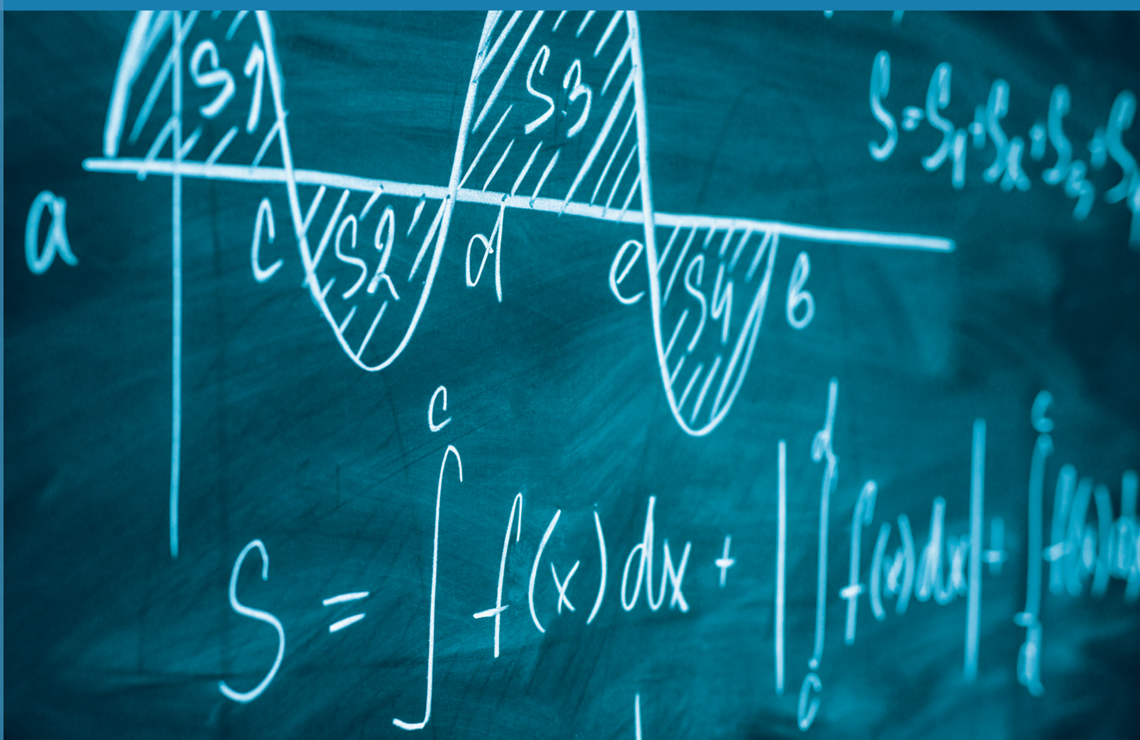
telekolleg

Mathematik

Übungs- und Prüfungsaufgaben



wbg Academic

BR media VERLAG

Telekolleg

Mathematik

Übungs- und Prüfungsaufgaben

Josef Dillinger

wbg Academic

BR media VERLAG

Telekolleg wird veranstaltet von den Bildungs- und Kultusministerien von Bayern und Brandenburg sowie vom Bayerischen Rundfunk (BR).

Nähere Informationen zu Telekolleg:
www.telekolleg-info.de

Dieser Band enthält das Arbeitsmaterial zu den vom Bayerischen Rundfunk produzierten Lehrsendungen.

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über http://dnb.de abrufbar.

In Lizenz der BRmedia Service GmbH

wbg Academic ist ein Imprint der wbg.

Unveränderter Nachdruck der 1. Auflage 2010
Die Herausgabe des Werkes wurde durch die Vereinsmitglieder der wbg ermöglicht.
Umschlaggestaltung: schreiberVIS, Seeheim
Umschlagabbildung: Zaripov Andrei/stock.adobe.com
Gedruckt auf säurefreiem und alterungsbeständigem Papier
Printed in Germany

Besuchen Sie uns im Internet:
www.wbg-wissenverbindet.de

ISBN 978-3-534-45042-8

Elektronisch sind folgende Ausgaben erhältlich:
eBook (PDF): 978-3-534-45043-5

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Telekolleg MultiMedial,

das vorliegende Buch wurde für das Telekolleg MultiMedial konzipiert und bietet eine Menge an Übungs- und Prüfungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen zu den verschiedenen Themenbereichen im Fach Mathematik.

Die Arbeitsbögen zu den Sendungen im Fernsehen und den Lektionen in den Büchern sind meist nur ergänzende „Häppchen“ zum entsprechenden Mathematikstoff. In diesem Buch hingegen wird der Lernstoff in Aufgaben so dargestellt, wie er in den Prüfungen nach dem 1. Trimester, im 4. Trimester oder in der Abschlussprüfung (Gesamtstoff) abgefragt wird.

Die Themenbereiche des Buches sind entsprechend dem Ablauf der Sendungen und Lerninhalte des Telekollegs MultiMedial im Fach Mathematik angeordnet.
Um diese gezielt üben zu können, finden Sie auf den Seiten 174 und 175 ein Stichwortverzeichnis, das einen schnellen Zugriff auf Übungen ermöglicht.

Die dargebotenen Aufgaben mit den ausführlichen Lösungsvorschlägen sollen Ihnen bei der Prüfungsvorbereitung helfen sowie ein Zeitgefühl vermitteln, damit Sie in der Prüfung auch auf dieses Kriterium achten: Die Aufgaben im Umfang von zwei DIN-A4-Seiten (Aufgaben zur Feststellungsprüfung I und Feststellungsprüfung II) sind in etwa 120 Minuten zu lösen, die Aufgaben zur Abschlussprüfung in 180 Minuten.

Bei den Feststellungs- und Abschlussprüfungen ist die Punkteverteilung links neben den Aufgaben angegeben. Maximal können 100 BE (Bewertungseinheiten) erzielt werden. Auch bei einigen Übungsaufgaben zu den Themenbereichen ist die Punkteverteilung angezeigt.

Die Feststellungsprüfung I und die Feststellungsprüfung II bzw. die Abschlussprüfung sollten nach folgenden Abschnitten gelöst werden können:

Algebra
Vektorrechnung und
Analytische Geometrie
} Feststellungsprüfung I

Stochastik } Abschlussprüfung

Differenzialrechnung
Integralrechnung
} Feststellungsprüfung II

Ich wünsche Ihnen beim Durcharbeiten dieses Buches viele Erfolgserlebnisse und auch bei den Prüfungen und der Fachhochschulreifeprüfung den Erfolg, den Sie sich erarbeitet haben.

Josef Dillinger

Inhaltsverzeichnis

Mathematik

Themenbereich – Algebra

Feststellungsprüfung I / Abschlussprüfung

Übungsaufgabe 1

1.0 Gegeben sind folgende Funktionsgleichungen der Geraden g_1, g_2 und g_v:

$$g_1: y = 2 \cdot x - 6$$
$$g_2: y = \frac{1}{2} \cdot x + 3$$
$$g_v: y = m \cdot x + b$$

1.1 Berechnen Sie $g_1 \cap g_2$ und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S an.

1.2 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g_v so, dass g_v parallel zu g_1 ist und der Punkt $P(1|3)$ Element der Geraden g_v ist.

1.3 Zeichnen Sie g_1 und g_2 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. (1 LE = 1 cm)

1.4 Unter welchem Winkel α schneidet der Graph der Geraden g_1 die x-Achse?

2.0 Gegeben ist die Menge der Parabeln p_c mit $p_c: y = x^2 - 4 \cdot x + c$.

2.1 Für welche Werte von c existieren keine Schnittpunkte der Graphen der Parabeln p_c mit der x-Achse?

2.2 Für weitere Berechnungen gelte $c = -1$ und somit $p_{-1}: y = x^2 - 4 \cdot x - 1$. Berechnen Sie die Schnittpunkte von p_{-1} mit den Koordinatenachsen.

2.3 Untersuchen Sie g_1 und p_{-1} auf gemeinsame Punkte und geben Sie, falls vorhanden, die Koordinaten der Schnittpunkte an.

2.4 Berechnen Sie den Scheitel S der Parabel p_{-1}.

2.5 Zeichnen Sie den Graphen der Parabel p_{-1} für $0 \leq x \leq 5$.

2.6 Betrachten Sie den Graphen der Parabel p_{-1}. Wie müsste der Wert c der Parabel p_c lauten, damit der Graph der Parabel p_c die x-Achse berührt?

Lösung Mathematik
Themenbereich – Algebra
Feststellungsprüfung I/Abschlussprüfung
Übungsaufgabe 1

1.1 Gemeinsame Punkte von Geraden

Geraden können parallel sein, identisch sein oder sich schneiden.
Um Geraden auf gemeinsame Punkte zu untersuchen, wird die Schnittmenge der Geraden gebildet.

$$g_1 \cap g_2$$
$$y_1 = y_2$$
$$2 \cdot x - 6 = \frac{1}{2} \cdot x + 3 \qquad \left| -\frac{1}{2} \cdot x + 6 \right.$$
$$\frac{3}{2}x = 9 \qquad \left| \cdot \frac{2}{3} \right.$$
$$x = 6$$

Die Geraden schneiden sich an der Stelle x = 6.
Um den y-Wert zu errechnen, wird x = 6 in g_1 oder g_2 eingesetzt.
x = 6 in g_1: $y = 2 \cdot 6 - 6 = 12 - 6 = 6 \quad \Rightarrow S(6|6)$

1.2 Parallele Geraden

Geraden sind parallel, wenn sie die gleiche Steigung m haben.
$g_v \parallel g_1 \Rightarrow m_v = m_1 \Rightarrow m_v = 2$

$$g_v: y = 2 \cdot x + b$$

Alle Geraden $g_v: y = 2 \cdot x + b$ sind parallel zur Geraden g_1. Um aus der Geradenschar diejenige zu bestimmen, die durch den Punkt P(1|3) geht, werden die Koordinaten des Punkts P in die Funktionsgleichung eingesetzt.

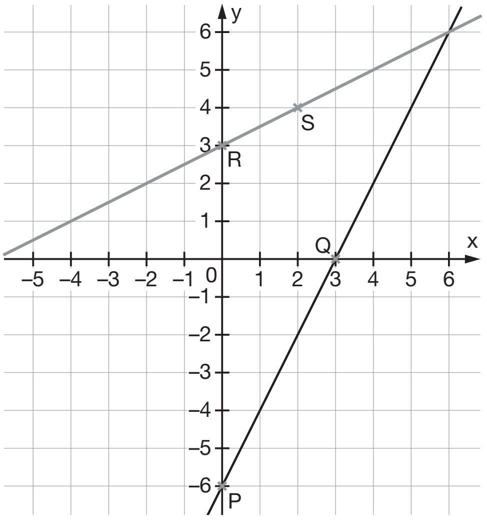
$$g_v: 3 = 2 \cdot 1 + b \qquad | -2$$
$$1 = b$$
$$g_v: y = 2 \cdot x + 1$$

1.3 Graph der Funktion

Damit der Graph einer linearen Funktion (Gerade) gezeichnet werden kann, benötigt man zwei Punkte des Graphen.

$g_1: y = 2 \cdot x - 6$
P(0|–6); Q(3|0)

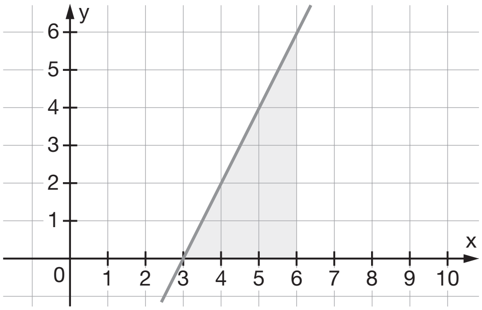
$g_2: y = \frac{1}{2} \cdot x + 3$
R(0|3); S(2|4)



1

1.4 Schnittwinkel Graph – x-Achse

Der Winkel zwischen Graph und x-Achse kann auf verschiedene Arten berechnet werden.



1. Im grauen rechtwinkligen Dreieck haben die Katheten die Längen 3 LE und 6 LE.

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{6}{3} = 2$

$\Rightarrow \alpha = \arctan 2$

$\alpha = 63{,}4°$

2. Für die Steigung einer Geraden bezüglich einer Waagrechten gilt:

$\tan\alpha = m$

$m = 2$

$\tan\alpha = 2$

$\Rightarrow \alpha = 63{,}4°$

2.1 Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellenberechnung)

Es existieren keine Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse, wenn für den Wert der Diskriminante $D = b^2 - 4ac < 0$ gilt.

$\Rightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c < 0$

$16 - 4c < 0 \quad | + 4c$

$16 < 4c \quad | : 4$

$4 < c$

$\Rightarrow$ Für alle $c > 4$ und $c \in \mathbb{R}$ gibt es keine Schnittpunkte mit der x-Achse.

2.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen bedeuten Schnittpunkt mit der y-Achse und Schnittpunkt mit der x-Achse.

Schnittpunkt mit der **y-Achse** $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y(0)$

$y(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 - 1 = -1$

$S_y(0|-1)$

Schnittpunkt mit der **x-Achse** (Nullstellen) $\Rightarrow y = 0$

$0 = x^2 - 4 \cdot x - 1$

$$x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$\Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{5};\ \ x_2 = 2 - \sqrt{5}$

$N_1(2 + \sqrt{5}|0);\ \ N_2(2 - \sqrt{5}|0)$

2.3 Schnittpunkte von Graphen

Soll die Schnittmenge (gemeinsame Punkte) zweier Graphen bestimmt werden, so werden die y-Werte der Funktionsgleichungen gleichgesetzt.

$$g_1 \cap p_{-1} \Rightarrow$$
$$y_g = y_p$$
$$2 \cdot x - 6 = x^2 - 4 \cdot x - 1 \qquad | -2x + 6$$
$$0 = x^2 - 6x + 5$$
$$x_{1/2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$
$$x_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5;\ \ x_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Um die y-Koordinaten der Schnittpunkte zu errechnen, werden die x-Werte in die Funktionsgleichung von g_1 oder p_{-1} eingesetzt.

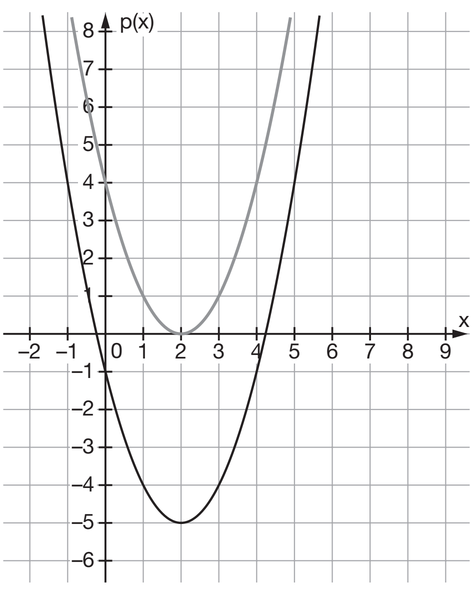
$x_1 = 5$ in g_1: $y = 2 \cdot 5 - 6 = 10 - 6 = 4 \Rightarrow S_1(5|4)$
$x_2 = 1$ in g_1: $y = 2 \cdot 1 - 6 = 2 - 6 = -4 \Rightarrow S_2(1|-4)$

2.4 Scheitelpunkt einer Parabel

Die x-Koordinate des Scheitelpunkts einer Parabel kann mit der Formel $x_s = -\frac{b}{2a}$ berechnet werden. Die y-Koordinate wird errechnet, indem man den ermittelten x-Wert in die Funktionsgleichung der Parabel einsetzt.

p_{-1}: $x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$; $y_s = 2^2 - 4 \cdot 2 - 1 = 4 - 8 - 1 = -5$; $S(2|-5)$

2.5 Graph der Funktion



2.6 Berührpunkt mit der x-Achse

Damit der Graph der Parabel p_c die x-Achse berührt, muss der Scheitel um 5 LE nach oben verschoben werden.
$\Rightarrow c = -1 + 5 = 4$
$\Rightarrow p_4$: $y = x^2 - 4x + 4$

Scheitelpunktform:
p_4: $y = (x-2)^2$

(siehe Abbildung)

Mathematik
Themenbereich – Algebra
Feststellungsprüfung I / Abschlussprüfung
Übungsaufgabe 2

1.0 Der Graph P_1 einer quadratischen Funktion p_1 der Form $y = ax^2 + bx + c$ schneidet die x-Achse in $N_1(-2|0)$, die y-Achse in $T(0|3)$ und verläuft durch den Punkt $P(-4|-5)$.

1.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel p_1.

1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des weiteren Schnittpunkts der Parabel p_1 mit der x-Achse sowie die Koordinaten des Scheitelpunkts.

1.3 Die Parabel p_2 ist durch die Funktionsgleichung $y = x^2 + x - 2$ gegeben.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Parabeln p_1 und p_2.

1.4 Berechnen Sie den Scheitel der Parabel p_2.

1.5 Zeichnen Sie in ein kartesisches Koordinatensystem den Graphen P_1 der Parabel p_1 im Bereich $-4 \leq x \leq 8$ sowie den Graphen P_2 der Parabel p_2 im Bereich $-3 \leq x \leq 3$.
(Maßstab: 1 LE = 1 cm)

2.0 Die Gerade g schneidet die y-Achse in $T(0|3)$ und ist parallel zur Geraden
h: $y = x - 4$.

2.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden g.
Tragen Sie g in das Koordinatensystem von 1.5 ein.

2.2 Zeigen Sie, dass die Gerade g: $y = x + 3$ die Parabel p_1 berührt.

2.3 Die Gerade g schließt im II. Quadranten mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie diese Fläche und berechnen Sie deren Maßzahl.

2.4 Gegeben sei nun die Menge der Geraden g_k: $y = x + k$, $k \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von k geht die Gerade durch den Punkt $P(-4|-5)$?

2.5 Für welche Werte von k haben die Geraden g_k zwei gemeinsame Punkte mit dem Graphen P_1 der Parabel p_1?

Lösung Mathematik
Themenbereich – Algebra
Feststellungsprüfung I/Abschlussprüfung
Übungsaufgabe 2

1.1 Erstellen einer Funktionsgleichung

Damit die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ erstellt werden kann, müssen für die drei Unbekannten a, b und c drei Gleichungen gefunden werden. Durch Einsetzen der drei Punkte N_1, T und P in die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ erhält man die erforderlichen Gleichungen.

$$\begin{aligned}
&\text{I:} && 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\
&\text{II:} && 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 3 \\
&\text{III:} && -5 = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c
\end{aligned}$$

c = 3 in I und III

$$\begin{aligned}
&\text{I:} && 0 = 4a - 2b + 3 \\
&\text{III:} && -5 = 16a - 4b + 3
\end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems mit dem Additionsverfahren und durch Multiplikation der Gleichung I mit (–2)

$$\begin{aligned}
&\text{I:} && 0 = -8a + 4b - 6 \\
&\text{III:} && -5 = 16a - 4b + 3 \\
& && -5 = 8a - 3 \qquad | + 3 \\
& && -2 = 8a \Rightarrow a = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$a = -\frac{1}{4}$ in I: $0 = -8\left(-\frac{1}{4}\right) + 4b - 6$

$$0 = 2 + 4b - 6 \Rightarrow b = 1$$

Gleichung: $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$

1.2 Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse

Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstellen) $\Rightarrow y = 0$

$$0 = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 3}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 3}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm 2}{-\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 6$

$N_1(-2|0)$; $N_2(6|0)$

Scheitelpunkt einer Parabel

Die x-Koordinate des Scheitelpunkts einer Parabel kann mit der Formel $x_s = -\frac{b}{2a}$ berechnet werden. Die y-Koordinate wird errechnet, indem man den ermittelten x-Wert in die Funktionsgleichung der Parabel einsetzt.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$y_s = -\frac{1}{4} \cdot 2^2 + 2 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$$

$\Rightarrow S(2|4)$

1.3 Schnittpunkte von Graphen

Soll die Schnittmenge (gemeinsame Punkte) zweier Graphen bestimmt werden, so werden die y-Werte der Funktionsgleichungen gleichgesetzt.

$$\begin{aligned}
P_1 \cap P_2 \quad &\Rightarrow \\
y_1 &= y_2 \\
-\frac{1}{4}x^2 + x + 3 &= x^2 + x - 2 && |-x^2 - x - 3 \\
-\frac{5}{4}x^2 &= -5 && |\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) \\
x^2 &= 4 && |\sqrt{} \\
|x| &= 2 \\
\Rightarrow \quad x_1 &= -2;\ x_2 = 2
\end{aligned}$$

Um die y-Koordinaten der Schnittpunkte zu errechnen, werden die x-Werte in die Funktionsgleichung von P_1 oder P_2 eingesetzt.

$x_1 = -2$ in P_2: $y = (-2)^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow S_1(-2|0)$
$x_2 = 2$ in P_2: $y = 2^2 + 2 - 2 \quad = 4 + 2 - 2 = 4 \quad \Rightarrow S_2(2|4)$

1.4 Scheitelpunkt einer Parabel

Die x-Koordinate des Scheitelpunkts einer Parabel kann mit der Formel $x_s = -\frac{b}{2a}$ berechnet werden. Die y-Koordinate wird errechnet, indem man den ermittelten x-Wert in die Funktionsgleichung der Parabel einsetzt.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

$$y_s = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow S\left(-\frac{1}{2}\middle|-\frac{9}{4}\right)$$

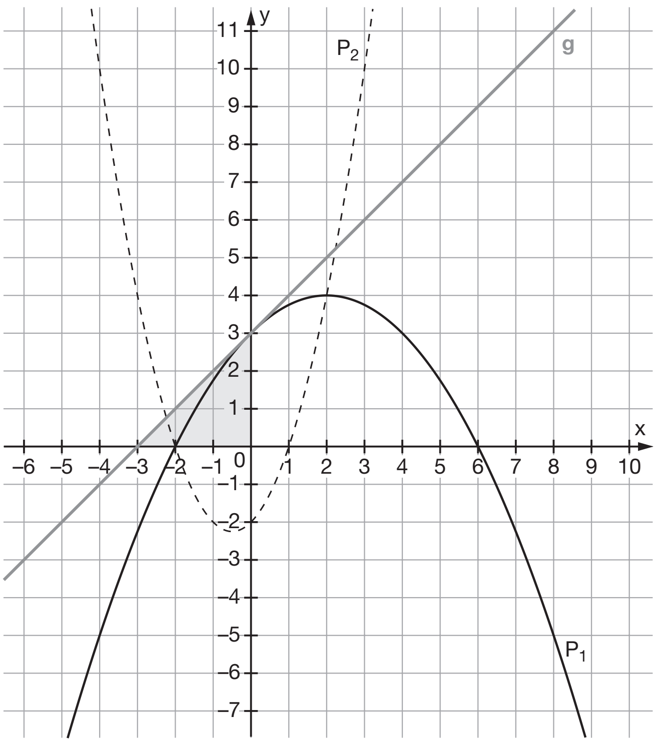
1

1.5 Graph der Funktion

2.1 Um den Graphen einer Funktion zeichnen zu können, müssen Punkte des Graphen, darunter auch die Punkte an den Grenzen des zu zeichnenden Bereichs, berechnet werden. Die schon berechneten Koordinatenwerte aus den bisherigen Aufgaben sind zu verwenden.

P_1: $f(-4) = -5$; $f(8) = -5$; $S(2|4)$; $N_1(-2|0)$; $N_2(6|0)$; $T(0|3)$

P_2: $f(-3) = 4$; $f(3) = 10$; $S\left(-\frac{1}{2}\middle|-\frac{9}{4}\right)$



2.1 Parallele Geraden

Geraden sind parallel, wenn sie die gleiche Steigung m haben.

$g \parallel h \Rightarrow m_g = m_h \Rightarrow m_g = 1$

$g\colon y = x + b$

Die Koordinaten des Punkts T(0|3) werden in die Funktionsgleichung eingesetzt.

$g\colon 3 = 0 + b$

$3 = b$

$g\colon y = x + 3$

2.2 Berührpunkt

Soll die Schnittmenge (gemeinsame Punkte) zweier Graphen bestimmt werden, so werden die y-Werte der Funktionsgleichungen gleichgesetzt. Bei einem Berührpunkt existiert nur ein Schnittpunkt.

$g \cap P_1$

$y_g = y_P$

$x + 3 = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \qquad | -x-3$

$0 = -\frac{1}{4}x^2$

$x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow$ Berührpunkt B(0|3)

2.3 Flächenberechnung

Für die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks gilt $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ mit $g = 0 - (-3) = 3$ und $h = 3 - 0 = 3$.

$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{,}5$

2.4 Gerade durch Punkt

Um den Wert von k zu bestimmen, werden die Koordinaten des Punkts P(–4|–5) in die Funktionsgleichung eingesetzt. Damit wird die Gleichung gelöst.

$-5 = -4 + k \qquad | +4$

$-1 = k \qquad \Rightarrow$ Die Gerade mit der Gleichung $y = x - 1$ geht durch den Punkt P.

2.5 Gemeinsame Punkte von Graphen

Soll die Schnittmenge (gemeinsame Punkte) zweier Graphen bestimmt werden, so werden die y-Werte der Funktionsgleichungen gleichgesetzt.

$g \cap P_1$

$y_g = y_P$

$x + k = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \qquad | -x-k$

$0 = -\frac{1}{4}x^2 + 3 - k$

Es existieren zwei Lösungen, wenn die Diskriminante $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ positiv ist.

$0^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (3 - k) > 0$

$\Rightarrow$ Für $k < 3$ existieren zwei Schnittpunkte.

Mathematik

Themenbereich – Algebra

Feststellungsprüfung I / Abschlussprüfung

Übungsaufgabe 3

1.0 Die Parabel p_1 ist durch die Gleichung $y = (x + 1)^2 - 4$ mit $x \in \mathbb{R}$
und die Parabel p_2 durch die Gleichung $y = ax^2 + b \cdot x + 3$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.1 Die Parabel p_2 verläuft durch die Punkte $A(-2|-3)$ und $B(2|5)$.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel p_2.

1.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Parabel p_1 mit den Koordinatenachsen.

1.3 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Parabeln p_1 und p_2.

1.4 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabeln p_1 und die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel p_2.

1.5 Zeichnen Sie in ein kartesisches Koordinatensystem die Graphen der Parabeln p_1 und p_2 im Bereich $-3 \leq x \leq 3$.
(Maßstab auf der x-Achse: 1 LE = 1 cm; auf der y-Achse: 1 LE = 2 cm)

2.0 Eine Gerade g schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $T(0|4)$ und N, welche die Entfernung $\overline{NT} = 5$ LE haben.

2.1 Geben Sie die Funktionsgleichung der Geraden g an.

3.0 Gegeben ist die Menge der linearen Funktionen durch die Gleichung
$y = -t \cdot x + t$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph einer solchen linearen Funktion ist die Gerade G_t.

3.1 Zeigen Sie, dass alle Geraden G_t einen gemeinsamen Punkt P haben, und berechnen Sie dessen Koordinaten.

3.2 Bestimmen Sie den Inhalt der Dreiecksfläche, die von der y-Achse und den Geraden G_{-1} und G_2 begrenzt ist.

3.3 Ermitteln Sie diejenigen Werte von t, für die G_t und der Graph der Parabel p_1 genau einen gemeinsamen Punkt besitzen.

3.4 Geben Sie die Koordinaten des Berührpunkts an.

Lösung Mathematik
Themenbereich – Algebra
Feststellungsprüfung I/Abschlussprüfung
Übungsaufgabe 3

1

1.1 Erstellen einer Funktionsgleichung

Damit die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + 3$ erstellt werden kann, müssen für die zwei Unbekannten a und b zwei Gleichungen gefunden werden. Durch Einsetzen der zwei Punkte A und B in die Gleichung $y = ax^2 + bx + 3$ erhält man die erforderlichen Gleichungen.

$$\begin{array}{lll} \text{I:} & -3 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 3 & \mid -3 \\ \text{II:} & 5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 3 & \mid -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & -6 = 4a - 2b \\ \text{II:} & 2 = 4a + 2b \end{array}$$

Lösung des Gleichungssystems mit dem Additionsverfahren

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & -6 = 4a - 2b \\ \text{II:} & 2 = 4a + 2b \\ \hline & -4 = 8a \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$a = -\frac{1}{2}$ in II: $2 = 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 2b$

$$2 = -2 + 2b \Rightarrow b = 2$$

Gleichung für p_2: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

1.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen bedeuten Schnittpunkt mit der y-Achse und Schnittpunkt mit der x-Achse.

Schnittpunkt mit der **y-Achse** $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y(0)$

$y(0) = (0 + 1)^2 - 4 = -3$

$S_y(0|-3)$

Schnittpunkt mit der **x-Achse** (Nullstellen) $\Rightarrow y = 0$

$$0 = (x + 1)^2 - 4 = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$\Rightarrow x_1 = -3;\ \ x_2 = 1$

$N_1(-3|0)$; $N_2(1|0)$

1.3 Schnittpunkte von Graphen

Soll die Schnittmenge (gemeinsame Punkte) zweier Graphen bestimmt werden, so werden die y-Werte der Funktionsgleichungen gleichgesetzt.

$$
\begin{aligned}
P_1 &\cap P_2 \\
y_1 &= y_2 \\
x^2 + 2x - 3 &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 && \mid -x^2 - 2x - 3 \\
-6 &= -\frac{3}{2}x^2 && \mid \cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \\
x^2 &= 4 && \mid \sqrt{} \\
|x| &= 2 \\
x_1 &= -2 \\
x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

Um die y-Koordinaten der Schnittpunkte zu errechnen, werden die x-Werte in die Funktionsgleichung von p_1 oder p_2 eingesetzt.

$x_1 = -2$ in p_1: $y = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3 \Rightarrow S_1(-2|-3)$
$x_2 = \ \ 2$ in p_1: $y = 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 \qquad = 4 + 4 - 3 = 5 \ \Rightarrow S_2(2|5)$

1.4 Scheitelpunkt einer Parabel

p_1: Aus der Scheitelpunktform $y = (x - x_s)^2 + y_s$ kann der Scheitel $S(x_s|y_s)$ abgelesen werden.
$\Rightarrow S_1(-1|-4)$

p_2: Die x–Koordinate des Scheitelpunkts einer Parabel kann mit der Formel $x_s = -\frac{b}{2a}$ berechnet werden.
Die y-Koordinate wird errechnet, indem man den ermittelten x-Wert in die Funktionsgleichung der Parabel einsetzt.

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$x_s = -\frac{2}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$y_s = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = -2 + 4 + 3 = 5$$

$\Rightarrow S_2(2|5)$