaporización (λ)	80
2.4.3.	Presión atmosférica (P)	81
2.4.4.	Densidad atmosférica (ρ)	82
2.4.5.	Presión de vapor de saturación a la temperatura del aire ($e^\circ(T)$)	83
2.4.6.	Presión de saturación a la temperatura mínima media del aire (e_s)	84
2.4.7.	Presión real de vapor (e_a)	85
2.4.8.	Pendiente de la curva de presión de vapor (Δ)	86
2.4.9.	Constante psicrométrica (γ)	87
2.4.10.	Temperatura del punto de rocío (T_{rocio})	87
2.4.11.	Radiación extraterrestre (R_a)	88
2.4.12.	Radiación solar (R_s)	90
2.4.13.	Radiación de onda corta en un día despejado (R_{so})	91
2.4.14.	Radiación neta solar	91
2.4.15.	Radiación neta de onda larga (R_{nl})	92
2.4.16.	Radiación neta (R_n)	93
2.5.	Evapotranspiración, cultivo de referencia	94
2.5.1.	Ecuación de Penman-Monteith	95
2.5.2.	Cálculo de la ET_o	96

3. Evapotranspiración bajo condiciones estándar (ET_c)	101
3.1. El coeficiente único del cultivo (K_c)	102
3.1.1. Factores que determinan el K_c	103
3.1.2. Etapas del crecimiento del cultivo	105
3.1.3. Gráficas del K_c	109
3.1.4. Cálculo del K_c	111
4. Coeficiente dual del cultivo	131
4.1. Componente de la transpiración	133
4.1.1. Coeficiente basal del cultivo K_{cb}	133
4.2. Componente de la evaporación $K_e \cdot ET_o$	135
4.2.1. Límite superior $K_c máx$	138
4.2.2. Coeficiente de reducción de la evaporación K_r	139
4.2.3. Fracción expuesta y humedecida f_{ew}	142
4.2.4. Cálculo diario de K_e	147
4.3. Cálculo de ET_c	152
5. La ET_c bajo condiciones de estrés hídrico	161
5.1. Disponibilidad de agua en el suelo	163
6. Resultados	182
6.1. Recolección de información	182
6.2. Parámetros del cultivo	182
6.3. Procesamiento	183
6.4. Simulaciones	186
6.4.1. Año 2013	186
6.4.2. Análisis de estrés hídrico del cultivo de la papa en el período 1969 a 2019	221
7. Conclusiones	259
Bibliografía	262
A. Lista de Símbolos	276

Índice de figuras	280
Índice de tablas	280
A. Anexos	281
A.1. Programas	281
A.1.1. Programa 1. Cálculo del error cuadrático mínimo	281
A.1.2. Programa 2. Prueba ji cuadrado	284
A.1.3. Programa 3. Cálculo de ji cuadrado	287
A.1.4. Programa 4. Prueba de Kolmogorov Smirnov . .	288
A.2. Resultados de la Regresión. Estación ECFAT	290
A.3. Resultados de la Regresión. Estación Chíquiza	297
A.4. Unidades de medida y símbolos	303

Prólogo

Teniendo en cuenta que en Colombia y concretamente en la región central de Boyacá, los sectores agrícola y ganadero impactan altamente en la economía de sus habitantes y que entre los productos representativos está el cultivo de la papa y el pasto, es pertinente que desde las Universidades se enfoquen proyectos de investigación que aporten soluciones a los problemas que se presentan en estos sectores.

Con el propósito de atender este requerimiento, surgió el proyecto de formular y validar modelos matemáticos para estimar requerimientos de agua en cultivos de la región central de Boyacá, financiado por la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia a través de la Dirección de Investigaciones en las convocatorias para el fomento de la investigación y desarrollado por el grupo de álgebra y análisis de la facultad de ciencias de la Escuela de Matemáticas y Estadística.

El desarrollo del proyecto se inició con la revisión de investigaciones relacionadas, donde se concluyó que estimar los requerimientos de agua de los cultivos es complejo, debido a la cantidad de factores que inciden y su comportamiento variable, tales como el clima, las épocas del año y las características del cultivo, entre otras. Por tanto, la investigación debe ser localizada y con fundamento teórico consolidado por la comunidad académica y científica.

Al respecto, una variable fundamental en el desarrollo de los cultivos es la precipitación, caracterizada por su dinámica, pues si bien es cierto que para el caso de la región central de Boyacá se han

establecido algunas épocas de lluvia y períodos secos, en las últimas décadas se evidencia la alteración de estos ciclos como consecuencia del cambio climático que afronta el planeta.

El comportamiento de la precipitación se analizó en una fase inicial a través de experimentos numéricos con métodos de ajuste e interpolación. Sin embargo, como este fenómeno no es un sistema determinístico, para estimar la probabilidad de ocurrencia de la intensidad, duración y frecuencia de eventos de lluvia (modelos IDF), se procedió a diseñar y formular modelos matemáticos, fundamentados en la aplicación de funciones y distribuciones de probabilidad y la aplicación de regresión logarítmica y exponencial.

Posteriormente se analizaron los requerimientos de agua del cultivo de pasto que se asume como de referencia, en este cultivo inciden principalmente dos fenómenos: la evaporación, que se determina por las variables climáticas y la transpiración que depende de la fisiología del cultivo, de las etapas de su desarrollo y del comportamiento del clima. Estos dos fenómenos se relacionan en uno solo denominado la evapotranspiración del cultivo de referencia el cual se calculó diariamente y se nota como ET_o .

Estimada la ET_o , se halló el coeficiente único del cultivo de la papa variedad parda pastusa, notado como K_c y con este coeficiente se calculó la evapotranspiración del cultivo en condiciones estándar ET_c con el modelo: $ET_c = K_c \cdot ET_o$.

Luego se obtuvo el coeficiente dual del cultivo mediante el modelo $K_c = K_{cb} + K_e$, el cual discrimina tanto la componente de la transpiración $K_{cb} \cdot ET_o$, como la componente de la evaporación $K_e \cdot ET_o$. Finalmente, con estos dos coeficientes se calculó el balance diario de la humedad del suelo y de la zona radicular de la planta y se determinó el requerimiento de agua que experimenta la planta a través de la evapotranspiración del cultivo ET_c bajo estrés hídrico durante todo su ciclo de vida.

Los procedimientos de cálculo mencionados, se diseñaron e implementaron computacionalmente, se procesaron con la información suministrada por la estación agroclimatológica del IDEAM de la zona de estudio desde el año 1969 hasta el 2019 y se simularon en todos los posibles cultivos correspondientes al primer semestre, segundo semestre y anualmente, durante todo el periodo de estudio. De esta manera se determinaron las condiciones climatológicas óptimas y no óptimas para el cultivo.

Con la información de estas condiciones climatológicas, en particular la precipitación, se pueden aplicar los modelos IDF formulados para estimar posibles periodos de retorno en los que se registren eventos de lluvia similares que incidan en el desarrollo del cultivo de la papa y disponer de información para la acertada toma de decisiones.

Los modelos presentados en el libro son una guía y referencia para aplicarlos en diferentes zonas, a otros cultivos, estimar calendarios de siembra, planear el riego y drenaje, y de esta manera contribuir a mejorar la producción agrícola y ganadera.

Introducción

Este libro presenta el resultado del proyecto de investigación titulado, “Modelos matemáticos para estimar necesidades de agua en cultivos de la región central de Boyacá”, financiado por la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, UPTC, en la convocatoria para el fortalecimiento de la investigación.

El propósito del proyecto fue analizar, diseñar, simular y depurar modelos matemáticos para determinar requerimientos de agua del cultivo de la papa, variedad parda pastusa, en la zona centro del departamento de Boyacá con información hidrometeorológica de acceso público, suministrada por el Instituto de Meteorología, Hidrología y Estudios Ambientales, IDEAM de las estaciones agroclimatológicas ubicadas en los municipios de Tunja, Chíquiza, Oicatá y Cómbita.

Los resultados de esta investigación son importantes y fundamentales para aplicar riego o drenaje a cultivos, establecer calendarios de siembra, analizar el impacto del cambio climático y la degradación de los suelos, investigar sobre el comportamiento de las variables meteorológicas que inciden en los cultivos, entre otras.

Respecto al desarrollo de la investigación, en el primer capítulo del libro se presenta el análisis, diseño y formulación de modelos matemáticos para describir y predecir la intensidad, duración y frecuencia de la precipitación según información de las estaciones agroclimatológicas mencionadas. Estos modelos se utilizan para estimar calendarios óptimos para los cultivos.

El segundo capítulo corresponde al estudio y análisis de los fenómenos de evapotranspiración y transpiración de las plantas. En particular, se presenta el resultado del cálculo diario de la evapotranspiración del cultivo de pasto o hipotético de referencia (similar a una superficie extensa de pasto verde, bien regada, de altura uniforme, creciendo activamente y dando sombra totalmente al suelo) que se nota como ET_o . Esta evapotranspiración es un parámetro relacionado con el clima que expresa el poder evaporante de la atmósfera en una localidad y en un época específica del año, y no considera ni las características del cultivo ni los factores del suelo. Por tanto, ésta se calculó con la información que registró y suministró la estación climatológica de la Escuela de Agronomía de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, que denominaremos ECFAT y la aplicación del modelo matemático Penman-Monteith que desarrolló la Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO).

La evapotranspiración del cultivo bajo condiciones estándar, notado como ET_c corresponde a cultivos que se desarrollen en campos extensos, bajo condiciones agronómicas excelentes y sin limitaciones de humedad, será diferente de la ET_o en la medida en que sus características de cobertura del suelo, propiedades de la vegetación y resistencia aerodinámica difieran de las correspondientes a las del pasto. Los efectos de las características que distinguen un cultivo del pasto se incorporan en el coeficiente único del cultivo K_c o separadas en dos coeficientes: un coeficiente para la transpiración del cultivo y otro de evaporación del suelo.

En el tercer capítulo se presenta el cálculo de la evapotranspiración del cultivo de la papa bajo condiciones estándar, ET_c , que significa el valor límite máximo de evapotranspiración del cultivo al asumir que no se presentan obstáculos para el crecimiento de la planta por densidad del cultivo, enfermedades, malezas, insectos

o excesiva salinidad, entre otros factores.

En el cuarto capítulo se describe el procedimiento para calcular el coeficiente único del cultivo de la papa, notado como K_c , resultado de la suma de los coeficientes de evaporación notado como K_e y el de transpiración o basal notado K_{cb} . Estos dos coeficientes se necesitan para determinar requerimientos de agua tanto de la capa evaporativa como de la zona radicular.

El quinto capítulo corresponde al estudio de situaciones cuando las condiciones del campo difieren de las estándar y por tanto se deben realizar correcciones al valor de la ET_c . El análisis se centra en los factores ambientales que inciden en la dificultad para suministrar niveles de humedad óptimos en la zona radicular de la planta y que pueden generar un crecimiento deficiente y una reducción de la evapotranspiración. Esta información se describe a través del coeficiente de estrés hídrico y el ajuste del coeficiente K_c a las condiciones de campo, parámetros necesarios para inferir los requerimientos de agua para el cultivo.

En el capítulo sexto se presentan resultados de la implementación de los modelos descritos en los capítulos anteriores en un software y del procesamiento con información de las características del cultivo de la papa y de las variables climatológicas registrada en la estación de la UPTC para determinar: la ET_o diaria durante un año; la ET_c del cultivo de la papa obtenida por los métodos tanto del coeficiente único del cultivo K_c como del coeficiente dual ($K_{cb} + K_e$); y la evapotranspiración del cultivo bajo condiciones de estrés hídrico.

Finalmente, se simuló los posibles cultivos de papa en el primer semestre, segundo semestre y cosecha única en el año, en el período comprendido entre 1969 a 2019 y de éstos se estimaron los periodos de cultivo que presentaron los valores mínimo y máximo de estrés hídrico. Con estos resultados se identificaron los años y períodos con condiciones climatológicas más favorables y menos favorables que

inciden en los requerimientos de agua para el cultivo de la papa. La información que se genera es importante para realizar investigaciones que requieran aplicar los modelos IDF a estos periodos críticos y conjeturar sobre los periodos de retorno en que se vuelvan a presentar estas condiciones climatológicas para la toma de decisiones.

1. Curvas intensidad duración y frecuencia (IDF)

El presente capítulo introduce algunos elementos teóricos básicos que orientan los capítulos siguientes. Además, se presentan las etapas para formular y aplicar un modelo matemático que relaciona la intensidad, duración y frecuencia de las lluvias, notado como IDF.

1.1 Terminología

Distribución de probabilidad. Sea X una variable aleatoria descrita por una distribución de probabilidad, la cual determina la posibilidad de que una observación x de dicha variable aleatoria, pertenezca a un rango preestablecido de X . Por ejemplo, sea X la variable aleatoria que representa la precipitación anual, para nuestro caso de la región central de Boyacá, luego la distribución de probabilidad de X expresa la posibilidad de que la precipitación anual observada en un año específico, esté dentro de un rango dado, por ejemplo entre 100 mm y 200 mm o menor que 100 mm o mayor que 200 mm .

Muestra. Es un conjunto de observaciones x_1, x_2, \dots, x_n de una variable aleatoria X .

Espacio muestral. Es el conjunto formado por todas las muestras posibles extraídas de una población. Un evento es un subconjunto del espacio muestral.

La probabilidad de ocurrencia de un evento. Se nota como $P(A)$, se define como la posibilidad de que este ocurra cada vez que se lleve a cabo una observación de la variable aleatoria. Si una muestra de n observaciones posee n_A valores en el rango del evento A , entonces la frecuencia relativa es n_A/n . La frecuencia relativa se constituye en un estimado, progresivamente mejor, de la probabilidad de ocurrencia del evento a medida que el tamaño de la muestra se aumenta, esto se expresa por la ecuación (1.1), (Aparicio, 1997).

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (1.1)$$

Precipitación. Es la cantidad de agua medida en milímetros o litros que cae por unidad de superficie. La altura de la lámina de agua recogida en una superficie plana es medida en mm que es equivalente a litros sobre metro cuadrado (l/m^2). Un milímetro de agua de lluvia equivale a un litro de agua por metro cuadrado, por ejemplo si la lectura de precipitación es de $12\ mm$, significa que si toda el agua de la lluvia se acumulara en un terrero acotado por un metro cuadrado de superficie sin escurrirse ni evaporarse, la altura de la capa de agua sería de $12\ mm$. Para medir la precipitación se utilizan los pluviómetros o pluviógrafos.

Axiomas de la teoría de la Probabilidad. Las leyes más simples de probabilidad expresan las condiciones bajo las cuales un evento de interés ocurre o no ocurre con certeza. Estas condiciones se expresan como:

- a) Si se presenta un conjunto de condiciones C , entonces el evento A , seguramente ocurre.

- b) Si se presentan un conjunto de condiciones C , entonces el evento A no puede ocurrir.

En el primer caso, A es un evento seguro con respecto a las condiciones C y en el segundo es un evento imposible.

Cuando un evento A , en presencia de un conjunto de condiciones C , a veces ocurre y a veces no, se denomina aleatorio con respecto al conjunto C , en este caso se supone que no se han tenido en cuenta todas las condiciones del conjunto C para la ocurrencia o no el evento y no como la inexistencia de una ley física que genere o no dicha ocurrencia. Esas condiciones o leyes que no se incluyen en el análisis del evento A se suplen por una ley de probabilidades, que indica con qué frecuencia se presenta el evento dada las condiciones C .

Ejemplo 1 *El volumen mensual de escurrimiento de una sección dada de un río. Al aforar la corriente del río un número finito de meses, se observa que el volumen mensual de escurrimiento en algunas ocasiones es mayor que 400000 m^3 o en otras es menor. Si se pretende aprovechar el caudal del río, por ejemplo para riego, sin hacer presa, la información de la variación del volumen del escurrimiento resulta muy imprecisa. Por otra parte, la determinación precisa de los volúmenes mensuales de escurrimiento presentada durante los U años (siendo U la vida útil de la obra de captación), debería involucrar el análisis de un conjunto de condiciones desde las meteorológicas hasta los cambios que se presentan en la cuenca de aportaciones, convirtiéndose en un proceso complicado o para el cual no se disponen de las herramientas adecuadas.*

Una alternativa es establecer un rango en la variación del caudal, según las observaciones realizadas en los n meses y proporcionar información para el proyecto del tipo de la expresión

(1.2), donde V es el volumen de escurrimiento mensual en m^3 .

$$35000 \leq V \leq 1000000 \quad (1.2)$$

Aunque la desigualdad (1.2), proporciona mayor información al proyecto que la variación algunas veces mayor o menor que $400000 m^3$, es de poca utilidad para el proyecto. Una información un tanto más valiosa es si se dice que en aproximadamente el 50% de los meses el volumen es mayor que $400000 m^3$; una información más precisa de los escurrimientos del río sería representar para cualquier volumen V , el porcentaje $v(V)$ de los meses en que han escurrido no menos de $V m^3$ en el período de datos, ver Figura 1.1. Si el número de meses

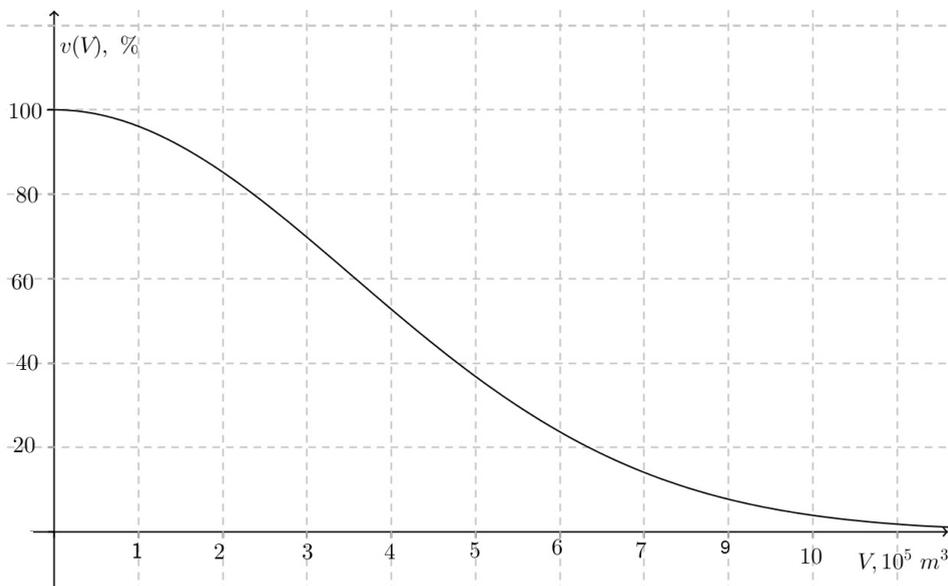


Figura 1.1 Porcentaje $v(V)$

de observación con cuyos datos se ha formado la Figura 1.1 es grande (por ejemplo, 1000) es razonable suponer que durante la vida útil de la obra (que podría ser 700 meses) el escurrimiento en el río tendría un comportamiento similar al de la Figura 1.1, aunque a menos que la muestra sea infinita, nunca será igual.

Esto significa que, por más grande que sea la muestra, siempre existirá la probabilidad (que disminuye conforme aumenta el tamaño de la muestra) de que el volumen en un mes cualquiera sea mayor que $10 \times 10^5 \text{ m}^3$ o menor que $0.35 \times 10^5 \text{ m}^3$. Por tanto, la Figura 1.1 es solo una aproximación a la ley de probabilidades que suple las condiciones C , por las cuales el volumen mensual de escurrimiento toma un valor dado v ; dicha aproximación estará más cercana a esta ley a medida que el tamaño de la muestra es mayor.

Primer axioma. Sea n_r el número de pruebas en la r -ésima serie y μ_r el número de pruebas en esta serie en que ocurre un cierto evento A . Se define la frecuencia v_r del evento A al cociente expresado en la fórmula (1.3).

$$v_r = \frac{\mu_r}{n_r} \quad (1.3)$$

Si v_r es la misma para cualquier r , se dice que el evento A ocurre con una probabilidad p , definida por la fórmula (1.4)

$$p = P(A) \equiv v_r \quad (1.4)$$

Como $0 \leq \mu_r \leq n_r$, se deduce que $0 \leq v_r \leq 1$. De esta manera, se extiende la idea de frecuencia relativa v_r a probabilidad y se establece el primer axioma de la teoría de la probabilidad, descrito en la expresión (1.5).

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (1.5)$$

Segundo axioma. Cuando para un evento E , ocurre que $\mu_r = n_r$, se dice que el evento E es seguro y por tanto se cumple la ecuación (1.6), que constituye el segundo axioma de la teoría de la probabilidad.

$$P(E) = 1 \quad (1.6)$$

Para que un evento sea seguro debe incluir todos los posibles casos o resultados del experimento (espacio muestral). Para el caso del Ejemplo 1, el evento seguro está dado por la expresión (1.7).

$$E : 0 \leq V < \infty \quad (1.7)$$

Una consecuencia de este axioma es que la probabilidad que no se presente ninguno de los casos posibles del espacio muestral es nula. Para el caso del Ejemplo 1, $P(V < 0) = 0$.

Tercer axioma. Se afirma que dos eventos A y B son mutuamente excluyentes cuando no pueden ocurrir simultáneamente. Para el Ejemplo 1, los siguientes eventos son mutuamente excluyentes,

$$A : V > 500000 \text{ m}^3 \text{ y } B : V < 10000 \text{ m}^3.$$

Si la frecuencia del evento A es v_A y frecuencia del evento B es v_B , entonces la frecuencia de la unión de los dos eventos, $C = A \cup B$, es $v_C = v_A + v_B$. Por tanto, para eventos mutuamente excluyentes, se tiene el tercer axioma de la teoría de probabilidad, representado en la ecuación (1.8).

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (1.8)$$

La ley de probabilidades que describe el comportamiento estadístico de una variable aleatoria, en el Ejemplo 1 es el escurrimiento mensual, se puede representar de varias maneras, entre las que se mencionan las más utilizadas: la función de probabilidad discreta, la función de distribución de probabilidad acumulada, la función de densidad de probabilidad y la función de distribución de probabilidad; que a continuación se describen.

Funciones de probabilidad. Por estándar se denotan con letras mayúsculas las variables aleatorias y en minúsculas los valores que toman dichas variables. Además, se notará con mayúsculas a las funciones de distribución o acumuladas y con minúsculas a las funciones de masa o densidad.

Funciones discretas de probabilidad. Cuando el número de valores x que puede tomar una variable aleatoria X es finito, se afirma que X es una variable aleatoria discreta.

Ejemplo 2 Lanzamiento simultáneo de dos dados. Se considera en el experimento de lanzar dos dados, la variable aleatoria X se define como: $X = D_1 + D_2$, donde D_1 y D_2 son los puntos obtenidos del primero y segundo dado respectivamente, el espacio muestral es el representado en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1 Espacio muestral del experimento de lanzar dos dados

1+1=2	2+1=3	3+1=4	4+1=5	5+1=6	6+1=7
1+2=3	2+2=4	3+2=5	4+2=6	5+2=7	6+2=8
1+3=4	2+3=5	3+3=6	4+3=7	5+3=8	6+3=9
1+4=5	2+4=6	3+4=7	4+4=8	5+4=9	6+4=10
1+5=6	2+5=7	3+5=8	4+5=9	5+5=10	6+5=11
1+6=7	2+6=8	3+6=9	4+6=10	5+6=11	6+6=12

En este caso, el número total de resultados posibles del experimento es de 36 y el número n de valores que puede tomar la variable aleatoria X es 11 ($x = 2, 3, \dots, 12$). La probabilidad asociada a cada uno de los n posibles valores de X se representa en la Tabla 1.2 y en forma gráfica en la Figura 1.2. Una función como la mostrada en la Figura 1.2 se denomina “función masa de probabilidad discreta” si se refiere a la población o “histograma de frecuencias relativas” si se refiere a una muestra y describe el comportamiento de la

variable aleatoria X . Este comportamiento también puede describirse en términos de las variables acumuladas mediante la función (1.9)

$$G(x) = P(X \leq x) \quad (1.9)$$

y se lee como “la probabilidad que la variable aleatoria X tome un valor menor o igual que x ”. En este caso, dado que la variable aleatoria X es discreta, se representa mediante la expresión (1.10)

$$G(x) = \sum_{\forall x_i \leq X} P(X \leq x_i). \quad (1.10)$$

Tabla 1.2 Probabilidad de los posibles valores de X

$x = \text{Valor de } X$	Resultados favorables	Probabilidad $g(x) = P(X = x)$
2	1	1/36
3	2	2/36=1/18
4	3	3/36=1/12
5	4	4/36=1/9
6	5	5/36
7	6	6/36=1/6
8	5	5/36
9	4	4/36=1/9
10	3	3/36=1/12
11	2	2/36=1/18
12	1	1/36

La función $G(x)$ se representa en la Figura 1.3.

Funciones continuas de Probabilidad. Cuando el número n de valores que puede tomar una variable aleatoria X es infinito, como en el caso del Ejemplo 1, se dice que la variable aleatoria es continua.

Es posible deducir la forma equivalente a la función de la Figura

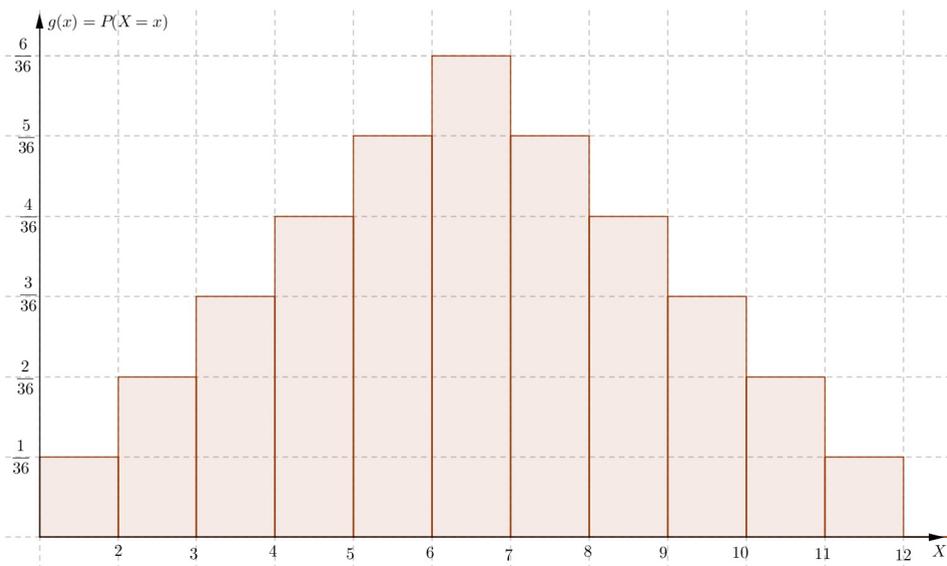


Figura 1.2 Función masa de probabilidad discreta

1.2 para variables aleatorias continuas, al asumir en el Ejemplo 2 los dados con un número de caras muy grande, tendiendo a infinito, la función tendría un aspecto como el de la Figura 1.4. Una función como esta se denomina función de densidad de probabilidad. Es de anotar que, al contrario de una función de masa de probabilidad discreta, cuando una variable aleatoria es continua, la probabilidad que esta tome un valor exacto es siempre nula, que se representa por la expresión (1.11)

$$P(X = x) = 0. \quad (1.11)$$

Solo es posible hablar de probabilidades diferentes de cero para intervalos finitos como la expresión (1.12), donde (x_0, x_1) es el intervalo de definición de la variable aleatoria X ,

$$P(a \leq X \leq b) \neq 0, \quad a < b, \quad a > x_0, \quad b < x_1. \quad (1.12)$$

Mediante argumentos similares, una gráfica equivalente a la función de probabilidad acumulada del Ejemplo 2, pero para una variable

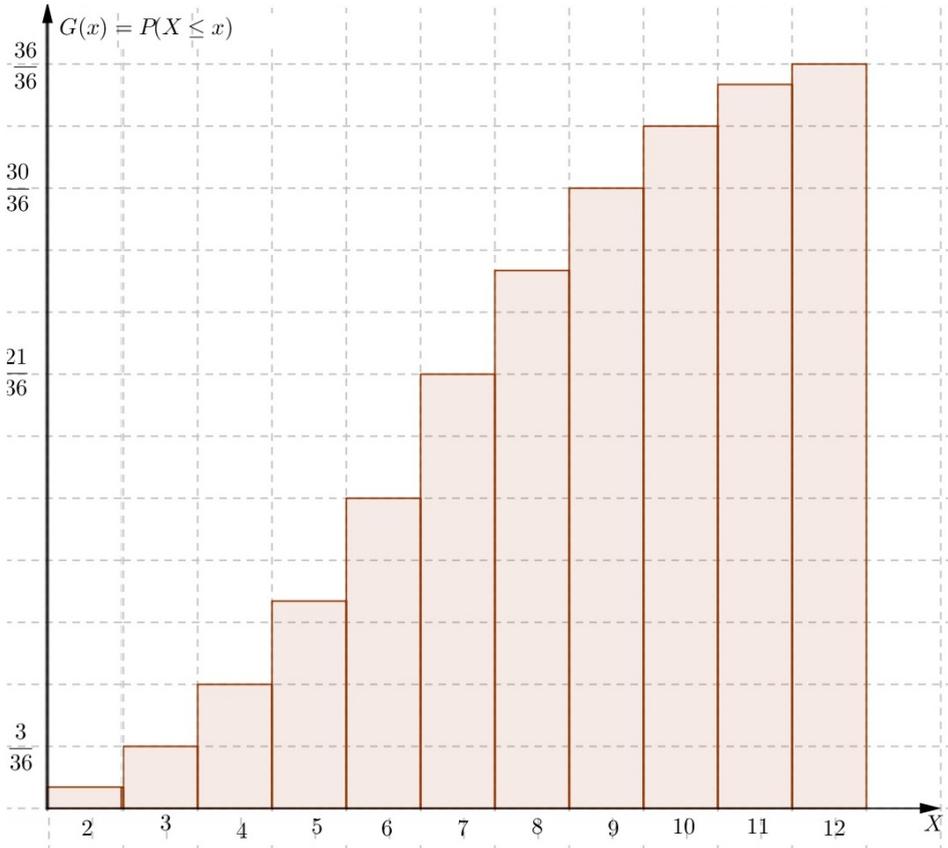


Figura 1.3 Función de probabilidades acumuladas

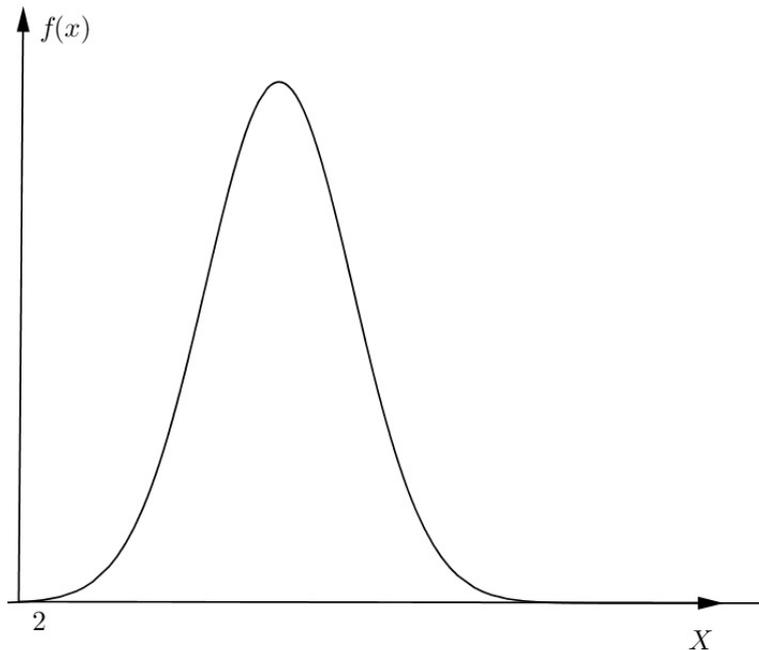


Figura 1.4 Función de densidad de probabilidad

aleatoria continua, tiene forma como la de la Figura 1.5.

En este caso, como en la ecuación (1.10), la función se representa por la ecuación (1.13)

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (1.13)$$

y en términos de la función de densidad de probabilidad $f(x)$, mediante la ecuación (1.14)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (1.14)$$

obviamente, se cumple también la ecuación (1.15).

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (1.15)$$

Es de anotar, que de acuerdo con los dos axiomas de la probabilidad