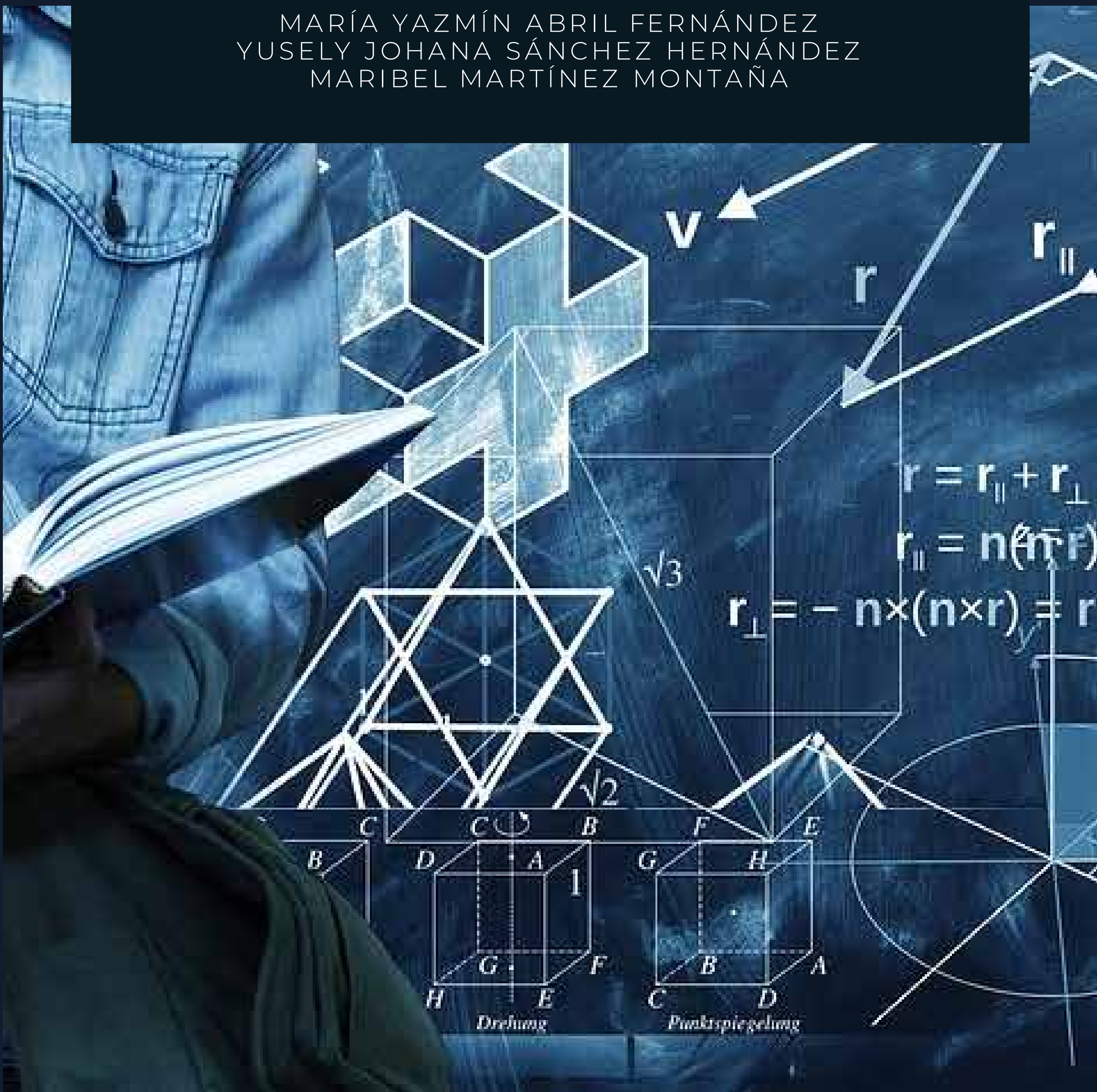
MATEMÁTICAS DISCRETAS

UN ENFOQUE DESDE LA INGENIERÍA Y CIENCIAS SOCIALES

CONCEPTOS BÁSICOS

MARÍA YAZMÍN ABRIL FERNÁNDEZ
YUSELY JOHANA SÁNCHEZ HERNÁNDEZ
MARIBEL MARTÍNEZ MONTAÑA



MATEMÁTICAS DISCRETAS

ENFOQUE DESDE LA INGENIERÍA Y CIENCIAS SOCIALES

CONCEPTOS BÁSICOS

María Yazmín Abril Fernández
Yusely Johana Sánchez Hernández
Maribel Martínez Montaña

Matemáticas Discretas: Con un enfoque desde la ingeniería y ciencias sociales - Conceptos básicos / Discrete Mathematics: With a focus from engineering and social sciences - Basic concepts /Abril Fernández, María Yazmín; Sánchez Hernández, Yusely Johana; Martínez Montaña, Maribel. Tunja: Editorial UPTC, 2022. 100 p.

ISBN (impreso) 978-958-660-709-4
ISBN (ePub) 978-958-660-710-0

Incluye referencias bibliográficas

1. Probabilidad. 2. Python. 3. Combinatoria. 4. Permutación. 5. Conteo. 6. Tuplas.

(Dewey 519/21) (Thema PBD - Matemáticas discretas)

Primera Edición, 2022
50 ejemplares (impresos)
Matemáticas Discretas: Con un enfoque desde la ingeniería y ciencias sociales - Conceptos básicos
Discrete Mathematics: With a focus from engineering and social sciences - Basic concepts
ISBN (impreso) 978-958-660-709-4
ISBN (ePub) 978-958-660-710-0
Colección Académica UPTC N.º 55
Proceso de arbitraje doble ciego
Recepción: agosto de 2022
Aprobación: noviembre de 2022

Editorial UPTC
Edificio Administrativo – Piso 4
La Colina, Bloque 7, Casa 5
Avenida Central del Norte 39-115, Tunja, Boyacá
comite.editorial@uptc.edu.co
www.uptc.edu.co

Editorial JOTAMAR S.A.S.
Calle 57 No. 3 - 39.
Tunja - Boyacá - Colombia.

Libro financiado por la Vicerrectoría de Investigación y Extensión - Dirección de Investigaciones de la UPTC, Grupo de Investigación en Ingeniería Civil y Ambiental GICA con recursos propios del grupo de investigación.

Impreso y hecho en Colombia - Printed and made in Colombia

Citar este libro / Cite this book
Abril Fernández, M.Y., Sánchez Hernández, Y. & Martínez Montaña, M. (2022). *Matemáticas Discretas: Con un enfoque desde la ingeniería y ciencias sociales - Conceptos básicos*. Editorial UPTC.
doi: https://doi.org/10.19053/9789586607094

RESUMEN

El propósito de *Matemáticas discretas con un enfoque desde la ingeniería y ciencias sociales – conceptos básicos* (administración), orienta los contenidos a la aplicación y análisis de datos, estudio de diagramas de Venn, operaciones con conjuntos, álgebra de conjuntos, relaciones, presentación gráfica de las relaciones, técnicas de conteo, permutaciones, combinaciones, recurrencia y probabilidad. Esta obra inicia con una corta introducción y conceptos esenciales de combinatoria e ilustraciones; seguido del desarrollo de la teoría de la probabilidad básica las estructuras; proporciona nociones de la teoría de grafos e ilustraciones relacionadas con gráficos sociales y sus propiedades. Adicionalmente, presenta algoritmos con lenguaje de programación Python y ejemplos aplicados a las áreas de ingeniería y administración, como apoyo al proceso de aprendizaje y apropiación del conocimiento. Nuestros lectores objetivo, son estudiantes de cursos de introducción a las matemáticas discretas, interesados en asumir desafíos y fortalecer procesos de resolución de problemáticas, especialmente, situaciones de lógica e ingenio, para identificar y establecer soluciones desde cero, a paradigmas complejos con pensamiento estructurado, lógico y creativo, elementos necesarios en la generación de emprendimientos en las áreas administrativas, estructuración de proyectos y obras en la ingeniería.

Palabras clave: Probabilidad; Python; Combinatoria; Permutación; Conteo; Tuplas.

ABSTRACT

The purpose of *Discrete Mathematics With An Approach From Engineering And Social Sciences* (administration), guides the contents to discrete mathematics to the application and analysis of data, study of Venn diagrams, operations with sets, algebra of sets, relationships, presentation graphing relationships, counting techniques, permutations, combinations, counting techniques, recurrence, and probability. It begins with a short introduction and basic concepts of combinatorics and illustrations followed by the development of the basic probability theory of structures, while notions of graph theory and illustrations of social graphs and their properties are provided. Additionally, it presents algorithms with the Python programming language and examples applied to the areas of engineering and administration, as support for the learning process and appropriation of knowledge. Our target readers are students of introductory courses in discrete mathematics, interested in taking on challenges and strengthening problem-solving processes, especially situations of logic and ingenuity, identifying and establishing solutions from scratch to complex paradigms with structured, logical, and creative thinking. necessary in the generation of enterprises in the administrative areas, project structuring and engineering works.

Keywords: Probability; Python; Combinatorics; Permutation; Count; Tuples.

TABLA DE CONTENIDO

PRÓLOGO

El propósito de *Matemáticas discretas con un enfoque desde la ingeniería y ciencias sociales - conceptos básicos*, centra los contenidos para el análisis de datos. Haciéndose provechoso detallar el estudio diagramas de Venn, operaciones con conjuntos, álgebra de conjuntos, relaciones, presentación gráfica de las relaciones, permutaciones, combinaciones, técnicas de conteo, recurrencia y probabilidad. Este libro abarca postulados y nociones con un enfoque desde la ingeniería y la administración. De tal manera, que, se facilite el proceso de aprendizaje. ¿Por qué un libro "matemáticas discretas" con este enfoque? Consideramos que, este texto puede proporcionar significaciones básicas y una aproximación a una variedad de aplicaciones en las áreas de conocimiento seleccionadas para esta edición.

En algunos capítulos, el lector encontrará fragmentos de código Python ¿Por qué Python, y no otro lenguaje de programación?, pensamos que puede ser una herramienta que facilite el proceso de aprendizaje y apropiación, al considerarse de fácil manejo, especialmente por su sintaxis sencilla; este puede ser usado en variados campos al considerarse un lenguaje de programación versátil y útil en la visualización de ideas en las matemáticas discretas, de tal manera, que, los pequeños desafíos de programación, ayudarán al estudiante a solidificar su comprensión y capacidad de solucionar problemas; particularmente, situaciones de lógica e ingenio; identificando y estableciendo soluciones desde cero, a paradigmas complejos con pensamiento estructurado, lógico y creativo, elementos necesarios en la generación de emprendimientos en las áreas administrativa y de estructuración de proyectos; así como de obras en la ingeniería. Del mismo modo, el aprendizaje basado en la solución de problemas propuestos en el libro, sigue un enfoque, en el que primero se permite la exploración y posteriormente, se explica cómo resolver los ejercicios, de tal manera, que se llegue al conocimiento con una mejor comprensión de los temas; pues, el simple hecho de intentar resolver los ejercicios, se convierte en el motor que activa la mente y la motiva a curiosear sobre las posibles soluciones dadas a un problema.

Este libro se pensó para un curso de introducción a las matemáticas discretas y primeros años de la educación superior. La exposición de conceptos es sencilla, de fácil comprensión y se complementa con ejercicios que ayudan a contextualizar y facilitar la aplicación en diversas áreas de conocimiento. Adicionalmente, se entrega un texto que no requiere de conocimientos matemáticos profundos. Finalmente, cada capítulo, cuenta con una colección de problemas propuestos, encaminados al afianzamiento de los conceptos desarrollados en el texto.

CAPÍTULO 1
COMBINATORIAS BÁSICAS

CONTENIDO

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

- Usa métodos básicos de combinatoria para contar objetos.
- Aplica operaciones estándar en conjuntos.
- Categoriza problemas combinatorios básicos en configuraciones estándar.
- Aplica métodos combinatorios básicos en la programación.

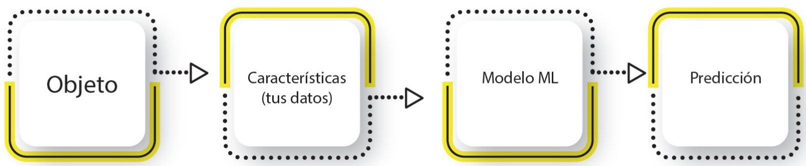
1.1 Técnicas Básicas de Conteo

1.1.1 Por qué contar

> El conteo es una de las tareas más básicas relacionadas con las matemáticas, con el objetivo de decir cuántos objetos tenemos sin contarlos a mano.

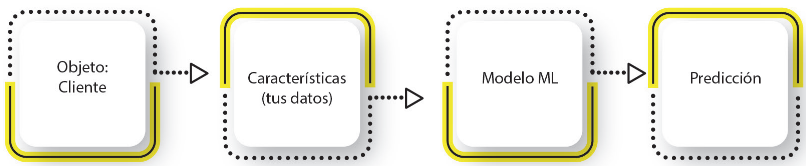
El conteo es la primera tarea que los niños estudian cuando empezamos a aprender matemáticas y en general, la primera tarea matemáticamente relacionada con la humanidad, pero ¿Por qué necesitamos estudiar el conteo? Resulta que, el conteo se usa con frecuencia en todas las ramas de las matemáticas y sus aplicaciones; por ejemplo: necesitamos contar para conocer el número de pasos de algoritmos; los usaremos para contar probabilidades, e incluso para estimar el tamaño de los datos.

Vamos a profundizar en este último ejemplo; para esto, consideremos la siguiente configuración estándar en el análisis de datos.



Pensemos que estamos produciendo algún producto, y nos interesa saber si a los clientes les va a gustar. Así que los "objetos" serán nuestros clientes.

Luego, las características serán algunas de las propiedades de los clientes, así:

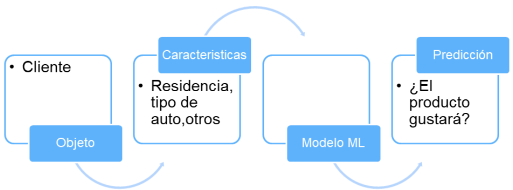


Antes de usar su modelo, es importante explicarlo. ¿Cuántos datos necesita para enseñar un modelo? Resulta que, en muchos modelos, la cantidad de datos que necesita es comparable a la cantidad de todos los objetos diferentes posibles en la configuración de la entidad, por lo tanto, es importante estimar el número de todos los objetos diferentes posibles solo para decir cuántos datos necesitará para enseñar su modelo.

Alimentamos esta información al modelo de aprendizaje automático y este generará una predicción (Figura.1).

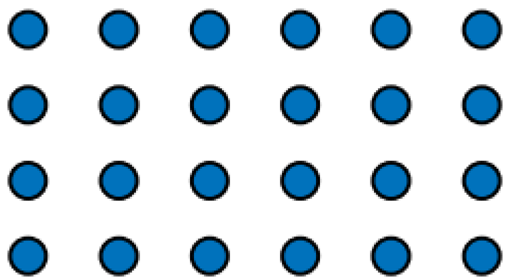
Entonces ¿Por qué necesitamos contar aquí?

Figura 1. *Predicción modelo de aprnedizaje*



Así pues, contar es importante, pero ¿Por qué lo estudiamos? ¿No es una tarea trivial? Resulta que no siempre es una tarea trivial, hay muchas ideas importantes sobre cómo contar; aquí, hay dos ejemplos:

- ¿Puedes decir cuántos círculos azules tienes en esta foto sin contarlos a mano?



- Imaginemos que un país, un estado o una religión, introduce un nuevo formato de matrícula, y aquí hay un ejemplo. En esta matrícula tenemos tres dígitos y tenemos tres letras.

¿Qué tenemos aquí? Tenemos **10 opciones** para cada dígito. Tenemos **12 opciones** para cada letra. El problema, es decir si tendremos suficientes placas para todos.

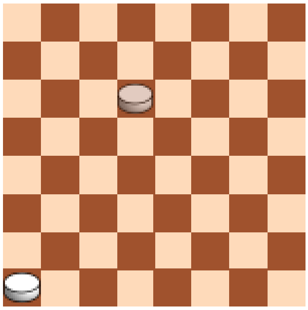
1.1.2 Regla de la suma

- Pensemos que, en sus datos, tiene 7 vídeos de una duración mínima de 10 minutos y 5 vídeos de menos de 10 minutos.

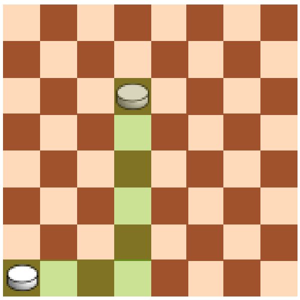
> En la regla de suma, tiene k objetos del primer tipo, y tenemos n objetos del segundo tipo. La regla de suma nos dice que tenemos n + k objetos en total.

La regla de suma nos dice, que en total usted tiene:

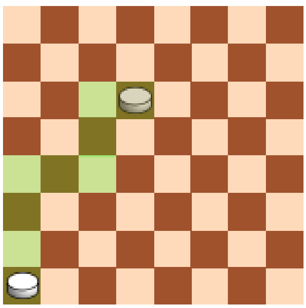
- Aquí hay un ejemplo más elaborado: tenemos un tablero de ajedrez, y hay una pieza en la esquina inferior izquierda, y desea mover la pieza a la posición indicada.



Podemos mover una pieza un paso hacia la derecha o un paso hacia arriba. Entonces, ¿cuántos movimientos necesitamos para mover la pieza? Vamos a intentarlo: Podemos mover la pieza de varias maneras posibles. Por ejemplo, podemos moverla tres pasos hacia la derecha y luego cinco pasos hacia arriba.



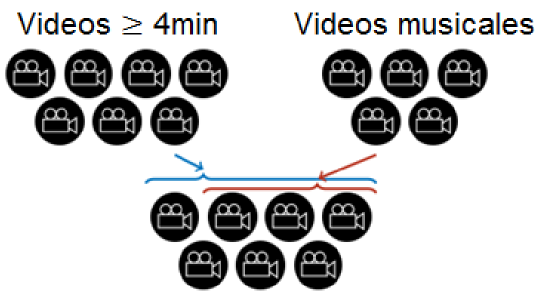
También podemos mover la pieza tres pasos hacia arriba, luego dos pasos hacia la derecha, luego dos pasos hacia arriba, luego un paso más hacia la derecha.



Podemos hacerlo de distintas maneras; cabe resaltar que, en todos los casos, tendremos ocho movimientos, y esto no es una coincidencia, hay que tener en cuenta, que, hay dos tipos de movimientos, hacia la derecha y hacia arriba; para llegar a la cuarta columna, necesitamos tres pasos a la derecha, y para llegar a la sexta fila, necesitamos cinco movimientos hacia arriba, así que, en total, necesitamos 3 + 5= 8, es decir, 8 movimientos.

- Un ejemplo más, en nuestros datos tenemos siete videos de duración de cuatro minutos, y cinco videos musicales. En total, tenemos 12 videos. Resulta que este no es el caso, porque tenemos algunos videos musicales pueden durar más de cuatro minutos.

  Si tenemos siete videos de duración, al menos cuatro minutos, cinco videos musicales; aquí hay un ejemplo: puede suceder que nuestros cinco videos musicales tengan más de cuatro minutos. Entonces, en total, tenemos siete videos. Así que, la regla de la suma no funciona aquí.



- Aquí hay un ejemplo más elaborado, su servicio de video clasifica los videos en varias categorías: música, comedia, jardinería, gatos, etc.

Consideremos que, en sus datos hay siete videos de una categoría y cinco de otra ¿Significa esto que tienes 12 videos en total? No necesariamente, ya que, es posible que las categorías se superpongan; por ejemplo, puede haber videos divertidos con gatos. La regla de suma, nos dice que, si tenemos k objetos del primer tipo y n objetos del segundo tipo, entonces, hay n + k objetos de uno de los dos tipos, con esto, podemos inferir que es importante que ningún objeto debe pertenecer a ambas clases, k objetos de la primera clase, deben ser diferentes de n objetos de la segunda clase.

1.1.3 Idioma conveniente: Conjuntos

El conjunto F = {4, 1, 8, 3}

En este caso, el orden no es importante, ambos conjuntos son iguales.

{4, 1, 8, 3} = {1, 3, 4, 8}

Cabe resaltar que las repeticiones en la lista de elementos tampoco son importantes. Así que, nuevamente tenemos conjuntos iguales.

> Los conjuntos, son un grupo arbitrario de objetos, que se denominan con letras mayúsculas; además de esto podemos dar conjuntos simplemente enumerando todos sus elementos.

{4, 1, 8, 3} = {1, 4, 1, 3, 8, 3}

Para nosotros, los conjuntos proporcionarán un lenguaje conveniente, pero, en matemáticas juegan un papel importante y fundamental. Para nosotros, conjuntos, pueden consistir en cualquier cosa, tales como:

M= {13, $\sqrt{2}$, Frida Kahlo, un gato}

Diagramas de Venn

Una forma conveniente de representar conjuntos, es a través de diagramas de Venn, como lo podemos apreciar a continuación.

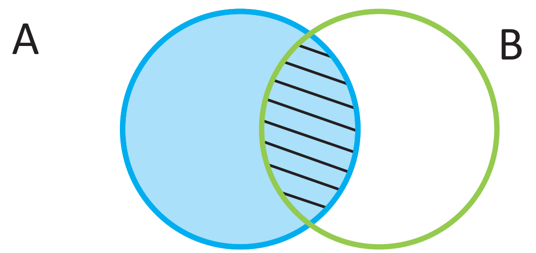


Figura 2. *Diagrama de Venn conjunto A*

Tenemos dos conjuntos, A (a la izquierda) y B (a la derecha), que comparten una intersección la cual corresponde a elementos pertenecientes a ambos conjuntos. Si tenemos dos conjuntos A y B. Luego, por la intersección de A y B, denotamos el conjunto que consta de todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos.

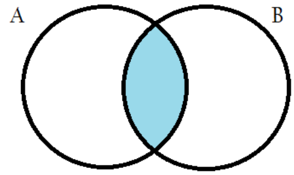


Figura 3. *Diagrama de Venn A∩B*

También, tenemos que la unión entre los conjuntos A y B, consiste en elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos.

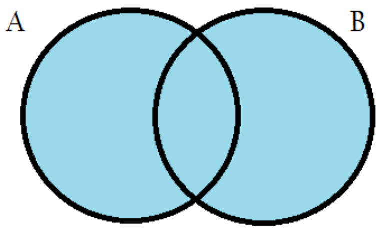


Figura 4. Diagrama de Venn A∪B

Entonces, si cada elemento de A es también un elemento de B, decimos que A es un subconjunto de B y lo representamos así:

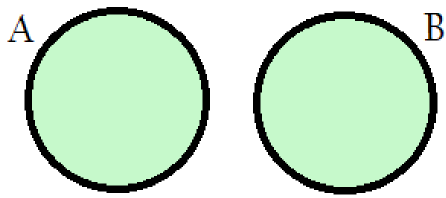
$$A \subseteq \mathrm{B}$$

Vamos a introducir algo de notación. Si algún objeto x es un elemento de A, lo reescribimos de la siguiente manera:

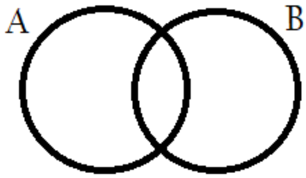
$$x \in A$$

El número de elementos en el conjunto A se denota como $|A|$ y tenga en cuenta que este número puede ser infinito. Por otro lado, el conjunto que consta de ningún elemento, se llama un conjunto vacío y se denota $\emptyset$.

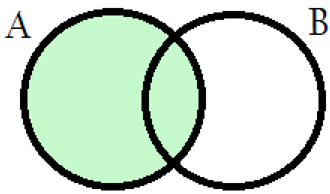
1.1.4 Generalización de la regla de la suma



¿Y si queremos contar el tamaño de $|A \cup B|$ de la siguiente imagen? Es decir, el número de elementos en la unión.



Ahora, los conjuntos son una intersección como se encuentra a continuación:



Así, que vamos a intentarlo. Si solo consideramos el tamaño de $|A| + |B|$ entonces estaremos equivocados.

No olvidemos que, primero contamos todos los elementos de A y luego los de B, esto significa que contamos todos los elementos en la intersección dos veces y a continuación los restamos; lo que nos da la regla general de la suma.

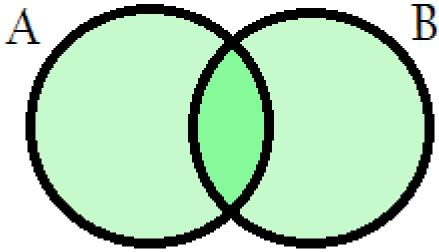


Figura 5. *Diagrama de Venn* $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Hay que tener en cuenta, que, la regla original de la suma también se cubre aquí, correspondiendo al caso cuando el tamaño de la intersección es igual a 0, así

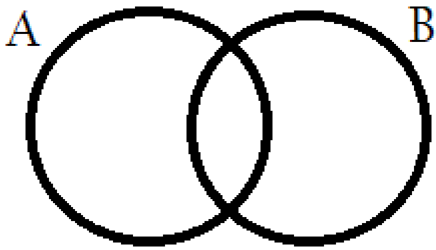
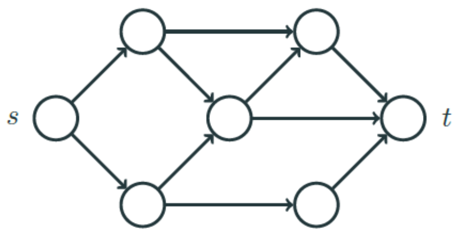


Figura 6. Diagrama de Venn $|A \cap B| = 0$

1.1.5 Conteo recursivo: número de rutas

Consideremos el siguiente problema: se tienen varios puntos conectados por flechas, con un punto de partida **s** (fuente de llamada), y un punto final **t** (fuente de llegada), tal como en la imagen.

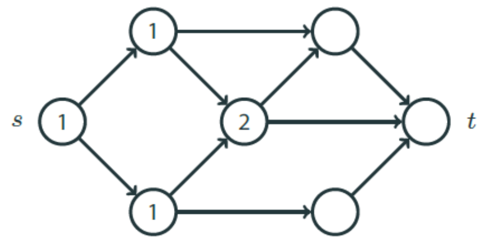


Entonces ¿Cuántas maneras diferentes hay para pasar de ***s*** a ***t***?

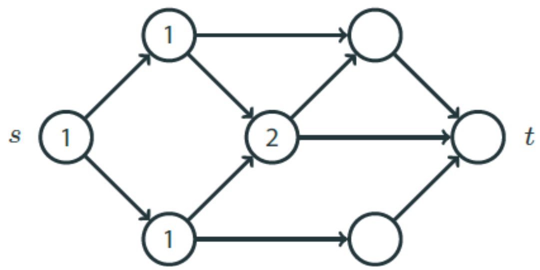
Hay varias maneras de llegar de ***s*** a ***t***; por ejemplo, podemos ir a través de la parte superior de la imagen, desde la parte inferior o desde el centro. Entonces, ¿cómo debemos contar todas las formas posibles y estar seguros de que no hemos perdido nada?

Para cada nodo, contaremos el número de rutas por las que podemos obtener de ***s*** a este nodo, usando la regla de la suma. Vamos a empezar.

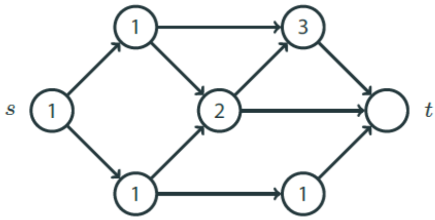
Si consideremos el nodo inicial, podemos tomar la parte superior o inferior, para llegar al nodo central de dos maneras. A partir de esta situación, se debe aplicar la regla de la suma. El número de formas de llegar al nodo medio es 1 + 1= 2.



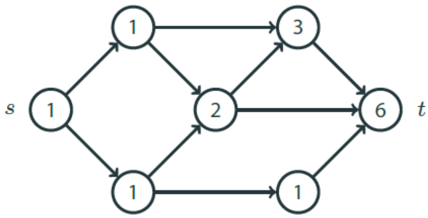
Ahora de nuevo, tenemos dos caminos que van a este nodo; uno, va horizontalmente, y el otro, pasa a través del nodo central; con esto podemos concluir que, hay una ruta del primer tipo y dos rutas del segundo tipo; en total, tenemos tres caminos.



Ahora, podemos considerar este nodo, pues, es simple, aquí solo hay un borde, por lo que el número de rutas es igual al número de rutas en el nodo anterior = 1.



Por otro lado, para llegar al nodo **t**, existen tres maneras: desde la parte superior, inferior y desde el centro; hay tres caminos que pasan por la parte superior, un camino que pasa por la parte inferior y dos caminos que van a través del medio. Así que, en total, tenemos $3 + 2 + 1 = 6$ caminos posibles.



1.1.6 Regla del producto

Por ejemplo, pensemos que, en un problema de análisis de datos, se tienen cuatro videos y tres personas; de tal manera que , y para cada par de video videos y se necesita la persona necesita evaluar cuán probable es que a esa persona le guste el video.

En la regla del producto, hay objetos clave del primer tipo y hay n objetos del segundo tipo; nos dice que el número de pares de objetos, de tal manera, que, el primer objeto del par es del primer tipo, y el segundo objeto del par es del segundo tipo es igual a k veces n.

$$4 \times 3 = 12$$

La regla del producto nos dice que necesitará cuatro veces tres, es decir, 12 evaluaciones, esta situación se puede representar de la siguiente manera:

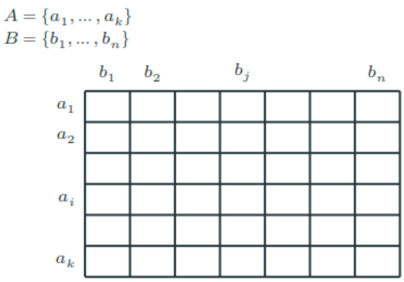
5	3	2	7
8	7	5	1
1	7	8	10

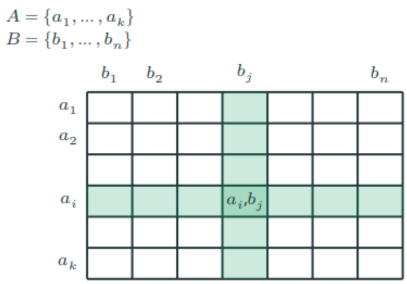
Como se puede observar, las columnas corresponden a videos, las filas a personas y en cada celda, escribimos la evaluación de la probabilidad de que a la persona le guste el video.

Reafirmemos la regla del producto en términos de conjuntos y tendremos lo siguiente:

Regla de producto

Si existe un conjunto finito A y un conjunto finito B, entonces, existe $|A| \times |B|$ pares de objetos, el primero de A y el segundo de B





La primera coordenada del par es igual a la etiqueta de fila, y la segunda coordenada del par, es igual a la etiqueta de la columna, por lo tanto, el número de pares es igual al número de celdas en esta tabla, y para contar el número de celdas en la tabla, necesitamos multiplicar el número de filas por el número de columnas.

> Las secuencias, generalmente, se llaman tuplas, por otro lado, podemos aplicar el mismo argumento que en el problema anterior; hay n posibilidades de elegir la primera letra, luego hay n posibilidades de elegir la segunda letra y así sucesivamente para cada letra siguiente, debemos multiplicar el número de secuencias por n. Así, que, en total, el número de tuplas será igual a n^k

Aquí está nuestra regla de producto de nuevo y consideremos la siguiente pregunta.

¿Podemos expresar la misma regla en términos de contar el número de caminos en la imagen de notas y flechas?

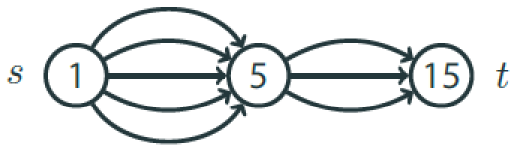
Consideremos que este es el caso cuando |A| = 5 y |B| = 3, por ende, tenemos tres nodos, uno denominado S, otro denominado T y el nodo central que cuenta con cinco bordes que van de S al nodo medio y tres bordes que van desde el nodo central a T.

Para encontrar el número de rutas en esta imagen, haremos lo mismo que en el ejercicio anterior. Empezaremos con S y solo hay un camino para llegar de S a S; para el nodo central, hay cinco formas posibles de llegar.

> En resumen, los elementos de A corresponden a los bordes entre S y el nodo medio, y los elementos de B corresponden a los bordes entre el nodo central y T. Para elegir un camino de S a T, tenemos que elegir realmente un par de bordes, el borde entre S y el nodo medio y otro borde entre el nodo medio y T, codificándose así la regla del producto.

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

Luego, para el nodo T, tenemos tres formas posibles de llegar y hay cinco rutas de cada tipo, así que, en total, tenemos cinco + cinco + cinco = 15 caminos.



$$5 + 5 + 5 = 3 \times 5 = 15$$

1.2 Tuplas y permutaciones

1.2.1 Número de tuplas

Imaginemos que queremos crear una contraseña y queremos que sea lo suficientemente segura. Consideremos el siguiente problema: ¿cuántas contraseñas de 5 símbolos diferentes podemos crear usando solo letras latinas minúsculas, si el tamaño del alfabeto es de 26 letras? Resulta que la regla del producto es lo que necesitamos para resolver este problema. Vamos a empezar con una contraseña de una letra, tenemos 26 contraseñas posibles; si tomamos dos letras podemos escoger cada una de 26 maneras posibles, en este caso al aplicar la regla del producto se obtienen 676 contraseñas posibles, pues 26*26 = 676. Y así sucesivamente, llegando a más de 11 millones de combinaciones posibles.

$$\underbrace{\times 26 \times 26 \times 26 \times 26}_{\textit{Número de dígitos}} = 11\,881\,376$$

Consideremos un problema más general: tenemos un conjunto de n símbolos y queremos contar el número de secuencias de longitud k consistentes de estos n símbolos ¿Cuántas secuencias tenemos?

1.2.1 Idioma para tuplas

Hay una notación establecida para tuplas: supongamos que nos dan dos conjuntos:

A y $B = A \times B$ (producto cartesiano) denotamos el conjunto de todos los pares (a, b), donde $a \in A$ y $b \in B$.

Si A y B son finitos, el número de elementos en $A \times B$ es igual a $|A| \cdot |B|$, es decir,

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Esta es solo la regla del producto.

De manera más general, los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, al multiplicarlos de esta manera: : $A_1 * A_2 * \ldots * A_k$ denotamos el conjunto de todas las tuplas $((a_1, a_2, \ldots, a_k)$,, donde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$. Por otro lado, $A_1 * A_2 * \ldots * A_k$ Se llama producto cartesiano de conjuntos. $A_1, A_2, \ldots, A_k$,,

Cuando: $A_1 = A_2 = \cdots = A_k$ conviene acortar la notación a A^k, es decir, el conjunto de tuplas en el que se encuentra cada coordenada tomada del mismo conjunto se denota por A^k.

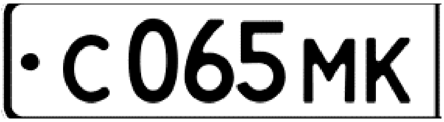
$$|A^k| = |A|^k$$

De hecho, de manera completamente análoga podemos demostrar que para finito $A_1, A_2, \ldots, A_k$

$$|A_1 * A_2 * \ldots * A_k| = |A_1| * |A_2| * \ldots * |A_k|$$

Por ejemplo, los datos que contienen características como, modelo de coche con modelo de teléfono, ocupación, de una persona. Luego, cada persona está codificada en sus datos como una tupla. Por ejemplo, Chevrolet Suburban, Blackberry Torch 9810 y Manager podrían ser su entrada de datos.

Consideremos las matrículas de autos, contienen tres dígitos, tres letras y el 78 es un código regional.



Tenemos 10 opciones de cuatro dígitos y 12 opciones para letras, cabe resaltar que solo podemos usar letras cirílicas.

¿Cuántas placas tenemos para una región?

Para cada dígito, tenemos 10 opciones posibles, así que, para elegir una secuencia de tres dígitos, tenemos 10 * 10 * 10 = 1000 formas posibles.

Para cada letra, tenemos 12 opciones, así que, para elegir una secuencia de tres letras tenemos 12 * 12 * 12 = 1728 maneras posibles.

Para obtener la cantidad de dígitos y letras, deberíamos: 1000 * 1728 = 1.728.000 000 placas para una región.

¿Es suficiente?

Por ejemplo, en la capital de un país en el año 2016 había 5.600.000 vehículos. ¿Significa que hay dos vehículos con la misma matrícula?

Tampoco, pero para resolver este problema vamos a introducir varios códigos originales para la misma región y esto también requiere introducir códigos regionales de tres dígitos, etc., por lo que la combinación ayudará a resolver este problema para evitar tales situaciones.

1.2.3 Tuplas con Restricciones

Podemos usar la regla del producto para calcular el número de tuplas sobre cierta longitud, sobre cierto conjunto fijo de símbolos, pero en realidad, la regla del producto puede darnos más que eso.

Consideremos el siguiente problema como ejemplo: queremos contar cuántos números enteros tenemos entre 0 y 9999 con la propiedad adicional de que hay exactamente un dígito 7 en este número.

Los números entre 0 y 9999, son en realidad secuencias de dígitos de longitud 4.

Y solo por conveniencia, pensemos que los números de tres dígitos corresponden a secuencias de longitud 4 a partir de 0.

Para calcular los números, hay exactamente un dígito 7 en nuestro número y hay cuatro formas posibles de colocar el dígito siete. Así que tenemos 4 casos dependiendo de dónde ponemos el dígito 7, y si calculamos el número de secuencias en los cuatro casos entonces podemos aplicar la regla de suma y obtener la respuesta.

Presumamos que 7, es el segundo dígito en nuestro número, entonces cada uno de los otros tres dígitos se pueden elegir de nueve maneras posibles, así que, 9 * 9 * 9 = 729 formas posibles de elegir los tres dígitos restantes.

En este caso, tenemos 729 números posibles y se aplica para otros cuatro casos; esto equivale a mínimo 3.000 números posibles por debajo de 10.000.

Cabe resaltar, que, está por debajo de 1/3 de todos estos números y por encima de 1/4 de todos estos números, lo que es en realidad una estimación de la probabilidad de obtener exactamente un dígito 7 en nuestro número, si elegimos este número en algún sentido al azar**.**

1.2.4 Permutaciones

Consideremos el siguiente problema: tenemos un conjunto de n símbolos, y queremos contar secuencias de longitud k., pero, ahora tenemos una restricción adicional, no se nos permite usar el mismo símbolo dos veces. n tuplas de longitud k sin repeticiones y se llaman permutaciones k-. También, observamos que, si $n < k$, entonces no hay permutaciones k, pues no hay suficientes símbolos para construir una secuencia de longitud k.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ * & * & * & \cdots & * \end{array}$$

Vamos a utilizar la regla del producto; para esto, consideremos el primer símbolo. Hay *n* opciones para elegir el primer símbolo, en cuanto al segundo símbolo tenga en cuenta que podemos colocar un símbolo que no está en la primera posición.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ * & * & * & \cdots & * \\ n & n-1 & & & \end{array}$$

Así que podemos elegir el primer y el segundo símbolo en

$n\times(n-1)$ formas

Ahora, el tercer símbolo se puede elegir entre $n-2$ opciones: todas excepto los símbolos de la primera y la segunda posición.

Y así; por cada siguiente símbolo tenemos una opción menos.

Al final para el último objeto tenemos $n-k+1$ opciones.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ * & * & * & \cdots & * \\ n & n-1 & n-2 & & \end{array}$$

En general tendremos $n\times(n-1)$, y así sucesivamente tiempos (n-k+1) posibles; para hacer esta expresión más simple, se va a denotar por n factorial n veces 2 veces y así sucesivamente *n* veces. En cuanto al número de permutaciones *k*.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ * & * & * & \cdots & * \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & n-k+1 \end{array}$$

Notación conveniente: $n!=1\times2\times\ldots\times n$; este número es llamado factorial de n.

En esta notación, el número de k-permutaciones de *n* los símbolos de longitud k se ven así:

$n!\ /(n-k)!$

¿Qué pasa si *n-k = 0*? Vamos a decir que 0 factorial, sólo por la definición es = 1.

Conclusiones

- Hemos discutido dos configuraciones estándar: tuplas y permutaciones
- Ayudan en muchos casos
- Pero no cubren todo lo que se necesita
- Una configuración estándar más en la próxima lección

1.3 Combinación

1.3.1 Pares desordenados

Comencemos con un ejemplo simple. Pensemos que tenemos *n* libros y queremos clasificarlos por relevancia para algunos temas.

Algunos modelos para hacer esto, requiere comparar cada libro entre sí, entonces ¿Cuántas comparaciones necesitaremos hacer?

Hay *n* documentos en total y necesitamos comparar cada texto con *n* menos otros documentos; por tal motivo, vamos a aplicar la regla del producto y tendremos una respuesta *n* veces *n-1* comparación.

Para comprobar consideremos un ejemplo donde n = 3; es decir, que solo tenemos tres libros, y vamos a denotarlos como A, B y C.

A B C

Nuestra solución nos da 3 * 2 = 6 comparaciones.

Si enumeramos los libros, veremos que en realidad solo hay tres posibles comparaciones, pues, necesitamos comparar A con B, A con C, y B con C; sin embargo, está mal.

Comenzamos comparando los libros entre sí: el B y C, B se comparó con A y C, C se comparó con A y B. Así que B están haciendo las siguientes comparaciones:

AB AC BA BC CA

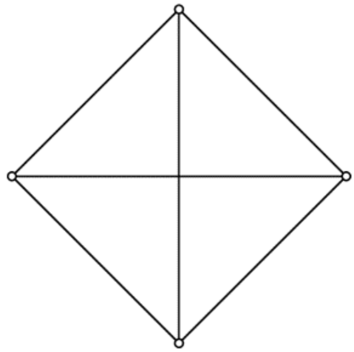
CB

Tenga en cuenta que hemos contado cada comparación dos veces.

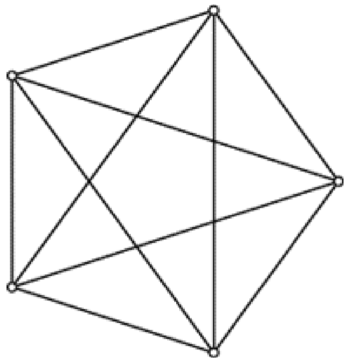
Una vez más, tenemos *n* libros y tenemos que comparar cada libro con *n-1* de los libros. Por la regla del producto, podemos decir que podemos tener que hacer *n*(n-1)* comparaciones.

Hemos contado la comparación de A y B como A vs B y B vs A; por tal motivo, es necesario que dividamos la respuesta por 2 para obtener la respuesta correcta.

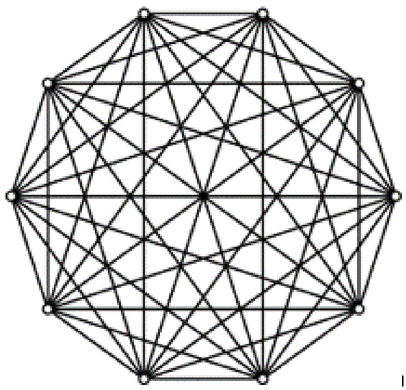
Dado que cuenta cada comparación 2 veces, podemos simplemente dividir la respuesta por dos, y la respuesta al problema será solo *n*(n-1) /2*.



1. ¿Cuál es el número de segmentos en la imagen de abajo? (Cada segmento une dos círculos).



2. ¿Cuál es el número de segmentos en la imagen de abajo? (Cada segmento une dos círculos).



1.3.2 Combinación

Empecemos con el siguiente ejemplo: proyectemos que está planeando un viaje por carretera y que tiene cinco amigos, pero solo puede llevar a tres de ellos en su coche.

¿De cuántas maneras puede hacerlo? Básicamente, queremos elegir un subconjunto de tamaño 3 en el conjunto de sus 5 amigos.

Podemos elegir al primer amigo de 5 maneras posibles; al segundo amigo de 4 maneras posibles, porque uno de los amigos ya está elegido, y el tercer amigo, se puede elegir de 3 maneras posibles. Así que, por la regla del producto, hay 5*4*3 = 60 posibilidades.

¿Es esto correcto?

En este caso, también contamos la misma opción varias veces.

Intentemos arreglar esta solución teniendo en cuenta que en realidad contamos secuencias ordenadas de amigos.

Cada grupo (desordenado) $\{a, b, c\}$ se cuenta $3 \times 2 = 6$ veces: abc, acb, bac, bca, cab y; podemos simplemente dividir el resultado anterior por 6 y el resultado real es $5 \times 4 \times 3/(3 \times 2) = 10$

10 posibles formas de elegir 3 de sus 5 amigos

Introduzcamos la definición general: Para un conjunto S, su combinación K es solo un subconjunto de S de tamaño k. El número de combinaciones se denota como:

$$\binom{n}{k}$$

En nuestro ejercicio se ve así:

$$\binom{5}{3} = 10$$

Todas las posibles combinaciones

$$\binom{3}{5}$$

3!

abc	abd	abe	acd	ace	ade	bcd	bce	bde	cde
acb	adb	aeb	adc	aec	aed	bdc	bec	bed	ced
bac	bad	bae	cad	cae	dae	cbd	cbe	dbe	dce
bca	bda	bea	cda	cea	dea	cdb	ceb	deb	dec
cba	dba	eba	dca	eca	eda	dcb	ecb	edb	edc
cab	dab	eab	dac	eac	ead	dbc	ebc	ebd	ecd

$$3!\binom{5}{3} = \genfrac{}{}{0pt}{}{5}{3}$$

La combinación es en realidad un escenario importante en matemáticas, y lo necesitaremos mucho, pero, ¿cómo puede aumentar el número de combinaciones en la ciencia de datos?

Aquí un ejemplo: a veces, necesita usar un modelo de aprendizaje automático en cierto intervalo de tiempo que no puede dar una buena predicción sobre ciertos conjuntos de datos.

Una posible solución es enriquecer el conjunto de características. Suponiendo que tiene 5 entidades numéricas a, b, c, d y e en su conjunto.

Entonces ¿Qué puede hacer? Puede intentar enriquecer el conjunto de características agregando nuevas que consistan en productos de tres características distintas, así que básicamente, su agente es a*b*c, b*c*e, d*e*c, y así sucesivamente.

Después de eso, puede ejecutar su modelo en el nuevo conjunto de características, pero para hacer esto, necesitamos saber cuántas características tenemos al final.

Básicamente, lo que hacemos es que, para cada nueva característica, escogemos una combinación clave de características antiguas, así que tenemos que contar el número de combinaciones y lo podemos hacer con la siguiente formula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k!\,(n-k)\,!}$$

Revisemos: tenemos que contar el número de subconjuntos de tamaño **k** sobre conjunto de tamaño **n**. Hay **n** opciones para el primer elemento, $n-1$ opción para el segundo elemento, y así sucesivamente, $(n - k + 1)$ opción para el último elemento.

Esto nos da:

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Son en realidad permutaciones, no comb inaciones del porqué hemos elegido la secuencia ordenada de k-elementos.

En otras palabras,

Contamos subconjuntos ordenados en lugar de desordenados.

Entonces, ¿Cómo podemos arreglar esto?

Ten presente, que, cada subconjunto se cuenta tantas veces como haya formas de ordenarlo.

¿Cuántas maneras tenemos de ordenar un subconjunto?

Hay k formas factoriales de ordenar un subconjunto de tamaño k. Así, que, contamos cada subconjunto k tiempos factoriales. Para obtener la respuesta final, necesitamos realizar la siguiente operación:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Consideraciones finales

La combinatoria básica como rama de las matemáticas que estudia los diferentes métodos para contar es clave como base de la computación y de ahí su enorme importancia. De tal manera que en este capítulo se propuso la resolución de problemas cotidianos que promueven el pensamiento aleatorio a través de la enseñanza. Teniendo en cuenta la importancia de la combinatoria básica en construcción del conocimiento probabilístico.

Cuestionario

TEMA: REGLA DE SUMA EN PROGRAMACIÓN

Pregunta 1: Considere el siguiente código Python

```

for_in range(7):
        print(“estimado cliente!”)
for _ in range(6):
        print(“estimado cliente!”)

```

Si ejecutamos este código, ¿cuántas veces la frase ‘¡estimado cliente!’ se imprimirá? Intenta responder sin ejecutar el código.________________________

Pregunta 2: Considere el siguiente código Python

```

for _ in range(8):
        print(“obra!”)
for _ in range(4):
          print(“obra!”)
for _ in range(7):
       print(“obra!”)
```

Si ejecutamos este código, ¿cuántas veces la palabra '¡obra!' se imprimirá? Intenta responder sin ejecutar el código.__________________

TEMA: NÚMEROS DIVISIBLES

¿Cuántos números del 1 al 20, son divisibles por 2?

¿Cuántos números del 1 al 20, son divisibles por 3?

¿Cuántos números del 1 al 20, son divisibles por 2 o por 3?

Cuestionario

TEMA: CONJUNTOS Y OPERACIONES CON ELLOS

1. Considere el conjunto A={1,3,2,0,1,3} A={1,3,2,0,1,3}. Encuentra |A|.

2. Considere el conjunto A = {1, 3, 4, 7, 10, 11} A= {1, 3, 4, 7, 10,11}.

   ¿Cuáles de los siguientes conjuntos B son subconjuntos de A?

   Seleccione todas las opciones correctas a continuación.

   - B = {1, 7, 11}
   - B = {1, 3, 4, 8}
   - B = ∅
   - B = {1, 3, 4, 7, 10, 11}
   - B = {1, 3, 4, 5, 7, 10, 11}

3. Considere los conjuntos A = {obra1, obra 2, obra 4, obra 5, obra 6} y B = {obra 1, obra 2, obra 3, obra 5, obra 7} ¿Cuál es la intersección A∩B de los conjuntos A y B?

   - A∩B={obra 1, obra 3, obra 5, obra 7}
   - A∩B={obra 1, obra 2, obra 5}
   - A∩B={obra 1, obra 2, obra 3, obra 4, obra 5, obra 6, obra 7}
   - A∩B={2,5}

4. Considere los conjuntos A= {proyecto1, proyecto2, proyecto4, proyecto 5, proyecto 7} y B= {proyecto 1, proyecto 2, proyecto 3, proyecto 5, proyecto 6}. ¿Cuál es la unión A∪B de los conjuntos A y B?

- AUB= {proyecto 1, proyecto 3, proyecto 5, proyecto 7}
- AUB= {proyecto 1, proyecto 2, proyecto 5}
- AUB= {proyecto 1, proyecto 2, proyecto 3, proyecto 4, proyecto 5, proyecto 6, proyecto 7}
- AUB= {proyecto 1, proyecto 2, proyecto 4, proyecto 5, proyecto 7}

TEMA: REGLA GENERALIZADA DE LA SUMA

1. Consideremos que tenemos 40 reportes de supervisión de obra en nuestro conjunto de datos. Cada reporte cae en al menos una de las dos categorías, vivienda urbana y vivienda rural. Se sabe que hay 27 reportes de supervisión de obra de vivienda urbana y 22 reportes de supervisión de obra de vivienda rural en el conjunto de datos.

   ¿Cuántos reportes de supervisión de obra caen en ambas categorías?

   Respuesta: ____________________

TEMA: ANIDADO PARA BUCLES

¿Qué imprimirá el siguiente programa?

```python
n=8
count = 0

for i in range(n):
    for j in range(n):
        for k in range(n):
            if i < j and j < k:
                count += 1

print(count)
```

TEMA: CUESTIONARIO TUPLAS

1. Pensemos que queremos analizar el diseño de mezcla de un concreto (26 agregados posibles). Para esto, queremos calcular las frecuencias de todas las combinaciones posibles de 3 agregados en una mezcla. Para ello, necesitaremos almacenar un número para cada posible combinación de 3 agregados ¿Cuántos números tendremos que almacenar para una mezcla?

TEMA: CUESTIONARIO DIVISIÓN DE CONJUNTOS DE DATOS

1. Estimemos que tenemos un conjunto de datos de tamaño 12 y queremos construir un subconjunto de datos de tamaño 6. ¿De cuántas maneras tenemos que hacerlo?

2. Pensemos que tenemos un conjunto de datos de tamaño 12 y queremos dividirlo en dos subconjuntos de datos de tamaño 6 (y no importa cuál de los subconjuntos es el primero y cuál es el segundo) ¿De cuántas maneras tenemos que hacerlo?

CAPÍTULO 2
COMBINATORIA AVANZADA

CONTENIDO

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

- Ordenar varias configuraciones combinatorias para resolver problemas de conteo
- Categorizar problemas combinatorios en configuraciones estándar
- Usar métodos de combinatoria para contar objetos
- Usar las propiesades básocas de los coeficientes binomiales

2.1 TEOREMA BINOMIAL

2.1.1 Triángulo de Pascal

Comencemos con el siguiente problema: si tenemos un conjunto de datos de tamaño **n** para entrenar nuestro modelo de aprendizaje automático. Necesitamos separar un conjunto de datos de prueba del conjunto de datos para utilizarlo de la siguiente manera. Usaremos los datos restantes para entrenar realmente nuestro modelo, y usaremos un conjunto de datos de prueba para verificar cuán efectivo es nuestro modelo en realidad. Como queremos separar el conjunto de datos de prueba de tamaño *k* ¿Cuántas maneras tiene que hacerlo?

¿Qué queremos hacer? Queremos elegir un subconjunto de tamaño *k* de nuestro conjunto de elementos *n*. La respuesta es "*n* elegir *k*" y se acompaña de la siguiente fórmula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k!\,(n - k)\,!}$$

Si vemos el problema desde otro ángulo, consideremos un elemento A en nuestro conjunto de datos. Ahora, podemos ver que hay dos tipos de conjuntos de datos de prueba. Hay conjuntos de datos de prueba que contienen A, y hay conjuntos de datos de prueba que no contienen A. Si los consideramos por separado en realidad sabemos cuántos conjuntos de datos de prueba tenemos de ambos tipos:

$$\binom{n-1}{k-1} \text{ Primer tipo} \qquad \binom{n-1}{k} \text{ Segundo tipo}$$

¿Por qué es así? Si el conjunto de datos contiene A, entonces, nos queda elegir *k - 1* elementos en el conjunto *A – 1*, en el caso del primer tipo; mientras que, en el segundo tipo, si el conjunto de datos no contiene A, entonces nos queda elegir *k* elementos en A

n-1 conjunto de elementos.

En nuestro problema, por un lado, la respuesta es:

$$\binom{n}{k}$$

Y por el otro:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Esto significa, que, tenemos la siguiente relación entre los coeficientes binomiales:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Podemos verificar la anterior relación por el cálculo directo, de la siguiente manera:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k!\,(n-k)!}$$

Vayamos a los soportes. Todos los multiplicadores pueden salir de los paréntesis. Luego, a partir de la primera fracción, tendremos:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)\,(n-1)!}, \quad \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

Y finalmente, tenemos:

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)\,(n-1)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} =$$

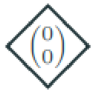
$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} + \left(\frac{(n-1)!}{(n-k)} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} + \left(\frac{k+(n-1)}{(n-k)^{k}}\right) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

En el primer capítulo, se consideraron la mayoría de las configuraciones estándar en combinaciones, lo que permite abordar algunos problemas de conteo. Sin embargo, la aplicación exitosa de este conocimiento en la práctica requiere una experiencia considerable en este tipo de problemas. El objetivo de este libro es doble. Primero, estudiamos extensamente configuraciones combinatorias avanzadas. Discutimos con detalle los coeficientes binomiales. Además, abordamos una configuración estándar más, combinaciones con repeticiones. El segundo objetivo del libro, es practicar el conteo. Obtendremos algo de experiencia en el tema, discutiendo varios problemas en combinatoria.

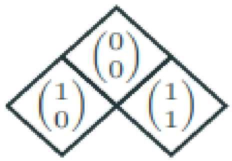
Con esta relación en la mano, estamos listos para discutir el Triángulo de Pascal; una manera conveniente de representar los coeficientes binomiales.

En la parte superior de un triángulo, vamos a escribir el coeficiente binomial, “cero elegir cero”, así:



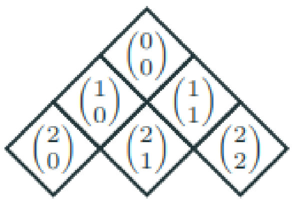
n = 0

Luego, en el siguiente nivel, vamos a escribir coeficientes binomiales “uno elige cero” y “uno elige uno”.



n = 0
n = 1

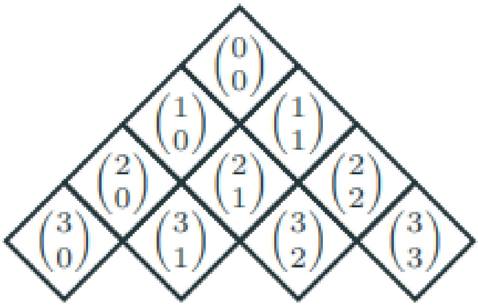
En la siguiente línea, vamos a escribir coeficientes binomios para n = 2.



n = 0
n = 1
n = 2

Luego para n = 3.

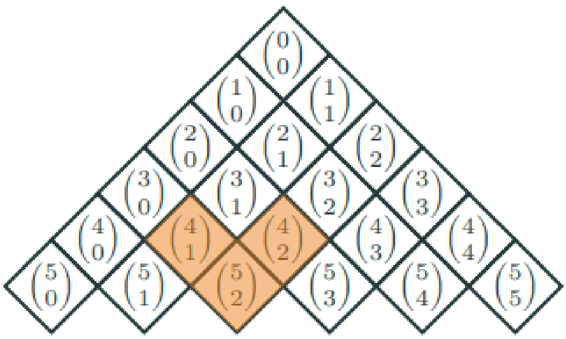
n = 0
n = 1
n = 2
n = 3



Para n = 4 y para n = 5 y así sucesivamente.

¿Por qué, esta es una forma conveniente de representar coeficientes binomiales? Podemos ver que esta relación nos permite calcular cada coeficiente binomial a partir de los dos coeficientes por encima de él.

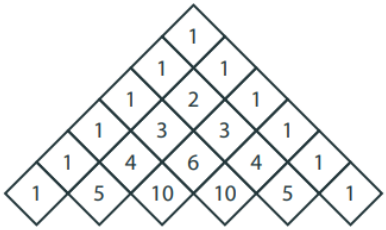
Tenemos que “5 elegir 2” es igual a “4 elegir 1” más “4 elegir 2”. Así que, cada coeficiente binomial es igual a la suma de dos coeficientes binomiales por encima de él, se verifica con la siguiente imagen:



$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Vamos a sustituir los coeficientes binomiales por números reales de

la siguiente manera:



$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Podemos ver que esta relación es verdadera para cada coeficiente binomial, pues, es igual a la suma de dos coeficientes binomiales anteriores. Esta relación se puede utilizar para calcular coeficientes binomiales.

Entonces, ¿qué formas tenemos de calcular los coeficientes binomiales?

Sabemos que:

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)\,(n-1)!}$$

Esto se puede usar para calcular coeficientes binomiales (Figura 7), pero esta no es una muy buena manera. Los números aquí pueden llegar a ser grandes, ya que hay muchas multiplicaciones de por medio, así que esta no es muy buena opción.

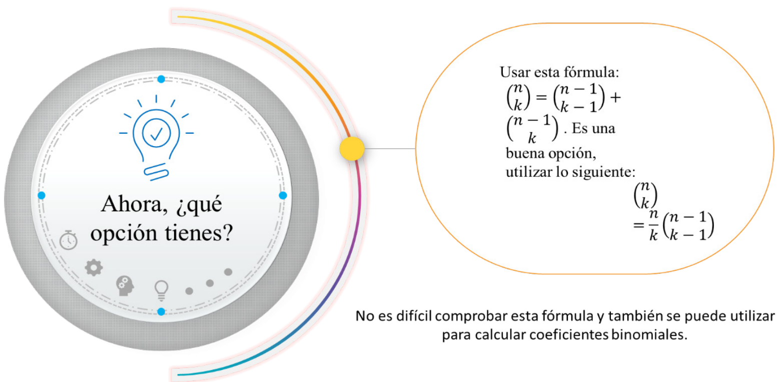
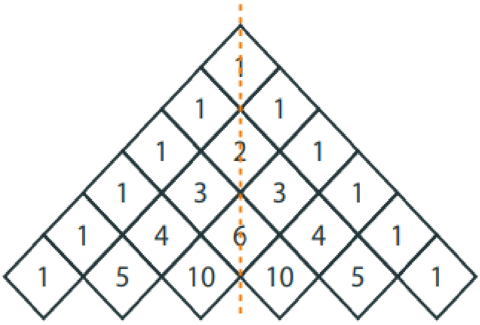


Figura 7. Cálculo coeficientes binomiales

Procedamos a reconocer algunas otras propiedades de los coeficientes binomiales. Consideremos un Triángulo Pascal y observemos que en realidad es simétrico. Si dibujamos una línea vertical a través del centro del triángulo, observemos que los números a ambos lados de la línea son simétricos y que lo podemos escribir con la siguiente fórmula:



$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Vamos a proporcionar la prueba de este teorema por cálculo directo:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \binom{n}{n-k}$$

Observemos una propiedad más importante de los coeficientes binomiales. Vamos a tener en cuenta que, si:

$$k \leq n/2$$

$$\binom{n}{n-k} < \binom{n}{k}$$

Podemos de nuevo probar esto por cálculo directo:

Consideremos el código Python correspondiente: en la primera línea del código, introducimos una estructura de datos para almacenar nuestros coeficientes binomiales. Luego, para todos n comenzando de cero a siete, ejecutamos el siguiente ciclo. Primero establecemos “n elegir 0” y “n elegir n” para ser igual a uno. Luego, para “n elegir k” para todos k entre cero y n, utilizamos nuestra fórmula.

```
C= dict () # C[n,k] es igual a
 elige k
for n in range (8):

    C[n,0] = 1
    C[n,n] = 1
     for k in range(1,n):
        C[n,k] = C[n-1, k-1]+
        C[n-1, k]
print(C[7,4])
```

Esto nos permite calcular coeficientes binomiales a partir de los coeficientes binomiales para n más pequeño. Vamos a imprimir "siete combinado cuatro" y la salida será 35.

```
print(C[7,4])
35
```

Así que esta fórmula nos permite calcular coeficientes binomiales.

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{k}{n-k+1} * \frac{n!}{k!(n-k)!} < \binom{n}{k}$$

De hecho:

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(k-1)\,!\,(n-k+1)\,!}$$

$$= \frac{k}{n-k+1} * \frac{n!}{k!(n-k)!} < \binom{n}{k}$$

$$\frac{k}{n-k+1} < 1$$

¿Por qué ocurre esto? Observe si:

$$k \leq n/2$$

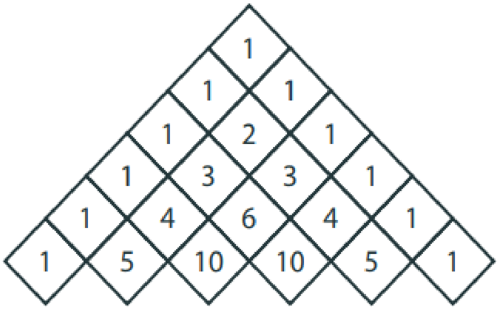
Entonces:

$$\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1-}$$

El numerador aquí es como máximo $n\ /2$ y el denominador es mayor que $n/2$. Así que toda la expresión es menor que uno.

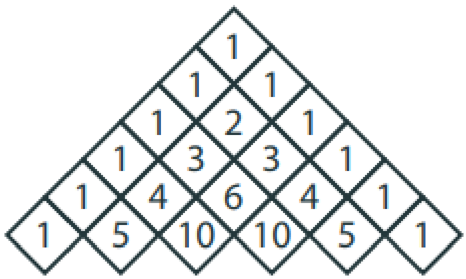
Por simetría también podemos observar, que sí

$k \geq n/2$ y $\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1-}$, en el Triángulo de Pascal, ambas desigualdades significan que los coeficientes binomiales crecen en el medio; si vas de izquierda a derecha, primero crecen hasta la mitad del triángulo y luego comienzan a disminuir.



2.1.2 Teorema del Binomio

Consideremos el Triángulo de Pascal y las siguientes expresiones:



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Consideremos Si abre los corchetes, tendrá coeficientes aquí uno, dos y uno, teniendo en cuenta que son exactamente los mismos números que tenemos en la tercera línea del triángulo de Pascal.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A continuación, consideremos . Vamos a abrir los corchetes otra vez. Tendrá como coeficientes uno, tres, tres y uno, al igual que en la cuarta línea del Triángulo de Pascal.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

Y así sucesivamente. Resulta que esto no es una coincidencia y en realidad para todos n=, al abrir los corchetes entonces los coeficientes en esta expresión serán:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{k} b^n$$

Esta expresión también se puede reescribir así:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Esta es la declaración del teorema binomial, así que procedamos a comprobarlo. Vamos a escribir nuestra expresión antes de expandirnos:

$$\frac{n!}{(a+b)*(a+b)*(a+b)*\ldots*(a+b)}$$

Vamos a abrir los corchetes en esta expresión. Para abrir los corchetes, en cada uno tenemos que elegir una de las dos opciones hay n corchetes. Así que en total vamos a tener . Pero ¿cuántos sumandos de la forma tendremos?

Para obtener tal suma tenemos que elegir b entre exactamente k paréntesis. Entonces, ¿cuántas maneras tenemos que elegir k corchetes entre n en nuestra expresión? Esto es exactamente

lo mismo que $\binom{n}{k}$

Así que vamos a tener $\binom{n}{k}$ de la forma; a^{n-k} b^k, Así que toda la expresión será igual a:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Vamos a proceder a las consecuencias y para esto, vamos a sustituir a y b por algo. Una consecuencia se puede obtener si el conjunto a = b = 1. Luego, en el lado izquierdo tenemos y en el lado derecho, tenemos la suma de todos los coeficientes binomiales, Así que tenemos la suma de todos los coeficientes binomiales, pero, tenemos signos de intercambio: menos, más, menos, más y así sucesivamente. Equivalentemente podemos escribir en forma corta:

$$0 = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Observe que aquí en esta expresión, añadimos el número de subconjuntos de tamaño par y restamos el número de subconjuntos de tamaño impar y obtenemos cero. Por lo tanto, el número de subconjuntos de ambos lados es igual al número de subconjuntos de lados pares. Esta es la segunda consecuencia del teorema binomial.

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n}$$

O en forma corta se puede escribirlos de esta manera:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Tenga en cuenta que aquí explicamos que el número de todos los subconjuntos posibles de un conjunto de elementos n es igual a 2^n.

En el lado derecho, agregamos el número de subconjuntos de tamaño cero, luego el número de subconjuntos de tamaño uno y así sucesivamente para todos los tamaños de subconjuntos.

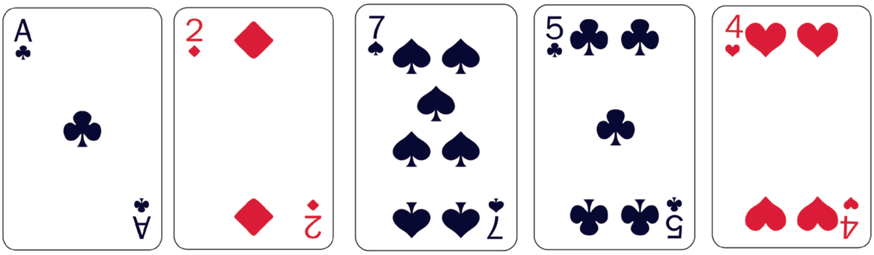
$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^k + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{0} b^n$$

Hay otras maneras de ver esto, pero también se deriva del teorema binomial. Derivemos una consecuencia más. Vamos a establecer a = 1, b = -1. Luego tendremos:

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{0} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{0}$$

2.1.3 Practica el conteo

Antes de seguir con la combinatoria, hagamos un poco de práctica. Comencemos con el siguiente problema: consideremos que tenemos una baraja estándar de 52 cartas, y desea calcular el número de todas las posibles manos de cinco cartas. Aquí, un ejemplo de una mano



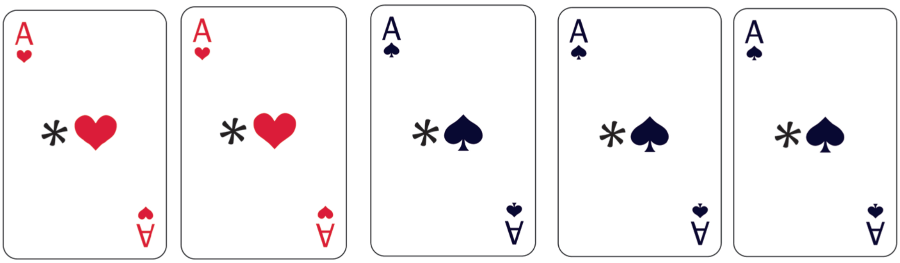
https://pixabay.com/

Tenga en cuenta que el orden de las cartas en su mano no es importante, así que imaginemos que tu mano está desordenada.

Al elegir un subconjunto de cinco cartas entre 52 cartas, y sabemos que la respuesta:

$$\binom{52}{5} = 2.598.960$$

Pasemos al siguiente problema. Ahora queremos contar el número de manos en las que dos cartas son corazones y tres son picas, así:



https://pixabay.com/

Tenga en cuenta que, para obtener esta mano, tenemos que elegir dos cartas del conjunto de los corazones (13), y tres cartas del conjunto de picas (13). Para elegir nuestras cartas tenemos:

$$\binom{13}{2}\binom{13}{3} = 22.308$$

Pasemos al siguiente ejemplo: ahora, estamos considerando números de cuatro dígitos, y le gustaría calcular cuántos números tienen al menos un dígito siete. Podemos empezar probando todas las posibilidades para todos los dígitos. Si probamos todas las posibilidades para los primeros dígitos, hay 10 de ellos, 10 posibilidades para el segundo y 10 posibilidades para el tercer dígito, pero, para el último, el número de posibilidades depende de que uno de los dígitos anteriores fuera igual a siete. Por lo tanto, no está claro cómo calcular este número de esta manera; pero, podemos usar otro enfoque.

Resulta que, es muy fácil calcular lo contrario. Vamos a calcular todos los números que no tienen el dígito siete, hay 9^4 de ellos sin dígito siete. Hay 10^4 números en total. Entonces la respuesta a nuestro problema es $10^4 - 9^4 = 3.439$.

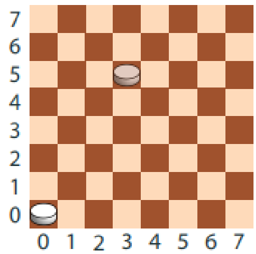
Pasemos en el siguiente problema: ¿Cuántos números de cuatro dígitos tenemos para que sus dígitos estén disminuyendo? Cabe resaltar que cada dígito siguiente es más pequeño que el anterior. Si tratamos de contar opciones para cada posición, entonces es complicado; sin embargo, para la primera posición, hay 10 opciones, pero, para la segunda, el número de opciones ya depende del primer número. Entonces, no está muy claro cómo calcular esto; la idea es mirar desde el descuido.

Consideremos cuatro posiciones en nuestro número. Hay que elegir dígitos de 0-9 para estar en nuestro número. Tenga en cuenta que una vez que elegimos cuatro dígitos distintos, nuestro número se determina de forma única. ¿Por qué es así? Consideremos un ejemplo: presumamos que elegimos 3, 4, 2 y 7. Tenga en cuenta que hay una manera única de anotarlas en nuestras posiciones de tal manera que, disminuyan los números en nuestras posiciones. Podemos escribir resolviendo de la siguiente manera: 7, 4, 3 y 2. Así que, una vez que elegimos cuatro dígitos, el número se determina de forma única, y el orden de nuestras selecciones no importa.

En realidad, solo elegimos combinaciones de tamaño cuatro de 10 opciones, de dígitos de 0-9. La respuesta es:

$$\binom{10}{4} = 210$$

Pasemos al último problema. Consideremos un tablero de ajedrez y tenemos una pieza en la esquina inferior izquierda en la posición cero-cero, que queremos moverla a la posición tres-cinco, como se muestra a continuación:

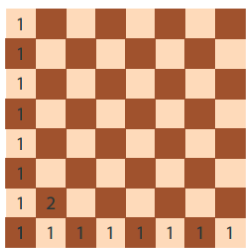


¿De cuántas maneras tienen que hacerlo? Recordemos que hay exactamente ocho movimientos necesarios para mover la posición de cero a tres-cinco. Tenga en cuenta, que, tres de ellos deben ser movimientos hacia la derecha, y cinco hacia arriba. Por otra parte, cualquier combinación de tres movimientos a la derecha, y cinco hacia arriba es una forma válida de llegar a la celda tres-cinco.

Entonces, ¿qué tenemos que hacer? Tenemos ocho movimientos, y tenemos que elegir tres de ellos para ser movidos a la derecha. Así que, tenemos combinaciones, tienes que elegir un subconjunto de tamaño tres de un conjunto de tamaño ocho. Entonces la respuesta aquí es:

$$\binom{8}{3} = 56$$

Resulta que, en este problema, podemos ver un Triángulo Pascal. Consideremos nuestro tablero de ajedrez, y vamos a escribir en cada celda el número de formas posibles de llegar a la celda desde la posición cero-cero, desde la esquina inferior izquierda. Luego, en la fila inferior, tienes que escribir uno porque solo hay una manera de llegar allí, solo podemos movernos hacia la derecha. En la primera columna, por exactamente la misma razón, se debe escribir una para cada celda aquí, pues solo hay una manera de llegar.



Así ocurre hasta llegar a nuestra posición tres-cinco, las posibilidades son variadas y terminamos obteniendo un triángulo Pascal.

Cuestionario Practica Contar

1. ¿Cuál es el número de manos de 5 cartas con cuatro corazones y uno de espadas?
2. ¿Cuál es el número de cadenas de bits (es decir, cadenas que consisten en 0 y 1) de longitud 8 donde el número 0 es igual a 1? Por ejemplo, hay dos cadenas de este tipo de longitud dos: 01 y 10.

2.2 COMBINACIÓN CON REPETICIONES

2.2.1 Revisión

Así que hemos considerado la selección de k artículos de n opciones posibles. Hay varias posibilidades. La selección puede ser con o sin repeticiones, y puede ordenarse o desordenarse. Vamos a considerar un ejemplo, consideremos $k = 2$ y el número de opciones es $n = 3$ y las opciones son a, b y c. Así que, para las selecciones ordenadas con repeticiones, tenemos las siguientes opciones:

	Con repeticiones	Sin repeticiones
Ordenadas	(a-a), (a-b), (a-c), (b-a), (b-b), (b-c), (c-a), (c-b), (c-c)	
Desordenadas		

Tenemos solo las secuencias de longitud 2, y hay tres posibilidades para cada opción. Así que hay 9 posibilidades.

Para selecciones ordenadas sin repeticiones, prohibimos las repeticiones, por lo que eliminamos las opciones aa, bb y cc y quedan seis opciones:

	Con repeticiones	Sin repeticiones
Ordenadas	(a-a), (a-b), (a-c), (b-a), (b-b), (b-c), (c-a), (c-b), (c-c)	(a-b), (a-c), (b-a), (b-c), (c-a), (c-b)
Desordenadas		

Ahora, ¿Qué tenemos para las selecciones desordenadas sin repeticiones? El orden no importa, ab y ba son los mismos. Así que aquí tenemos tres opciones:

	Con repeticiones	Sin repeticiones
Ordenadas	(a-a), (a-b), (a-c), (b-a), (b-b), (b-c), (c-a), (c-b), (c-c)	(a-b), (a-c), (b-a), (b-c), (c-a), (c-b)
Desordenadas		{a-b}, {a-c}, {b-c}

Finalmente, seleccionamos desordenadas con repeticiones. El orden no importa, pero permitimos repeticiones por lo que agregamos aa, bb y cc:

	Con repeticiones	Sin repeticiones
Ordenadas	(a-a), (a-b), (a-c), (b-a), (b-b), (b-c), (c-a), (c-b), (c-c)	(a-b), (a-c), (b-a), (b-c), (c-a), (c-b)
Desordenadas	{a-b}, {a-c}, {b-c}, {a-a}, {b-b}, {c-c}	{a-b}, {a-c}, {b-c}

Las selecciones ordenadas con repeticiones, esto son sólo tuplas y son n^k.

	Con repeticiones	Sin repeticiones
Ordenadas	Tuplas n^k	
Desordenadas		

Ahora, selecciones ordenadas sin repeticiones. Estas son permutaciones K. Hay $\frac{n!}{(n - \mathrm{k})!}$.

	Con repeticiones	Sin repeticiones
Ordenadas	Tuplas	k-permutaciones $\frac{n!}{(n - \mathrm{k})!}$
Desordenadas		

A continuación, selecciones desordenadas sin repeticiones. Estas son combinaciones, elegidas en un subconjunto de tamaño K en el conjunto de elementos N-. Entonces la respuesta está:

	Con repeticiones	Sin repeticiones
Ordenadas	Tuplas n^{k}	k-permutaciones $\frac{n!}{(n - \mathrm{k})!}$.
Desordenadas		Combinación $\binom{n!}{\mathrm{k}}$

La última opción aún no se ha estudiado. Así que esto es lo que estudiaremos en esta lección. ¿Pero es en realidad una opción razonable? ¿Realmente nos encontramos con algo como esto en la práctica? Resulta que lo hacemos, y antes de estudiar realmente esta opción, consideremos un ejemplo.

Planteemos que tenemos *k* videos y cada uno de ellos cae dentro de una de las categorías *n*. Estamos interesados en los tamaños de las categorías, el número de videos en cada categoría. ¿Cuántas distribuciones posibles de tamaños de categorías tenemos?

Entonces $k = 2$ y $n = 3$. Aquí está la lista de todas las distribuciones posibles:

(2-0-0), (0-2-0), (0-0-2)

(1-1-0), (1-0-1), (0-1-1)

Solo tenemos dos videos, y hay dos casos. Pueden caer en la misma categoría. Luego, hay tres opciones, por lo que se cuentan otras tres categorías. Así que, sus opciones son (2-0-0), (0-2-0) y (0-0-2).

Para tres categorías tenemos tres opciones. El segundo caso, es que nuestros dos videos caen en diferentes categorías, y aquí hay tres opciones: (1-1-0), (1-0-1) y (0-1-1). Así que, en total, tenemos seis opciones.

En general, para cada uno de los videos K elegimos una de las categorías N, y cada video contribuye una al tamaño de una de las categorías. Así que cada video importa por igual y nuestras elecciones no están ordenadas. Varios videos pueden caer en la misma categoría. Así que, en realidad tenemos selecciones desordenadas con repeticiones, y esta es exactamente nuestra configuración.

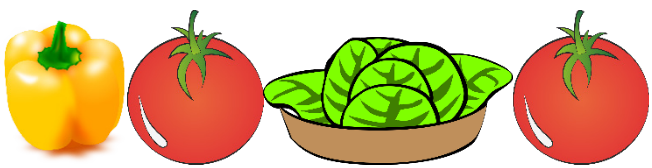
2.2.2 Ensalada

Antes de proceder al caso general de combinaciones con repeticiones, empecemos con el siguiente ejemplo: si tenemos un suministro ilimitado de tomates, pimientos y lechuga, y desea hacer una ensalada de cuatro unidades entre estos tres ingredientes. No tienes que usarlos todos.

¿Cuántas ensaladas diferentes podemos hacer?

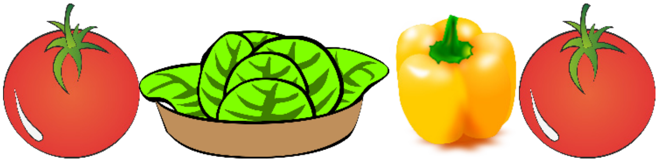
Escogemos cuatro elementos de tres opciones con repeticiones, cabe resaltar que el orden no importa; sin embargo, todavía no sabemos cómo contar el número de ensaladas. Lo que haremos es enumeraremos todas las ensaladas posibles y luego, las contaremos, sin hacerlo de aleatoriamente.

Por ejemplo, esta es una ensalada:



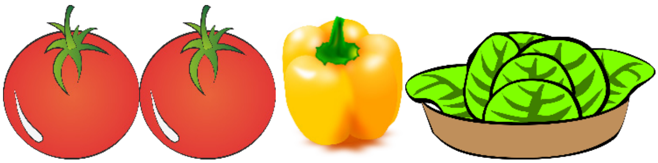
Fuente: https://www.needpix.com/

A continuación, encuentra otra ensalada, pero tenga en cuenta que esta es la misma ensalada:



Fuente: https://www.needpix.com/

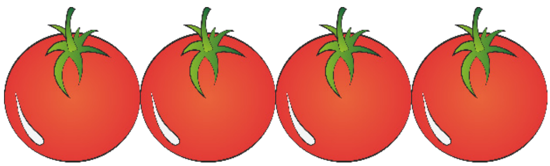
Así que el pedido no importa, y por conveniencia, vamos a introducir algo de orden, de la siguiente manera:



Fuente: https://www.needpix.com/

Consideremos todos los posibles números de tomates en nuestra ensalada. Comencemos con una caja de cuatro tomates, con la que podemos formar las siguientes ensaladas:

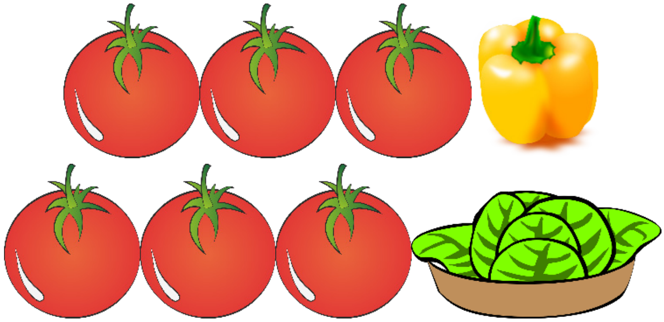
- **Caso 1:**



Fuente: https://www.needpix.com/

- Caso 2:

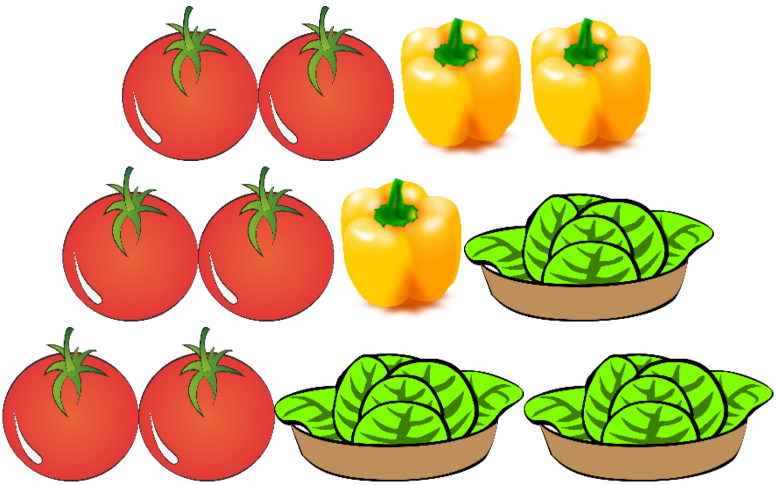
Tenemos 3 tomates y un espacio para un pimiento o una lechuga, lo que implica las siguientes ensaladas de este tipo:



Fuente: https://www.needpix.com/

- **Caso 3:**

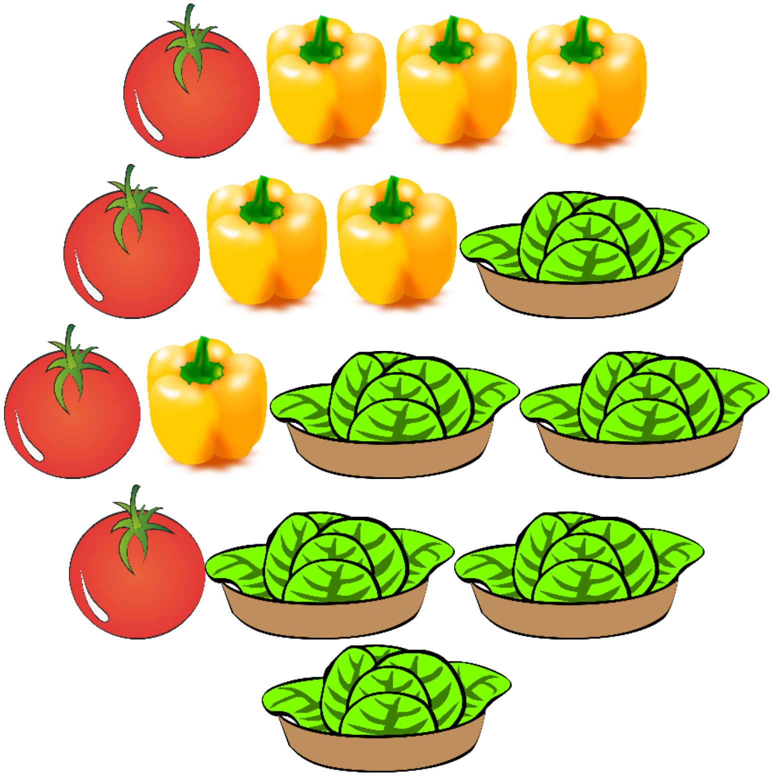
Encontramos dos tomates y quedan dos posiciones de las que pueden ser ambos pimientos, un pimiento y una lechuga o dos lechugas:



Fuente: https://www.needpix.com/

- **Caso 4:**

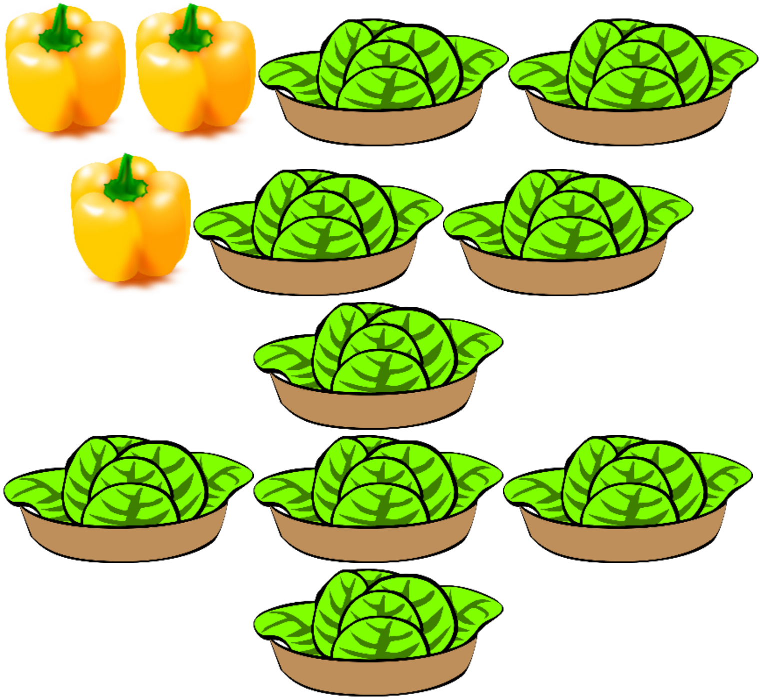
Usamos solo un tomate y las posibles combinaciones son con tres pimientos, dos pimientos y una lechuga, un pimiento y dos lechugas, o tres lechugas:



Fuente: https://www.needpix.com/

- **Caso 5:**

No encontramos tomates, entonces nuestras posibles ensaladas llenas de pimientos, tres pimientos, dos pimientos, un pimiento o ninguno, completando así las siguientes 5 ensaladas:

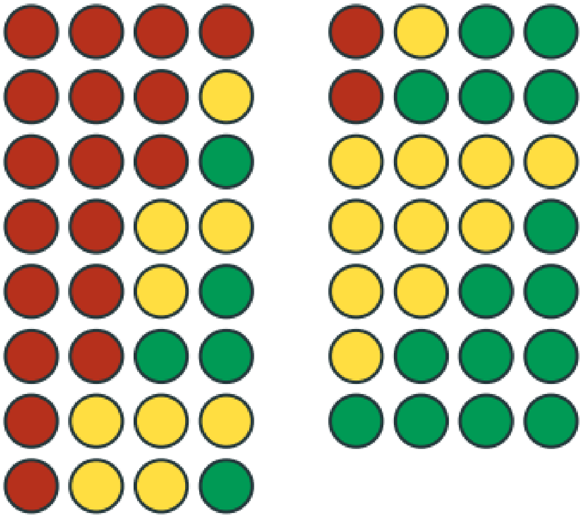


Fuente: https://www.needpix.com/

En resumen, tenemos:

- ✓ 4 tomates: 1 ensalada.
- ✓ 3 tomates: 2 ensaladas.
- ✓ 2 tomates: 3 ensaladas.
- ✓ 1 tomate: 4 ensaladas.
- ✓ 0 tomates: 5 ensaladas
- ✓ Total: 15 ensaladas.

Aquí está la lista completa de posibles ensaladas:

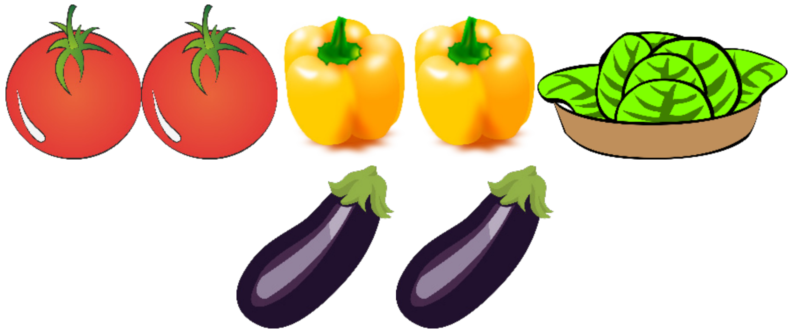


En total, tenemos 15 ensaladas. Primero, enumeramos la ensalada con cuatro tomates; luego, las ensaladas con tres tomates y así sucesivamente; esto nos permite ver la solución más estructurada; cabe resaltar que, si la cantidad de ingredientes crece, entonces la solución se vuelve más complicada, pero aun así, se puede aplicar la misma estrategia para el recuento recursivo de ensaladas de todos los tamaños y toda la cantidad de ingredientes.

2.2.3 Combinación con Repeticiones

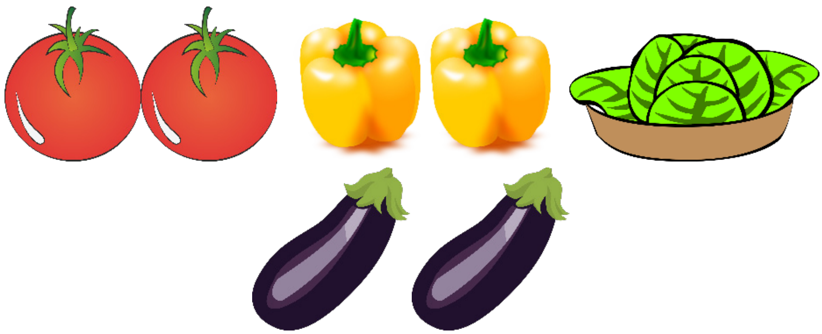
Ahora, consideremos un ejemplo más complicado: un suministro ilimitado de tomates, pimientos, lechuga y berenjenas. Queremos hacer una ensalada de siete unidades entre estos cuatro ingredientes. Una vez más, no tenemos que usar todos los ingredientes ¿Cuántas ensaladas diferentes podemos hacer?

En este caso, también podemos usar el conteo recursivo, pero ahora, nos gustaría obtener una fórmula. En realidad, esta será una solución general de combinaciones, cuatro combinaciones con repeticiones. Vamos a pedir la ensalada, de tal manera que, los tomates son primero, luego pimientos, luego lechuga y finalmente la berenjena.



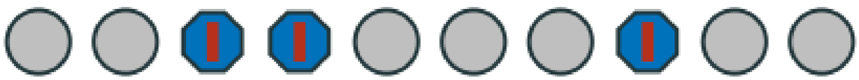
Fuente: https://www.needpix.com/

Ya que tenemos la ensalada, empecemos la idea completa. No olvidar, que, para especificar la lista de ingredientes, es suficiente indicar dónde cambian los ingredientes. Así que si solo agregamos estas flechas (ver imagen) entonces es suficiente para reconstruir una ensalada.



Fuente: https://www.needpix.com/

Podemos colocar las flechas como signos delimitadores entre nuestros ingredientes, cabe resaltar que serán reemplazados los elementos por espacio en blanco. Hagámoslo de la siguiente manera.



Ten en cuenta que, la ensalada todavía se puede restaurar. Los tomates están a la izquierda. A continuación, tenemos pimientos y así sucesivamente. Todavía podemos restaurar nuestra ensalada. Pero ¿Qué pasa si no tenemos pimientos en la ensalada original, todavía está bien? Sí, resulta que esto está bien y luego tendremos dos delimitadores uno al lado del otro, esto indicará que no hay pimientos.

Así que ahora tenemos esta línea y lo que nos queda es especificar tres posiciones entre 10 lugares para las posiciones de los delimitadores. Será suficiente especificar la ensalada. Entonces, para especificar la ensalada, solo queda elegir tres posiciones para colocar los delimitadores aquí.

Resulta que solo tenemos que considerar combinaciones.

Tenemos 10 posiciones posibles y tenemos que elegir tres de ellas para ser delimitadores. Entonces, la respuesta a este problema es $\binom{10}{3} = 210$.

Así que tenemos este problema con cuatro ingredientes y el tamaño de la ensalada es de siete.

Las ideas principales fueron ordenemos la ensalada de una manera conveniente. A continuación, la ensalada está determinada por delimitadores entre tipos de ingredientes. A continuación, colocamos los delimitadores en línea con los ingredientes. Nos queda solo para elegir las posiciones cuatro delimitadores.

Distribuyendo dulces entre niños

Supongamos que tenemos 15 caramelos idénticos y queremos distribuirlos entre 7 niños.

¿De cuántas maneras tenemos que hacerlo? Para cada caramelo, elegimos uno de los siete niños, cabe resaltar, que, se permiten repeticiones y que los caramelos son idénticos.

En este punto, estamos tratando con combinaciones con repeticiones, así que el número de caramelos es el tamaño de una combinación y el número de niños es el número de opciones. Para saber la respuesta, es $\binom{15+(7\text{-}1)}{(7\text{-}1)} = \binom{21}{6}$ $= 54.26421$

Consideremos un problema similar con una distribución más justa. Tiene 15 caramelos idénticos y 7 niños; y contamos cuántas maneras tiene para distribuir los caramelos entre los niños, teniendo como restricción que cada uno reciba al menos un caramelo. En este caso, la solución anterior no funciona, y no sabemos cómo hacerlo, pero en realidad, podemos reducir al problema anterior

¿Cómo vamos a hacer esto?

Démosle a cada niño un caramelo, una vez hecho, nos quedan ocho pues 15 – 7 = 8 caramelos y ahora debemos distribuirlos como en el problema anterior. Una vez más, tenemos combinaciones con repeticiones.

El tamaño de la combinación es ahora ocho, el número de opciones es siete y la respuesta es

$$\binom{8+(7-1)}{(7-1)} = \binom{14}{6} = 3.003,$$

recuerde que, en el problema anterior, la respuesta fue 54.264, así que tenga en cuenta que, en la mayoría de las maneras de compartir caramelos entre los niños, alguien se quedará sin caramelos, lo que probablemente no es muy bueno

Vamos a comprobar. Consideremos un código de Python que calcula el mismo número.

En la primera línea, solo importamos las herramientas necesarias, en la segunda, iniciamos un recuento para ser igual a 0, y luego, un ciclo para todas las carreras d en d para todas las secuencias de

Este es el viejo problema. Ahora, estamos listos para contar el número de combinaciones con repeticiones.

Resulta que el número de combinaciones de tamaño k de n objetos con repeticiones es igual a $\binom{k+n-1}{n-1}$. Aquí el tamaño de una combinación es el tamaño de una ensalada. Número de objetos es el número de ingredientes. El mismo argumento funciona aquí, igual que en el problema anterior. Pero ¿por qué tenemos k + n - 1 y n – 1? Tenga en cuenta que n ingredientes significa que tenemos n - 1 delimitadores. Así que tenemos que elegir $n-1$ delimitadores en la línea donde tenemos $k + (n-1)$.

Hemos considerado ahora todas las configuraciones estándar; hay cuatro posibilidades que pueden ser ordenados o desordenados, estar con repeticiones y sin repeticiones, y para las cuatro opciones posibles, tenemos la respuesta en la siguiente tabla:

	Con repeticiones	**Sin repeticiones**
Ordenado	Tuplas n^k	k-permutaciones $\frac{n!}{(n-k)!}$
Desordenado	Combinación con repeticiones $\binom{k+n-1}{n-1}$	Combinaciones $\binom{n}{k}$

1.1

2.3 PROBLEMAS EN COMBINATORIA

2.3.1 Distribuir tareas entre personas

Las personas son diferentes y por lo tanto, se ordena la selección. No se pueden dar asignaciones a dos personas diferentes, así que no hay repeticiones y solo estamos tratando con permutaciones.

Para la primera persona, hay nueve opciones posibles para la segunda ronda, ocho opciones posibles, luego, siete opciones posibles, y para la última persona, quedan seis opciones posibles.

Personas	1	2	3	4
N° de opciones	9	8	7	6

longitud 4 que constan de dígitos de 0-9. Entonces en este ciclo, tenemos la suma de dígitos en esta secuencia es igual a 10, entonces aumentamos el contador y luego imprimimos el contador.

```
import itertools as it
count = 0
for  d  in  it.product(range)
(10), repeat= 4):
    if sum(d) == 10:
        count += 1
print (count)
```

Vamos a calcular la salida, y resulta que es 282

Tenemos que multiplicarlo por la regla del producto y la respuesta es 9*8*7*6 = 3.024; por lo tanto, aquí solo necesitábamos contar permutaciones.

Consideremos un problema similar: hay cuatro personas y nueve tareas diferentes, y tenemos que distribuir todas las tareas entre las personas. No se deben dar asignaciones a dos personas y todas las asignaciones deben asignarse a alguien. Así que, a cada persona, se le puede dar un número arbitrario de asignaciones entre cero y nueve

¿De cuántas maneras tenemos que hacerlo? Así que aquí cada persona recibe varias asignaciones.

Podemos tratar de considerar la persona de uno a uno, pero es problemático. Para la primera persona, podemos asignar subconjunto arbitrario para que sepamos cómo contar el número de subconjuntos, pero ya, para la segunda persona, la cantidad de opciones depende de lo que elegimos para la primera persona. Así que este no es un buen enfoque.

Para solucionar este problema, no le demos asignaciones a la gente, en su lugar, asignaremos personas a tareas.

Consideremos la siguiente tabla:

Asignación	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N° de opciones	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Así que tenemos nueve asignaciones y para cada asignación, consideremos el número de opciones para asignar a una persona a esta tarea. Ahora podemos ver fácilmente que, para cada asignación, hay cuatro opciones posibles, y, por lo tanto, por la regla del producto, hay que multiplicarlas, y por lo tanto la respuesta es de = 262.144.

2.3.2 Números con suma fija de dígitos

Consideremos el siguiente problema ¿Cuántos números enteros no negativos tenemos por debajo de 10.000 de tal manera que la suma de sus dígitos es igual a 9?

Consideremos los números como secuencias de cuatro dígitos. Podemos tratar de ver este problema desde una posición de números, probemos el primer número: tenemos nueve opciones para el primer número, pero ya para el segundo, no está claro, pues, el número de opciones para el segundo número depende del primero.

Tenemos cuatro posiciones, y tenemos que distribuir con 9 entre ellas, imaginemos que estamos en 0 al principio, y agreguemos 1 nueve veces. Cada vez que agregamos 1, elegimos 1 sobre 4 dígitos para aumentar. Así que el orden de nuestras selecciones no importa en qué punto añadimos uno a la suma de los dígitos, y las repeticiones están permitidas. Así que tenemos combinaciones de tamaño 9 entre 4 opciones y la respuesta es

$$\binom{9+(4-1)}{4-1} \; {12 \atop 3} = 220$$

Consideremos un problema similar ¿Cuántos números enteros no negativos tenemos por debajo de 10.000 de tal manera que la suma de sus dígitos es igual a 10?

Hagamos lo mismo con distribuir 10 entre cuatro posiciones, es decir, tenemos combinaciones de tamaño 10 entre 4 opciones.

Tenemos combinaciones con repeticiones, así que la respuesta es

$$\binom{10 + (4\text{-}1)}{(4\text{-}1)} \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} = 286$$

Entonces, la respuesta está realmente desactivada por 4 en comparación con lo que hemos calculado antes.

Entonces ¿Qué salió mal?

Revisemos lo que hemos hecho. No olvides que, con nuestro enfoque, podemos asignar los 10 una vez a la misma posición, y que no corresponde a nada razonable.

Los dígitos deben ser como máximo nueve.

Vamos a restar el número de cosas que no deberíamos haber contado. No deberíamos haber contado las asignaciones de las 10 al mismo dígito, y solo hay cuatro combinaciones de este tipo.

Podemos asignar 10 a la primera posición, 10 a la segunda, 10 a la tercera y 10 a la cuarta. Así que hay cuatro opciones que no deberíamos haber contado. Así que vamos a restarlos de la respuesta anterior.

Entonces la respuesta correcta es $286 - 4 = 282$ que es igual a lo que nuestro programa nos ha dado.

$$282$$

2.3.3 Números con dígitos no crecientes

Consideremos el siguiente problema ¿Cuántos números de cuatro dígitos tenemos para que sus dígitos no aumenten de izquierda a derecha? Los números de tres dígitos también se consideran cuatro dígitos, solo que empiezan con 0.

Podemos tratar de mirar este problema desde posiciones en el número, pero, esto resulta ser complicado. Hay opciones de retorno para las primeras posiciones, pero para la segunda, ya no está claro ¿Cuántas opciones tenemos? Depende del número en la primera posición. Consideremos 4 posiciones y escogemos dígitos de 0 a 9 para estar en nuestro número; considera, que, una vez que escogimos cuatro dígitos, posiblemente fueron repetición.

Pensemos que nuestros números elegidos son 3, 4, 3 y 7, y la única manera de enumerarlos que no estén aumentando es 7, 4, 3, 3, así que, lo que hacemos es escoger un subconjunto de cuatro dígitos entre las diez opciones posibles. El orden no importa, y ahora se permiten repeticiones. Así que, tenemos combinaciones con repeticiones y la respuesta es

$$\binom{4+(10-1)}{(10-1)}\binom{13}{3} = 715.$$

2.3.4 División en grupo de trabajo

Supongamos que tenemos 12 estudiantes en la clase, y queremos dividirlos en grupos de 2 para trabajar en alguna tarea ¿De cuántas maneras tenemos que hacerlo?

Una solución pasa por mirar desde la posición de los grupos de trabajo y consideremos la primera, tenemos que elegir a 2 de cada 12 personas en un grupo de trabajo, sabemos cuántas maneras tenemos de hacerlo, el orden en el grupo no importa.

Así que, tenemos combinaciones y $\binom{12}{2}$ formas posibles de hacerlo.

Para el segundo grupo, nos quedan 10 personas, y hay $\binom{10}{2}$ opciones.

Y así sucesivamente, para cada siguiente grupo tendrá dos personas menos.

En general, tenemos $\binom{12}{2} \text{x} \binom{10}{2} \text{x} \binom{8}{2} \text{x} \binom{6}{2} \text{x} \binom{4}{2} \text{x} \binom{2}{2}$ opciones

y así sucesivamente, por lo que tenemos que multiplicarlos por la regla del producto. Para continuar es conveniente enumerar personas por números del 1 al 12, y tenga en cuenta que, por ejemplo, tenemos la siguiente división en grupos en nuestro recuento.

En el segundo, por ejemplo, elegimos el primer grupo {1,5}, el segundo grupo es {3,7} y así sucesivamente.

{3,7}, {1,5}, {6,9}, {11,2}, {8,12}, {4,10}

{1,5}, {3,7}, {6,9}, {11,2}, {8,12}, {4,10}

Ahora, veamos estos dos grupos, y observemos que difieren solo en los dos primeros grupos, y tengamos en cuenta que acabamos de cambiarlos. Pero, en realidad, el orden entre grupos tampoco importa. Así que, contamos secuencias ordenadas de grupos, pero en realidad necesitábamos divisiones desordenadas en grupos

¿Qué deberíamos hacer ahora?

Vamos a aplicar una vieja idea, tenga en cuenta que hemos contado cada división en grupos 6 veces factoriales. Este es exactamente el número de veces que podemos permutar 6 grupos. Así que nuestra respuesta anterior en nuestro primer intento fue así, y en realidad contamos cada división en grupos 6 veces factoriales.

$$\binom{12}{2} * \binom{10}{2} * \binom{8}{2} * \binom{6}{2} * \binom{4}{2} * \binom{2}{2}$$

Por lo tanto, para obtener la respuesta correcta, debemos dividir por 6 factoriales. Vamos a escribirlo, y después de algunas simplificaciones, vamos a escribir a qué es igual cada coeficiente binomial aquí:

$$\binom{12}{2} * \binom{10}{2} * \binom{8}{2} * \binom{6}{2} * \binom{4}{2} * \binom{2}{2} * \frac{1}{6!} =$$

$$\frac{12 * 11}{2} * \frac{10 * 9}{2} * \frac{8 * 7}{2} * \frac{6 * 5}{2} = \frac{4 * 3}{2} = \frac{2 * 1}{2}$$

$$= \frac{1}{6!} =$$

$$\frac{12!}{6! * 2^6} = 10\,395$$

- Hemos discutido varias configuraciones estándar en combinatoria.
- La gran mayoría de los problemas de conteo que encontramos en la práctica caer en una de estas configuraciones.
- Hay situaciones más complicadas que no hemos discutido.
- Hay situaciones que son tan complicadas que se quedan sin solución.

- En el próximo capítulo, trataremos la Probabilidad.

Consideraciones finales

En este capítulo se descubrieron algunos procedimientos sistemáticos de enumeración y recuento combinatorios; de tal manera que el lector será capaz de resolver problemas sin ayuda de una instrucción. Considerando estos problemas combinatorios como un componente esencial del pensamiento formal, que fomenta el razonamiento deductivo aplicado sobre un conjunto de posibilidades hasta llegar a una conclusión.

Cuestionario

TEMA: COMPARACIÓN DE COEFICIENTES BINOMIALES

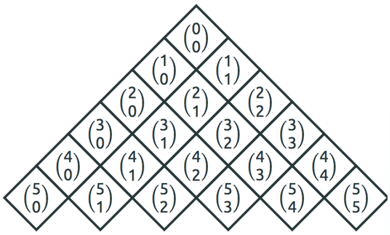
¿Cuál de los siguientes coeficientes binomiales es mayor?

- ○ $\binom{120}{75}$
- ○ $\binom{121}{76}$

TEMA: SUMAS DE COEFICIENTES BINOMIALES

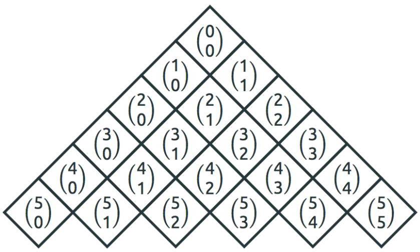
Pregunta 1

Enumeremos las filas del Triángulo de Pascal, comenzando con 0. ¿Cuál es la suma de todos los elementos en la quinta fila del Triángulo de Pascal comenzando con $\binom{5}{0}$?



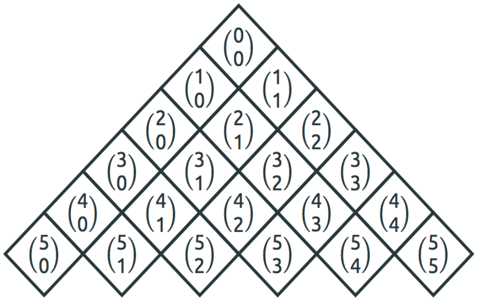
Pregunta 2

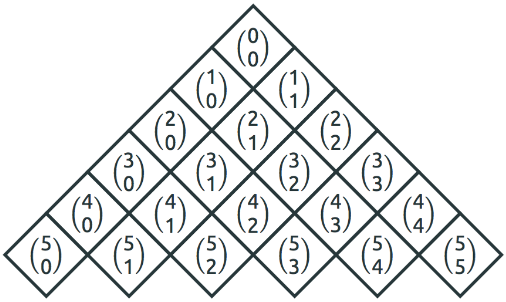
¿Cuál es la suma de todos los elementos de las primeras seis filas del Triángulo de Pascal (todas las filas se muestran a continuación)?



Pregunta 3

¿Cuál es el valor de la suma





TEMA: APLICANDO EL TEOREMA DEL BINOMIO

Encuentre los coeficientes de la expansión de $(3a - b)^3$. Es decir, representar $(3a - b)^3$ como $a_0\, a^3 + a_1\, a^2\, b^1 + a_2\, a^1\, b^2 + a_3\, b^3$.

Intente calcular estos coeficientes usando el teorema del binomio (en lugar de multiplicar $(3a - b)$ por sí mismo dos veces).

Ingrese los valores a_0, a_1, a_2, a_3. Separe los valores con comas, evite espacios.

Por ejemplo, para la pregunta $(3a - b)^3$ la respuesta seria: 9,-6,1

Cuestionario

TEMA: COMBINACIONES CON REPETICIONES

Tenemos 15 empresas en nuestro conjunto de datos y queremos clasificarlas en 4 categorías diferentes. Cada objeto pertenece exactamente a una categoría. Estamos interesados en los tamaños de las categorías ¿Cuántas distribuciones posibles de tamaños de nuestras cuatro categorías podemos obtener?

Cuestionario Práctico

Pregunta 1

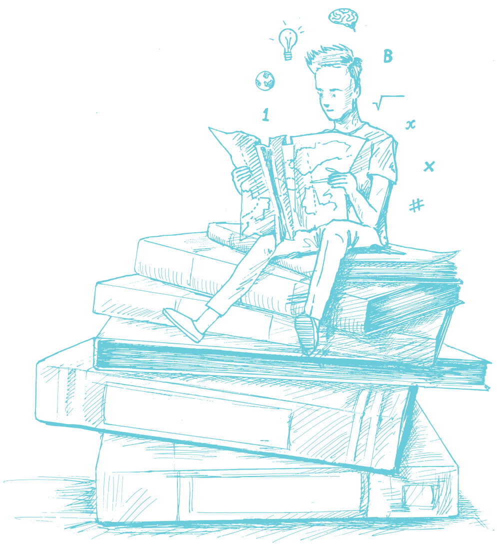
Tenemos un suministro ilimitado de agregados grava, arena y piedra triturada. Queremos hacer una mezcla con 4 unidades entre estos tres agregados (no tenemos que usar todos los agregados). No importa el orden en que usemos los agregados.

¿Cuántas mezclas diferentes podemos hacer?

Todavía no tenemos la fórmula para responder a esta pregunta, así que intente enumerar todas las mezclas primero o cree un programa que lo haga por usted. Luego, puede contar el número de mezclas a mano (tenga en cuenta que la respuesta al problema debe ser un número).

María Yazmín Abril Fernández, Yusely Johana Sánchez Hernández, Maribel Martínez Montaña

CAPÍTULO 3
PROBABILIDAD DISCRETA



CONTENIDO

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

- Dar ejemplos de experimentos aleatorios, resultados y eventos
- Calcule las probabilidades de eventos usando la definición y propiedades de la probabilidad
- Reconocer operaciones sobre eventos (unión, intercepción y complemento de un evento)

3.1 LA NOCIÓN DE EVENTO

3.1.1 Experimentos, resultados y eventos aleatorios

Iniciamos con la noción de experimento aleatorio. El primer ejemplo de experimento aleatorio se llama lanzar: si tiro una moneda, el resultado de este experimento puede ser cabeza o cola, de antemano, no se sabe antes de lanzar esta moneda cuál será el resultado del experimento.

La teoría de la probabilidad proporciona una base para la ciencia de los datos y especialmente, para las estadísticas matemáticas. Pero, comenzamos con una rama muy simple del teorema de probabilidad, que se llama probabilidad clásica o probabilidad discreta.

Tenemos un experimento y dos resultados, cara y sello, por supuesto, teóricamente es posible que tenga algunos otros resultados si pensamos en términos físicos; por ejemplo, es probable que la moneda se detenga en el borde o algo inusual suceda; no obstante, consideremos solo estos dos resultados y asumiremos que nada más puede suceder.

El conjunto de todos los resultados $\Omega = \{C,S\}$, por lo tanto, Ω es el conjunto de dos elementos, C y S, a esto se le llama espacio de muestral.

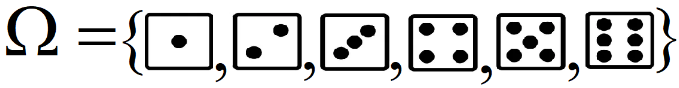
Consideremos que se lanzó una moneda dos veces, y después de cada lanzamiento, grabo el resultado

¿Cuál es el espacio de muestra para este experimento?

¿Qué tipo de resultados podemos tener? Es fácil ver que tenemos cuatro resultados diferentes. (CC, CS, SC, SS).

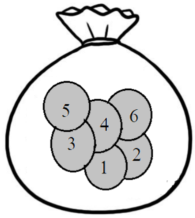
Este es un espacio de dos tuplas y cada elemento de la tupla es cara o sello. Así que, en este caso, nuestro Ω, consta de cuatro elementos.

En lugar de considerar una moneda, podemos usar un dado que nos dé aleatoriedad. En este caso, tenemos seis resultados porque tenemos un dado con seis caras, por ende, el espacio de resultados consta de seis caras.

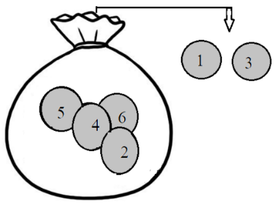


Para simplificar la notación, se pueden enumerar estos resultados y decir que, es lo mismo que solo el conjunto de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Considere otro ejemplo. En una bolsa, llena de esferas en la cual podemos seleccionar aleatoriamente una o varias de ellas.



Presumamos que nuestras esferas están enumeradas y seleccionamos dos de ellas.



En este caso, si no estamos interesados en el orden de estas esferas, entonces

¿Cuál es el espacio muestral para este experimento aleatorio si tenemos seis esferas y seleccionamos dos de ellas al azar?

En este caso, todos los resultados de este experimento son dos subconjuntos de elementos del conjunto de todas las esferas. Por lo tanto, Ω es 2 combinaciones para 6 elementos.

¿Cuál es el número de elementos en Ω? Sabemos que el número de dos combinaciones de seis elementos viene dado por el binomio. Esto es

$$\frac{6!}{2!\,4!} = 15$$

Ahora, discutimos experimentos aleatorios, y discutimos sus resultados. Informalmente, el evento es una descripción de alguna situación que puede suceder cuando realizamos nuestros experimentos aleatorios.

Por ejemplo, si lanzamos un dado, podemos preguntar,

¿Tendremos más de cuatro puntos o no?

O si lanzamos una moneda, podemos preguntar

¿Es cierto que el resultado del primer lanzamiento es el mismo que el resultado del segundo lanzamiento?

Este tipo de condiciones forman lo que se conoce como **evento** en la teoría de la probabilidad.

Consideremos un dado cargado.

Lanzamos y obtenemos el evento A "obtenemos más de cuatro puntos".

Podemos encontrar qué resultados satisfacen esta condición. Vemos que, de estos seis resultados, solo cuatro satisfacen esta condición; así que podemos decir, que, este evento A, es el siguiente subconjunto del conjunto de todos los resultados, A= {5, 6}.

Otro ejemplo. Lanzamos una moneda dos veces, y tenemos el evento B = "Que es el mismo resultado ambas veces" = {CC, HH}.

Esto significa que, de estos cuatro resultados, tenemos dos resultados que satisfacen nuestra condición: cara o sello.

Podemos considerar otro evento para el mismo experimento aleatorio.

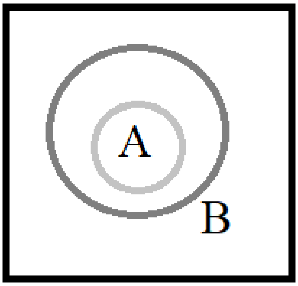
Por ejemplo, C = "Usted ve que hay exactamente tres resultados" = {CC, CS, SC}.

Lo que significa que, de los cuatro resultados, tenemos dos resultados que satisfacen nuestra condición: cara o sello.

Entonces, los eventos son solo subconjuntos del espacio de muestra o el conjunto de todos los resultados. Esto nos da la capacidad de investigarlos y considerar algunas variaciones para eventos y definir una probabilidad de eventos. Lo haremos en los próximos videos.

3.1.2 Operaciones sobre eventos

Supondremos que $X \subset \Omega$, y también o $Y \subset \Omega$. Entonces podemos considerar un nuevo evento $X \cap Y$. Eso significa que tanto X como Y suceden.



¿Qué tipo de operaciones se pueden realizar con eventos? En realidad, estas son las mismas operaciones que podemos realizar con conjuntos, porque el evento es solo un subconjunto del espacio de muestra. Sin embargo, existe una perspectiva probabilística, y eso debería discutirse. Consideremos dos eventos X, Y que se definen en el mismo espacio muestral. Así que, estos son eventos que están asociados con los mismos experimentos aleatorios.

Pensemos un ejemplo. Vamos a anotar dos dados rodando y considerar dos eventos, el evento X que significa "obtenemos menos de cuatro puntos" $X = \{1, 2, 3\}$ y el evento que es "obtenemos un número par de puntos" $Y = \{2, 4, 6\}$. Ahora nos interesa su intersección.

Significa que obtenemos menos de cuatro puntos, y al mismo tiempo el número de puntos es par $X \cap Y = \{2\}$ De estos resultados, tenemos que obtener todos los números pares, que es solo el número 2, por lo tanto, esta intersección consiste en un resultado.

Consideremos otro evento, el evento Z, en el que conseguimos más de cinco puntos ¿Qué puedes decir sobre la intersección entre X y Z?

Es imposible obtener simultáneamente menos de cuatro puntos, y más de cinco puntos. Este es un evento imposible en términos de conjunto teorema pues el conjunto de los resultados que satisfacen esta intersección está vacío $X \cap Z = \varnothing$, por lo tanto, es un evento imposible al no contener resultados.

Ahora consideremos otra operación: la unión, esto significa que al menos unos de estos dos eventos ocurren. También podemos considerar esta unión como una forma de lógica u operación. Podemos decir que, este evento sucede si X o Y ocurren, pero asumimos que, si ambos suceden, entonces también es correcto, por lo tanto, es "un lógico o" y no "exclusivo o». De la misma manera, esta intersección corresponde a lógica X e Y. Ahora podemos considerar una contraparte de no lógica.

Podemos considerar un evento que será denotado por la barra , que es el evento de que X no sucedió o el evento X no sucede. Podemos reescribir este evento X (Figura 8) de la siguiente manera:

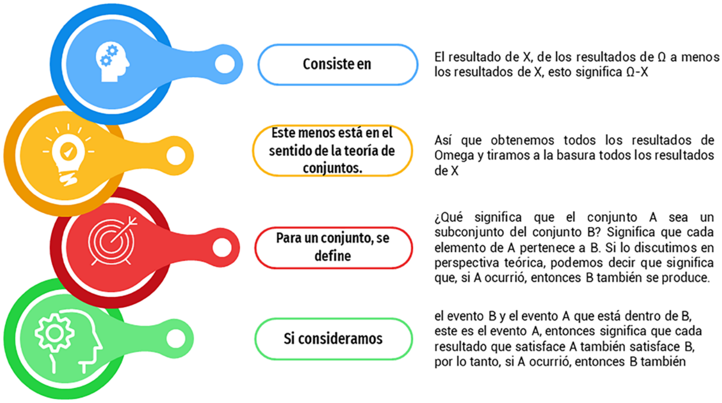


Figura 8. Descripción evento X

3.2 Calcular probabilidades

3.2.1 Probabilidad clásica

¿Qué es una probabilidad?

Para poder encontrar probabilidades y una variante con ellas, necesitamos una definición matemática de probabilidad.

Comencemos con un caso simple, cuando tenemos un experimento aleatorio con un número finito de resultados, y todos los resultados tienen la misma probabilidad son igualmente probables. Esto a veces se llama "probabilidad clásica".

> La probabilidad establece la frecuencia con la que se produce un evento. Podemos imaginar que llevamos a cabo el mismo experimento aleatorio 10.000 veces y contamos con qué frecuencia sucedió el evento y luego, podemos dividir el número de experimentos cuando este evento ocurrió por el número de todos los experimentos que se llevaron a cabo. Este es, en un sentido, el enfoque empírico de la probabilidad.

Cuando todos los resultados son igualmente probables, es más fácil encontrar la probabilidad de cualquier evento. En este caso, una probabilidad de cualquier evento A, es igual a ese número de elementos en A, número de resultados que satisfacen A, dividido por el número de resultados en todo el espacio de probabilidad. Esta es básicamente una definición de probabilidad.

Si se tienen varios resultados y tienen la misma probabilidad, entendemos que la suma de su probabilidad mostrada da uno, pues, al menos uno de ellos sucede. Entonces, entendemos que, la probabilidad de cada resultado debe ser uno sobre este valor igual a uno sobre el número de todos los resultados, y si tenemos varios resultados en nuestro evento, entonces esta probabilidad es proporcionalmente mayor. Consideremos varios ejemplos (Figura 9), sobre los que nos permiten entender cómo utilizar esta fórmula para encontrar las probabilidades.

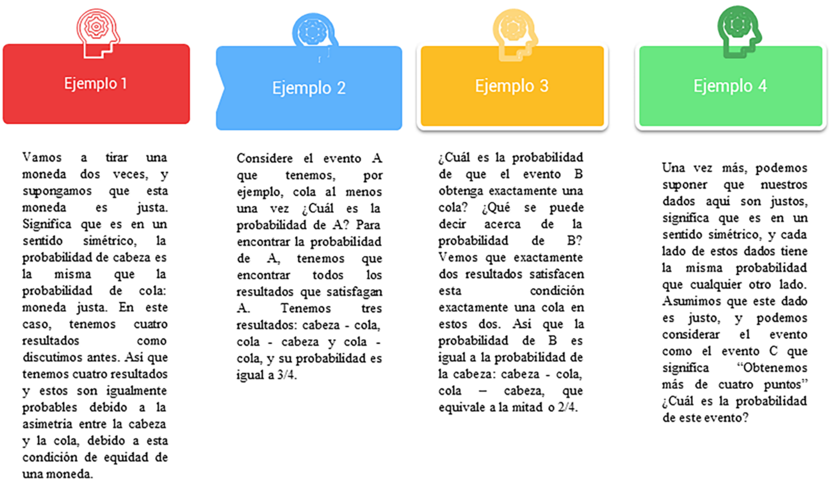
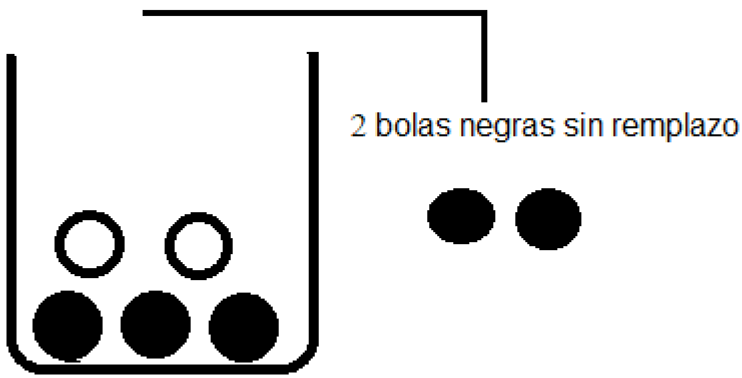


Figura 9. Ejemplos probabilidad clásica

Vemos que exactamente dos resultados satisfacen esta condición. La probabilidad de C es de , pues, tenemos seis resultados en el espacio de muestra. En este caso, vemos que, si tenemos un evento y este se describe como un subconjunto del conjunto de todos los resultados, entonces, encontrar esta probabilidad es bastante simple usando esta fórmula. Tenemos que considerar dos casos especiales.

En primer lugar, la probabilidad de toda oleada de resultados elementales de todo el espacio de muestra es igual a uno; esto, es bastante natural, porque el evento sobre la marcha significa que algunos de nuestros resultados ocurren, pero sucede cada vez, así que la probabilidad de este evento tiene que ser igual a uno. También, la probabilidad de evento imposible de un espacio vacío es igual a cero, igualmente, es natural porque el conjunto vacío corresponde al evento imposible y la probabilidad de algo que es imposible y no sucede debe ser igual a cero.

1.1.1 Probabilidades y combinatoria



Nuestro evento A, es que ambas bolas son negras ¿Cuál es la probabilidad de este evento?

Primero hay que describir el espacio de muestra de este experimento. Asuma que las bolas están enumeradas: 1, 2, 3, 4, 5. Como todas las bolas son del mismo tamaño, y no hay preferencia sobre las bolas, podemos asumir que si estamos en el caso de cuando todos los resultados que describiremos tendrán la misma probabilidad, pero ¿Cuáles son los resultados en este caso?

> Combinatoria, puede ser muy útil para encontrar probabilidades de experimentos aleatorios complejos; por ejemplo, tenemos una caja, y tres bolas negras dentro de esta, además dos bolas blancas, de las cuales escogemos dos bolas sin reemplazo y estamos interesados en la probabilidad del evento de que ambas bolas sean negras.

Si seleccionamos dos de cinco elementos, se obtiene una combinación de dos de cinco elementos, así que el conjunto de todos los resultados, **Ω**, es el conjunto de 2 combinaciones de 5 elementos. Si no estamos interesados en el orden, entonces ¿Cuál es el tamaño de este set? El tamaño del conjunto es el binomio correspondiente que es , que es 5! + 2! +3! = 10.

Ahora ¿Qué pasa con el evento A, qué resultados satisfacen este evento? Tenemos tres bolas negras en la caja, y A corresponde a que dos de ellas fueron seleccionadas, significa que todos los resultados de A, son 2 combinaciones de 3 elementos; el número de elementos que satisfacen A se puede encontrar, por la fórmula binomial.

Por supuesto, para seleccionar 2 elementos de 3, solo tenemos que seleccionar un elemento que no está en nuestra combinación, y hay tres maneras de hacerlo, lo que es igual a 3. Para encontrar la probabilidad de A, es igual al número de elementos de A dividido por el número de elementos en **Ω**, es decir 3/10.

Ejemplo

Consideremos otro ejemplo, supongamos que lanzamos una moneda 5 veces y contamos cuántas cabezas tenemos durante estas 5 pruebas. Consideremos un evento B en el que, por ejemplo, se obtienen 2 cabezas de los 5 lanzamientos ¿Cuál es la probabilidad de B?

De nuevo, primero tenemos que encontrar el conjunto de todos los resultados. En este caso, el resultado es una secuencia de cabezas y colas, así que Omega, es el conjunto de todas las secuencias de los 5 dobles de H y T, por lo tanto, esto es Omega ¿Cuántos elementos tenemos en esta

Omega?

Se sabe que por combinatoria, la búsqueda de estos dobles es igual a = 32. Para que un resultado satisfaga esta condición hay que elegir. Tenemos cinco colas y dos cabezas, estas últimas tenemos que colocarlas en algún lugar de estos espacios. Por ejemplo, se quiere poner la cabeza en dos lugares distintos, mientras que el resto de espacios libres serán ocupados por la cola. Elegir este tipo de resultado es lo mismo que elegir, cuál de estos cinco lugares debe llenarse con cabezas.

Tenemos exactamente el número de combinaciones de 5 a 2 formas de hacerlo. Este es el número de resultados. Vemos que el número de elementos en B equivale a 10, como ya calculamos. Así que P (B) es igual a , esta es la respuesta a este problema.

1.1.2 Probabilidades y operaciones sobre eventos

> Como hemos visto antes, podemos encontrar una probabilidad de un evento usando la definición si este evento se describe en términos de resultados; no obstante, en la práctica, a veces es imposible o difícil describir explícitamente un evento. Otras veces, sabemos las probabilidades de algún evento y queremos encontrar la probabilidad de alguno otro. Esto podemos hacerlo usando operaciones con eventos que discutimos antes.

Veamos cómo trabajar con estas operaciones en términos de probabilidades.

Comencemos con la unión, A y B son dos eventos que se definen en el mismo espacio de muestra en el mismo experimento aleatorio, por lo tanto, A y B son subconjuntos del mismo espacio de muestra omega, y estamos interesados en su unión ¿Qué podemos decir sobre la probabilidad de esta unión? Parece que hay una fórmula que relaciona esta probabilidad de unión con una probabilidad de A, probabilidad de B y probabilidad de su intersección.

La probabilidad de unión es igual al número de elementos en esta unión dividido por el número de elementos en omega, y para encontrar el número de elementos en la unión podemos encontrar número de elementos en . Esta fórmula funciona, porque cuando contamos elementos en esta unión, podemos contar todos los elementos en A, luego, contar todos los elementos en B, pero en este caso, los elementos en su intersección se contarán dos veces, así que, tenemos que restar este número de la suma. Luego, dividimos esta fracción en las tres fracciones:

Si los eventos A y B no se intersecan entre sí, significa que la intersección está vacía, lo que es un evento imposible, entonces la probabilidad de esta intersección es 0, en este caso la probabilidad de su unión equivale sólo a la suma de probabilidades. Esta condición es muy importante. Si se viola, entonces esta fórmula no funciona porque esta fórmula no funcionaría. Los eventos que no se cruzan entre sí, se llaman eventos mutuamente excluyentes.

Ahora, vamos a discutir la probabilidad de intersección ¿Qué podemos decir al respecto? Supongamos que conocemos la probabilidad de A y de B ¿Podemos encontrar la probabilidad de su intersección? No, porque si solo conocemos estas dos probabilidades y no sabemos cómo estos eventos están relacionados entre sí, no podemos encontrar esta intersección.

Ahora, vamos a discutir la probabilidad de intersección ¿Qué podemos decir al respecto? conociendo la probabilidad de A y de B ¿Podemos encontrar la probabilidad de su intersección? No, porque si solo conocemos estas dos probabilidades y no sabemos cómo estos eventos están relacionados entre sí, no podemos encontrar esta intersección.

Para eventos independientes podemos encontrar esta probabilidad de intersección usando solo estas dos probabilidades, pero, para permitirnos hacerlo tenemos que imponer una condición adicional. Si no sabemos nada de ellos, excepto sus probabilidades, entonces, no podemos encontrar esta probabilidad exactamente. Además, podemos usar la siguiente relación si sabemos que el evento B, es un subconjunto del evento A. Entonces se deduce que la probabilidad de B, es menor o igual a la probabilidad del evento A.

Hay diferentes casos posibles. Por ejemplo, es posible que nuestros dos eventos sean disjuntos. Por ejemplo, está el evento A y B, que son disjuntos. En este caso, la probabilidad de su intersección es 0, pero, también es posible que estos dos eventos tengan intersección distinta de cero. Supongamos que el evento A, tiene la misma probabilidad que otro evento

A. El evento B, tiene la misma probabilidad que otro evento B, pero ahora hay una intersección entre ellos, y en este caso la probabilidad de esta intersección es mayor que 0. Podemos decir que la probabilidad de intersección no es más que la probabilidad de A y la de B. Así que la probabilidad de intersección es menor o igual a la probabilidad de A y al mismo tiempo es menor o igual a la probabilidad de B, pero no podemos decir algo más sobre esta probabilidad si no sabemos nada de estos eventos, excepto de sus probabilidades.

De hecho, podemos imaginar que, si el evento B está dentro del evento A, B, es un subconjunto de A, entonces, para cada resultado en B este resultado también pertenece a A, significa que, si se produjo B, entonces ocurrió A. Por supuesto, se deduce inmediatamente que la probabilidad de B tiene que ser menor o igual a la probabilidad de A. Esta es también una relación útil.

Por último, la probabilidad del evento A, no ocurrió. Si sabemos la probabilidad de A, entonces la probabilidad de este evento equivale a 1 menos la probabilidad de A. A veces es más fácil de encontrar que la probabilidad de A, por lo tanto, esta relación puede ser útil en la práctica.

1.1.3 Análisis de procesamiento

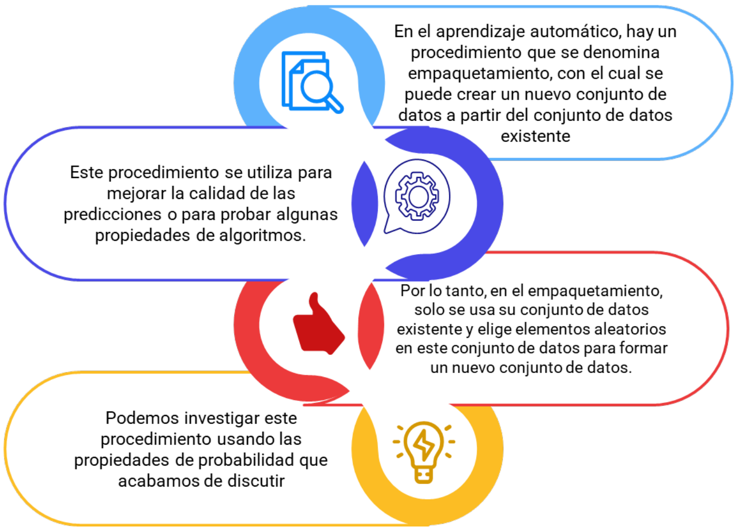


Figura 10. Empaquetamiento de datos.

Suponga que tiene un conjunto de datos en una tabla (Figura. 11) que contiene varias filas, y cada una corresponde a algún objeto, mientras que las columnas corresponden a algunas características de este objeto. Por ejemplo, los ingresos de alguna persona o la edad de esta persona.

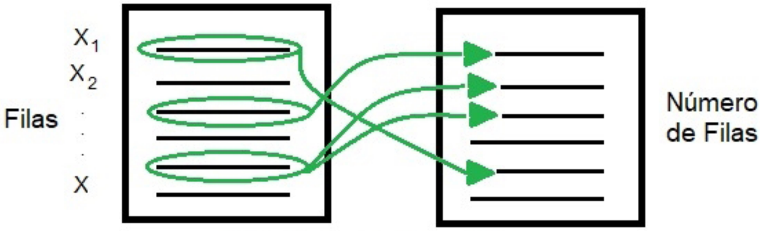


Figura 11. Muestreo con reemplazo.

Ahora, quiere crear una nueva tabla a partir de esta. En el empaquetamiento, hacemos muestreo con reemplazo, esto significa que, simplemente selecciona una fila aleatoria de la primera tabla, y dice que obtendrá esta fila a nuestra nueva tabla. Por ejemplo, esto es un muestreo con reemplazo. Significa que puede usar el mismo rol dos o varias veces. Así que cada vez, simplemente selecciona una fila aleatoria de esta tabla, e ignora el hecho de que ya se seleccionó algunos de ellos.

Esto es un muestreo con reemplazo. Se puede continuar este procedimiento hasta que tenga el mismo número de filas. Suponga que hay n filas, y continúa con este procedimiento. Por ejemplo, obtiene la segunda fila, y de nuevo, se repite hasta completar la tabla. Ahora, quiere n elementos. Para un elemento particular; por ejemplo, para el primer elemento, ¿Cuál es la probabilidad de que se incluya después de todo entre sí un nuevo conjunto de datos? Vemos que algunos de los elementos nunca se pueden incluir. Entonces ¿Cuál es la probabilidad?

El interés existe en la probabilidad del siguiente evento, por ejemplo, el primer elemento se incluye en el nuevo conjunto de datos. Este se denomina como evento B, y para encontrar su probabilidad de que el primer elemento se incluya en el nuevo conjunto de datos por primera vez, como el nuevo primer elemento, trataremos de encontrar la probabilidad de que esté incluido en el primer, en el segundo o en el tercer lugar y así sucesivamente.

Ocurre que es más fácil encontrar la probabilidad del evento opuesto, así que es más fácil encontrar la probabilidad de no B. Para encontrar esta probabilidad, primero tenemos que enumerar todos los resultados de este experimento aleatorio. Para hacerlo, hay que denotar todas las filas, los elementos de la tabla por , y así sucesivamente, . Ahora, describimos el conjunto de todos los resultados de nuestro experimento aleatorio y consideramos la nueva tabla que consta de elementos de la tabla inicial. Podemos pensar en la nueva tabla como una secuencia de instrucciones. Todos los resultados se pueden considerar como secuencias de elementos . Cada elemento aquí pertenece al conjunto de todos los elementos iniciales, de todas las filas iniciales.

Esto, es un elemento del producto cartesiano del conjunto inicial de a , por sí mismo y por tiempos, que es lo mismo que el poder cartesiano. Así que ¿Cuál es el número de tales resultados? Como sabemos por combinatoria, para encontrar el número de elementos en este conjunto, hay que tomar el número de elementos en este conjunto y calcular la potencia n de este número. Así que el número de elementos en Ω = .

Ahora ¿Qué pasa con el número de resultados en el caso en el que estamos interesados? Si el primer elemento no está incluido en el nuevo conjunto de datos, entonces, significa que, en primer lugar, tenemos n elemento excepto . En el segundo lugar tenemos n elemento excepto , y así sucesivamente. Así que, para cada posición aquí, tenemos n menos una opción. Por lo tanto, el número de elementos que satisfacen estos eventos es n - . Ahora, podemos encontrar la probabilidad correspondiente. Probabilidad del hecho de que B no ocurrirá es igual a $\frac{n-1^n}{n^n}$ que es lo mismo que, $1 -1$

$$\frac{}{n^n}$$

$$|\Omega| = n^n$$

$$|\bar{B}| = (n-1)^n$$

$$P(\bar{B}) = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2.7}$$

Como probablemente sabrá por el cálculo, si n es grande este valor es cercano a $\frac{1}{e}$ que es más de 2,7. Esta es la probabilidad de que el primer elemento no se incluya en el nuevo conjunto de datos ¿Cuál es la probabilidad de que el primer elemento se incluya en el nuevo conjunto de datos? Se puede calcular fácilmente porque sabemos que la probabilidad de B es igual a una probabilidad menos de no.

B. Es algo así como $\frac{1\text{-}1}{2.7}$ Vemos en esta discusión, que, para cada elemento que tenemos, lo consideramos solo el primer elemento, pero podemos cambiarlo a cualquier otro elemento.

Para cada elemento, aquí, tenemos una probabilidad de alrededor de para que este elemento no se incluya en este nuevo conjunto de datos, y la probabilidad de que alrededor de se incluyan en este nuevo conjunto de datos. Lo anterior, nos permite utilizar la llamada validación cruzada fuera de la bolsa.

Anteriormente, solo considerábamos espacios de probabilidad para los cuales todos los resultados tienen probabilidades iguales. Estos ajustes son bastante simples de analizar, pero es un poco limitante. Por ejemplo, podemos considerar una disputa para la que la probabilidad de cabeza no es la misma que la probabilidad de cola. Este modelo y sus generalizaciones pueden ser muy útiles para el análisis. Así que ahora, consideremos los espacios de probabilidad con probabilidades arbitrarias asociadas a los resultados.

1.1.4 Resultados con probabilidades no iguales

Para describir este espacio de probabilidad primero tenemos que enumerar todos sus resultados: $\Omega_{1,}$ Ω_2, … ,Ω_n

Para obtener el resultado aquí, hay que prescribir la probabilidad correspondiente. Así que tengo una secuencia , y así sucesivamente P*n*. Estas cosas son probabilidades de los resultados correspondientes. Así que la probabilidad de un evento de Ω_i, es el evento que consiste en exactamente un resultado igual a P*1*.

Dado que estas cifras son probabilidades, se deben cumplir varias condiciones. En primer lugar, todos ellos, no deben ser negativos. Ahora, esperamos que uno de estos resultados ocurra, en cualquier caso. Significa que la suma de estas probabilidades debe ser igual a 1. Si se cumplen estas dos condiciones, estos números junto con estos resultados forman el espacio de probabilidad, el espacio de muestra y las probabilidades. Ahora, tenemos algún conjunto A que es el subconjunto de Omega, por lo tanto, A es un evento en nuestro espacio de probabilidad ¿Qué podemos decir acerca de su probabilidad? Es natural descomponer esta A como una suma de eventos de este tipo.

Pensemos que A consiste en los siguientes resultados. Ωi1, Ωi2 y así sucesivamente, Ωik. Así que, tenemos elementos K en este conjunto. Para encontrar esta probabilidad, podemos descomponer A como la unión de los siguientes eventos. Esto es Ωi1, Ω2 y así sucesivamente Ωik.

Tenga en cuenta que, estos eventos son mutuamente disjuntos, porque los resultados no se intersecan entre sí. Los resultados por definición no pueden ocurrir juntos en el mismo experimento. Por lo tanto, estos eventos son mutuamente disjuntos y en este caso, podemos usar la fórmula que la probabilidad de unión equivale a algunas de las probabilidades correspondientes. Así que, la probabilidad de A es igual a la probabilidad de Ω1 + la probabilidad de Ωi1 + la probabilidad de Ωi2 y así sucesivamente. Así que ahora, está probabilidad es igual a la correspondiente Pi1 y esta probabilidad es igual a Pi2, y así sucesivamente, Pik.

Podemos decir que, esto es suma para todos los resultados sobre el pequeño que pertenece a nuestro evento A de P. Esto será P Ωi, aquí Pi. Esto permite definir la probabilidad de un evento arbitrario. Imaginemos que tiene una lotería y hay tres resultados posibles: un gran premio, un premio pequeño o no obtener ningún premio, lo que es iguala a Ω1, Ω2 y Ω3 respectivamente.

Ahora hay que definir probabilidades. Asuma que P1 es pequeño y que P2, es un poco más grande. Para encontrar a P3, se puede hacer de la siguiente manera: Esto es 1-P1-P2, porque deben resumir hasta 1. Así que esta es la probabilidad de que no haya premio. Ahora, podemos considerar algún evento. Por ejemplo, evento A que queremos algún premio. No importa si es grande o pequeño ¿Cuál es la probabilidad de A? Tenemos dos resultados que satisfacen A: Ω1 y Ω2 y, por lo tanto, su probabilidad es igual a P1+P2.

Esto nos muestra que es fácil definir los espacios de probabilidad de esta manera, sin embargo, anteriormente, discutimos algunas propiedades de probabilidades, pero ¿Todavía se mantienen en estos nuevos ajustes? De hecho, sí. Más o menos todo lo que discutimos anteriormente funciona para estos espacios de probabilidad con resultados no igualmente probables.

Recordemos los hechos clave que hemos discutido: primero, la probabilidad de unión de dos eventos sigue siendo igual a la probabilidad del primer evento, más la probabilidad del segundo evento, menos la probabilidad de su intersección. La prueba es muy similar a la prueba del teorema en los escenarios donde todos los resultados son los mismos; la probabilidad de un conjunto vacío es igual a 0, esto es por definición porque si tenemos un conjunto vacío de resultados en esta suma no tenemos términos, no hay sumandos, por lo que esta suma es igual a 0. Entonces la probabilidad de todo el espacio de probabilidad es igual a 1. Esto se debe a esta condición.

La probabilidad de que B sea menor o igual a la probabilidad de A, si B es un subconjunto de A.

Esto también es muy fácil de probar, usando la definición. Así que, básicamente todos los hechos que discutimos funcionan en la configuración. Estos ajustes nos permiten considerar espacios de probabilidad más interesantes, pero, más adelante en los coches de probabilidad, vamos a ampliar la noción de espacio de probabilidad aún más. Vamos a discutir los espacios de probabilidad con un número infinito de resultados, e incluso un número no contable de resultados. También consideraremos muchas nociones probabilísticas importantes, como la noción de eventos independientes. Esto, nos permite construir una base para las estadísticas matemáticas y otras herramientas matemáticas que se utilizan en la ciencia de datos.

Consideraciones finales

El concepto de probabilidad discreta permite establecer toda la gama posibles valores de un suceso cuando este se describe con una variable aleatoria discreta. En este capítulo se mostraron ejemplos del uso de la distribución binomial. Con el fin de modelar matemáticamente entornos que simulen condiciones aleatorias de la vida diaria o experimental

Cuestionario

TEMA: EXPERIMENTOS, RESULTADOS Y EVENTOS

1. Se lanza una moneda 5 veces y se registra el resultado de cada lanzamiento (el orden importa) ¿Cuántos resultados tenemos en el espacio muestral de este experimento aleatorio?

2. Una moneda lanzada 3 veces ¿Cuántos resultados pertenecen al evento A? Ocurrieron exactamente dos caras.

3. Una moneda lanzada 3 veces ¿Cuántos resultados pertenecen al evento B? Se produjeron al menos dos caras.

4. Un par de dados enrollados. Asociamos con este experimento aleatorio un espacio muestral para el que todos los resultados tienen la misma probabilidad ¿Cuántos resultados tenemos?

TEMA: OPERACIONES SOBRE EVENTOS

1. Sean A y B dos eventos ¿Qué es $A \cap B$?

   - Probabilidad de que el evento A y B ocurran en el mismo experimento.
   - Evento de que A y B ocurren en el mismo experimento.
   - Evento de que nada de A o B ocurrió en el mismo experimento.
   - Evento de que A, B o ambos ocurrieron en el mismo experimento.

2. Una moneda es lanzada 3 veces. Sea A el evento que arroja resultado cara y B el evento que arroja como resultado sello. ¿Cuántos resultados pertenecen al evento $A \cap B$?

3. Una moneda es lanzada 3 veces. Sea A el evento que arroja resultado cara y B el evento que arroja como resultado sello. ¿Cuántos resultados pertenecen al evento $A \cup B$?

4. Una moneda es lanzada 3 veces. Al menos un lanzamiento arroja cara ¿Cuántos resultados pertenecen al evento

TEMA: PROBABILIDADES POR DEFINICIÓN

1. Hay una caja con 5 bolas verdes y 3 amarillas. Se eligieron dos bolas al azar (sin reemplazo) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean verdes?

- $\dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{8}{5}}$

- $\dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}$

- $\dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{5}{3}}$

- $\dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{5}{2}}$

Cuestionario

1. Hay una caja con 5 bolas verdes y 3 amarillas. Se eligieron dos bolas al azar (sin reemplazo) ¿Cuál es la probabilidad de que una bola sea verde y otra amarilla?

○ $$\frac{\binom{8}{5} * \binom{8}{3}}{\binom{8}{2}}$$

○ $$\frac{\binom{5}{1} * \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}$$

○ $$\frac{\binom{8}{2}}{\binom{5}{1} * \binom{3}{1}}$$

○ $$\frac{\binom{5}{1} * \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}$$

TEMA: PROBABILIDADES Y COMBINATORIAS

1. Sean A y B algunos eventos definidos en el mismo espacio de probabilidad y sabiendo que P(A) = 1/2, P(B) = 1/3 y P(AUB) = 2/3. Encuentre P(A∩B) como fracción propia.

2. Un dado es tirado tres veces ¿Cuál es la probabilidad de que "6" salga al menos una vez durante esta tirada?

TEMA: PROBABILIDADES USANDO REGLAS

1. Sean A y B algunos eventos definidos en el mismo espacio de probabilidad, sabemos que P(A)=1/2, P(B)=1/3 y P (A∪ B)=2/3 . Encuentra P(A∩B) (como una fracción propia).

2. Un dado justo lanzado tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que "6" ocurra al menos una vez durante esta tirada?

TEMA: RESULTADOS CON PROBABILIDADES DESIGUALES

1. Consideremos un espacio muestral con cinco resultados:Denota probabilidad de resultado por ¿Cuál de las siguientes colecciones de números definir correctamente el espacio de probabilidad?

Cuestionario

1. Considere dados no simétricos para los cuales la probabilidad de obtener k puntos es proporcional a k=1, 2, 3, 4, 5, 6. (Es decir, la probabilidad de obtener 2 es el doble de la probabilidad de obtener 1). ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1 punto en este dado? Ingrese la fracción adecuada.

2. Considere dados no simétricos para los cuales la probabilidad de obtener k puntos es proporcional a k, k=1, 2, 3, 4, 5, 6 (Es decir, la probabilidad de obtener 2 es el doble de la probabilidad de obtener 1). ¿Cuál es la probabilidad de obtener menos de 3 puntos? Introduzca la fracción adecuada.

BIBLIOGRAFÍA

Bernard Kolman, Robert C. Busby, & Sharon Ross. (1997). *Estructuras de matemáticas discretas para la computación* (Pearson Educación). https://books.google.es/books?id=7GJXRsNkglIC

Francisco Cirre. (2004). *Matemática discreta* (Anaya Educación). https://books.google.com.co/books?id=R8FoAAAACAAJ

José Villalpando, & Andrés García. (2014). *Matemáticas Discretas: Aplicaciones y Ejercicios* (Grupo Editorial Patria, Ed.). https://books.google.com.co/books?id=WdThBAAAQBAJ

Kenneth H. Rosen. (2004). *Matemática discreta y sus aplicaciones* (McGraw-Hill, Vol. 5). https://books.google.com.co/books?id=dPZyPgAACAAJ

Luis Verde Star. (1996). *Matemática discreta y combinatoria* (Anthropos, Vol. 1). https://books.google.com.co/books?id=oQCx4wEbXtoC

Richard Johnsonbaugh. (1997). *Matemáticas discretas*. https://books.google.com.co/books?id=gQBMgIsp30kC

Sébastien Chazallet. (2016). *Python 3: los fundamentos del lenguaje* (ENI). https://books.google.es/books?id=KRYyvKmZvpwC

Seymour Lipschutz, Marc Lars Lipson, & Marc Lipson. (2004). *2000 problemas resueltos de matemática discreta* (Jesús Carretero Pérez, Ed.; McGraw-Hill). https://books.google.com.co/books?id=ffyKGAAACAAJ

Valentín Gregori, & J. C. Ferrando. (2014). *Matemática discreta: Manual teórico-práctico* (Reverte, Vol. 2). https://books.google.com.co/books?id=BpLmDwAAQBAJ

Se terminó de editar el libro impreso en enero de 2023 en los talleres de Editorial Jotamar S.A.S. Tunja, Boyacá Colombia.

COLECCIÓN ACADÉMICA UPTC N°. 55

Este libro se pensó para un curso de introducción a las matemáticas discretas y primeros años de la educación superior. La exposición de conceptos es sencilla, de fácil comprensión y se complementa con ejercicios que ayudan a contextualizar y facilitar la aplicación en diversas áreas de conocimiento. Adicionalmente, se entrega un texto que no requiere de conocimientos matemáticos profundos. Finalmente, cada capítulo, cuenta con una colección de problemas propuestos, encaminados al afianzamiento de los conceptos desarrollados en el texto.

Uptc Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
VIGILADA MINEDUCACIÓN
Vicerrectoría de Investigación y Extensión
Dirección de Investigaciones
EDITORIAL UPTC