

Studien zur theoretischen und empirischen
Forschung in der Mathematikdidaktik

RESEARCH

Sabrina Bersch

Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht

Explorative Studien zu
Herausforderungen und
Lösungsansätzen aus der Perspektive
von Lehrkräften

MOREMEDIA



Springer Spektrum

Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von

Gilbert Greefrath, Münster, Deutschland

Stanislaw Schukajlow, Münster, Deutschland

Hans-Stefan Siller, Würzburg, Deutschland


In der Reihe werden theoretische und empirische Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik – von der vorschulischen Bildung bis zur Hochschule – publiziert. Dabei kann eine Vernetzung innerhalb der Mathematikdidaktik sowie mit den Bezugsdisziplinen einschließlich der Bildungsforschung durch eine integrative Forschungsmethodik zum Ausdruck gebracht werden. Die Reihe leistet so einen Beitrag zur theoretischen, strukturellen und empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik im Zusammenhang mit der Qualifizierung von wissenschaftlichem Nachwuchs.

Sabrina Bersch

Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht

Explorative Studien zu
Herausforderungen und
Lösungsansätzen aus der
Perspektive von Lehrkräften

 Springer Spektrum

Sabrina Bersch 
Universität Augsburg
Augsburg, Deutschland

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Dr. rer. nat., eingereicht an der Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät der Universität Augsburg im Mai 2022

Erstgutachter: Prof. Dr. Reinhard Oldenburg
Zweitgutachter: Prof. Dr. Hans-Stefan Siller
Datum der mündlichen Prüfung: 13. Oktober 2022



ISSN 2523-8604 ISSN 2523-8612 (electronic)
Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik
ISBN 978-3-658-40968-5 ISBN 978-3-658-40969-2 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2023

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geographische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Marija Kojic

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort des Erstgutachters

Sowohl aus der Perspektive der Allgemeinbildung wie aus derjenigen der Propädeutik für ein Mathematikstudium stellt Argumentieren eine zentrale Kompetenz dar, die der Mathematikunterricht vermitteln soll. Folgerichtig messen die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz und die Lehrpläne der Bundesländer dem Argumentieren große Bedeutung bei. Trotzdem zeigt ein Blick in die unterrichtliche Praxis, dass das Argumentieren insbesondere gegenüber dem Rechnen oft recht kurz kommt. Woran liegt das und welche Ansätze könnten helfen, mögliche Schwierigkeiten zu überwinden? Genau diesen Fragen widmet sich Frau Bersch in ihrer Arbeit.

Nach der gründlichen Darstellung der theoretischen und methodischen Grundlagen gliedert sich die empirische Arbeit in zwei Phasen: In der ersten Phase wird durch Lehrer*innen-Interviews ergründet, wie Lehrer*innen zum Argumentieren stehen, welchen Wert sie ihm beimessen und welche Schwierigkeiten sie dabei erleben. Aus den Ergebnissen dieser ersten Phase werden Hauptschwierigkeiten isoliert und in einer zweiten Phase eine Unterrichtseinheit in mehreren Varianten erstellt, die helfen soll, diese zentralen Schwierigkeiten zu überwinden. In einer zweiten Runde von Lehrer*innen-Interviews werden dann die Erfahrungen mit dieser Lerneinheit analysiert.

Dieses Vorgehen ist methodisch innovativ und interessant, weil es einen Weg darstellt, das Praxiswissen der Lehrkräfte für die didaktische Forschung nutzbar zu machen. Auf diese Weise kann eine größere Anzahl von Mathematikkursen in den Erkenntnisprozess eingehen, als wenn man auf der Ebene der Schüler*innen forschen würde. Die Lehrer*innen als Experten ihres Unterrichts reflektieren ihre Erfahrungen und diese prägen künftigen Unterricht. Um Veränderungen anzustoßen, ist es daher richtig, bei den Lehrkräften anzusetzen.

Die erzielten Ergebnisse beleuchten die Schwierigkeiten des Argumentierens in der Praxis sehr breit: obwohl viele Lehrkräfte dem Argumentieren einen großen Wert beimessen, berichten sie auch von Schwierigkeiten auf vielen Ebenen. Insbesondere die sprachlichen Herausforderungen, gerade auch beim schriftlichen Argumentieren werden als sehr großes Hindernis empfunden. Entsprechend setzt Frau Bersch mit der von ihr konzipierten und in mehreren Varianten ausgestalteten Lernumgebung an diesem Punkt an, indem sie Unterstützung bei der Versprachlichung anbietet. Außerdem wird besonderes Augenmerk auf die Differenzierungsmöglichkeiten gelegt. Die Rückmeldungen der Lehrkräfte in den Interviews der zweiten Phase bestätigen, dass diese konkreten Materialien hilfreich sind.

Es bleibt zu wünschen, dass diese Erkenntnisse in Zukunft genutzt werden, um das Argumentieren in weiteren Inhaltsbereichen, nicht nur in der Analysis, zu stärken. In diesem Sinne wünsche ich Leserinnen und Lesern dieses Bandes eine erkenntnisreiche Lektüre.

Augsburg
im Dezember 2022

Reinhard Oldenburg

Geleitwort des Zweitgutachters

Im (Unterrichts-)Fach Mathematik werden Begriffe wie Argumentieren, Begründen, Beweisen etc. selbstverständlich eingesetzt und auch ihre Beziehung zueinander wenig hinterfragt. Die Arbeit von Frau Bersch widmet sich einem Thema der Mathematikdidaktik, welches auf eine lange Tradition zurückblicken kann. Mitnichten bedeutet das aber, dass das Thema schon ausreichend forschungsspezifisch beleuchtet ist. Genau diesem Ansinnen widmet sich die vorliegende Dissertation von Frau Bersch, aus Perspektive der Lehrerprofessionalisierung.

Frau Bersch wählt dafür den Ansatz einer explorativen Interviewstudie. Die mit Lehrkräften durchgeführte Interviewstudie greift Inhalte des Analysisunterrichts auf und greift dabei auf das Verstehen von Lehrkräften zurück. Die so gewonnenen Einsichten werden genutzt, um einen theoretisch fundierten Unterrichtsvorschlag zu erstellen und diesen in der Praxis zu evaluieren. Damit ist die vorliegende Arbeit eng mit der Theorie-Praxis-Verzahnung im Bereich der Lehrkräftebildung verankert und leistet einen wichtigen Beitrag zum Schließen des Theorie-Praxis-Gaps, indem implizites Wissen von Lehrkräften wissenschaftlich nutzbar gemacht wird.

Durch das gewählte Vorgehen wird von Frau Bersch in den Abschnitten des Theoretischen Hintergrunds und des Forschungsstands zum Argumentieren zunächst der notwendige (wissenschaftliche) Hintergrund aufgearbeitet, um im zweiten Teil der Arbeit die Interviewstudie durchzuführen und ausführlich zu beschreiben und im dritten Teil die Entwicklung und Evaluation der Lernumgebung zum Argumentieren im Analysisunterricht zu berichten, welche hier abschließend auch evidenzbasiert evaluiert wird.

Die Arbeit ist aus meiner Sicht auf einen ersten Blick ungewöhnlich aufgebaut, da er nicht notwendigerweise einer klassischen Gliederung entspricht. In den einzelnen Abschnitten wird dieser Eindruck jedoch deutlich relativiert

und interessierte LeserInnen werden feststellen, dass es sich um eine kohärente Ausarbeitung in der Mathematikdidaktik handelt, die sich einer begründeten wissenschaftlichen Freiheit bedient.

Die vorliegende Promotionsarbeit von Frau Bersch leistet einen wesentlichen Beitrag zur Beforschung von Argumentationsprozessen im Analysisunterricht aus Perspektive von Lehrkräften. So eine Arbeit gab es bislang – zumindest meines Wissens – nicht und stellt einen neuartigen und interessanten Ansatz dar.

Es ist zu wünschen, dass dieses Buch nachhaltige Impulse für fachdidaktische Theoriebildung und fachdidaktische empirische Forschung zum mathematischen Argumentieren im Analysisunterricht entfaltet, sodass eine zukünftig gestärkte Förderung in der Schulpraxis stattfindet.

Würzburg
im Januar 2023

Hans-Stefan Siller

Danksagung

Auf der langen Reise vom ersten Kontakt mit der Mathematikdidaktik bis zum Abschluss meiner Promotion wurde ich von vielen Menschen inspiriert, begeistert, begleitet und unterstützt. Dafür möchte ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken. Es ist nicht möglich, all diese Menschen namentlich zu nennen und doch möchte ich ein paar von ihnen besonders hervorheben.

Der größte Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Reinhard Oldenburg, von dem die Idee für diese Arbeit stammt, der ihre Entstehung begleitete und mir gleichzeitig alle Freiheiten ließ, die ich mir wünschen konnte, sodass aus dem Thema *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht* **mein** Thema wurde. So konnte ich unvoreingenommen meine explorativen Studien durchführen und meine eigene Sichtweise auf das mathematische Argumentieren über die Jahre hinweg entwickeln. Vielen Dank für die immer konstruktive, angenehme Zusammenarbeit, das regelmäßige Feedback und die großartige Unterstützung in vielerlei Hinsicht, nicht nur was die Promotion betrifft. Ich freue mich sehr, dass ich auch weiterhin mit dir zusammenarbeiten darf.

Außerdem danke ich Prof. Dr. Hans-Stefan Siller, der die Zweitbetreuung meiner Arbeit übernahm, mich aus der Ferne unterstützte, mich zum Oberseminar nach Würzburg einlud und zu meiner Prüfung nach Augsburg kam. Ebenso gilt mein Dank Prof. Dr. Wolfgang Schneider, der die Prüfungskommission komplettierte, großes Interesse an meiner Arbeit zeigte und mir ein Wiederentdecken der Linearen Algebra aus seiner eigenen Perspektive ermöglichte.

Meine Begeisterung für die Mathematikdidaktik entstand schon während meines Studiums in den Lehrveranstaltungen von Prof. Dr. Volker Ulm und Andreas Merkel. Der Gedanke an eine Promotion entwickelte sich dann während des Verfassens meiner Zulassungsarbeit zum Pascal'schen Dreieck, die durch Andreas

Merkel ermöglicht und begleitet wurde. Vielen Dank dafür und auch für viel konstruktiven Austausch während der gesamten Promotionszeit (und hoffentlich auch weiterhin), sowohl über mathematikdidaktische als auch über (fach-)sprachliche Themen.

Ein großer Dank gilt auch dem kompletten Team des Lehrstuhls für Didaktik der Mathematik für viele Gespräche, Gedanken, Denkanstöße und Einblicke in verschiedenste Bereiche der Mathematik(-didaktik) sowie für die Aufnahme in ein Team, in dem ich mich sehr wohl fühle. Ganz herzlich bedanke ich mich insbesondere bei Barbara Adleff für die gemeinsame Promotionszeit mit vielen Telefonaten und den stets konstruktiven, motivierenden und auch privaten Austausch. Du bist für mich von einer Kollegin zu einer echten Freundin geworden und ich freue mich schon, wenn ich mit dir auch deine Promotion feiern darf.

Ich bedanke mich auch bei den Lehrkräften, die an meinen beiden Studien teilnahmen und mit mir ihre wertvollen Unterrichtserfahrungen teilten, bei Jana für die ausdauernde Transkriptionsarbeit sowie bei Tanja, David und Rosalie für die wertvolle Unterstützung in vielerlei Hinsicht und das kritische Korrekturlesen meiner Arbeit.

Zu guter Letzt bedanke ich mich bei meinem Mann Dominik und meinem Sohn Elias, die mich immer daran erinnern, dass es noch ein Leben abseits des Schreibtisches gibt, mir helfen, Energie zu tanken und auf andere Gedanken zu kommen, und gleichzeitig viele Stunden auf mich verzichteten, damit ich diese Arbeit schreiben konnte. Meinen Eltern danke ich dafür, dass sie schon mein ganzes Leben an mich glauben, mich unterstützen und – genauso wie meine Schwiegereltern – viel Oma- und Opa-Zeit mit Elias verbrachten, um mir so den Rücken freizuhalten.

Ohne euch alle wäre diese Arbeit nicht zu dem geworden, was ich nun in Händen halten und in mein Regal stellen darf. Vielen herzlichen Dank!

Sabrina Bersch

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden zunächst die Begriffe *Argumentieren*, *Begründen* und *Beweisen* geklärt und in einem Modell zueinander in Beziehung gesetzt. Das mathematische Argumentieren wird dabei in einem weiten Sinne als Oberbegriff, das Begründen als spezielle Form des Argumentierens und das Beweisen als spezielle Form des Begründens verstanden. Auf dieser Grundlage werden zwei aufeinander aufbauende Studien vorgestellt, in denen das mathematische Argumentieren im Analysisunterricht aus der Perspektive von Lehrkräften untersucht wurde. Die erste ist eine explorative Interviewstudie mit Lehrkräften zur gegenwärtigen Situation des Argumentierens im Analysisunterricht. In dieser wurde das Begriffsverständnis der Lehrkräfte, ihre konkreten Unterrichtserfahrungen mit Blick auf das Argumentieren sowie ihre Haltung gegenüber dem Argumentieren analysiert. Der Fokus lag insbesondere auf Herausforderungen, denen Lehrkräfte und Lernende beim Argumentieren im Analysisunterricht begegnen. Die Heterogenität innerhalb von Lerngruppen und sprachliche Schwierigkeiten bei den Schülerinnen und Schülern stellten sich dabei als dominante Problemfelder heraus. Daran ansetzend wurden für die zweite Studie theoretische Grundlagen zur Differenzierung und Sprachförderung im Mathematikunterricht gelegt und eine differenzierende, aufgabenbasierte Lernumgebung mit sprachförderlichen Elementen zum Argumentieren mit ganzrationalen Funktionen in verschiedenen Versionen ausgearbeitet. Dafür wurden Aufgaben, Lösungsbeispiele und Formulierungshilfen entwickelt. In einer Evaluationsstudie wurde die Lernumgebung von Lehrkräften im Unterricht eingesetzt, mit anschließender Rückmeldung der Erfahrungen in schriftlichen Interviews. Dadurch konnten die Qualität der Lernumgebung sowie die Akzeptanz der Lehrkräfte für die entwickelten Materialien nachgewiesen werden.

Abstract

In this thesis, the German terms *Argumentieren*, *Begründen*, and *Beweisen* (in English approximately *argumentation*, *reasoning/justifying*, and *proving*) are elucidated and related to each other in a theoretical model. Thereby, mathematical argumentation is understood in a broad sense and functions as an umbrella term. Based on these considerations, mathematical argumentation in calculus classrooms was investigated from a teachers' perspective in two studies which are based on one another. The first study was an explorative interview study with teachers on the current situation of argumentation in calculus classrooms. The understanding of terms by the teachers, their teaching experiences related to argumentation, and their attitude towards argumentation were subjects of discussion. In particular, challenges teachers and students face concerning argumentation in calculus teaching and learning were analysed. Heterogeneity and language difficulties of students were found to be dominant problem areas. For this reason, theoretical considerations of differentiation and language support in mathematics teaching were implemented in a learning environment which is task-based, differentiating, and language supportive. Therefore, argumentation tasks with polynomial functions, worked-out examples, and writing assistance were designed. In a subsequent evaluative study, teachers used the learning environment in class and reported back on their experiences. Thus, the quality and teachers' acceptance of the learning environment could be proven.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Fokus und Ziele der Arbeit	3
1.2	Aufbau der Arbeit	5
Teil I Theoretischer Hintergrund und Forschungsstand		
2	Theoretischer Hintergrund zum mathematischen Argumentieren	11
2.1	Argumentieren, Begründen, Beweisen – Begriffsklärungen	11
2.1.1	Argumentieren	12
2.1.2	Begründen	20
2.1.3	Beweisen	24
2.1.4	Ein Modell für den Zusammenhang zwischen Argumentieren, Begründen und Beweisen	31
2.1.5	Einordnung weiterer Begriffe: Logisches Schließen, Rechtfertigen, Herleiten, Kommunizieren, Erklären	40
2.2	Argumentieren als allgemeine mathematische Kompetenz	43
2.2.1	Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht	43
2.2.2	Mathematische Argumentationskompetenz	46
2.2.3	Zusammenhang zwischen dem Argumentieren und den anderen allgemeinen Kompetenzen der Bildungsstandards	48
2.3	Die Bedeutung des mathematischen Argumentierens	50
2.3.1	Funktionen des mathematischen Beweisens	51
2.3.2	Bedeutung des Argumentierens in der Disziplin Mathematik	53

2.3.3	Förderung inhaltsbezogener mathematischer Kompetenzen durch das Argumentieren	54
2.3.4	Förderung prozessbezogener und überfachlicher Kompetenzen durch das Argumentieren	57
2.3.5	Argumentieren als Instrument zur Lernstandseinschätzung	60
3	Forschungsstand zum Argumentieren im Analysisunterricht (aus Lehrerperspektive)	63
3.1	Studie zum Beweisverständnis von Lehrkräften aus den USA (Knuth)	65
3.2	Studie mit italienischen Lehrkräften zu <i>beliefs</i> zum und zum Umgang mit dem Beweisen (Furinghetti/Morselli)	68
3.3	Studie zu Beweisvorstellungen und eigenem Beweisen von deutschen und kanadischen Lernenden im Analysisunterricht (Grundey)	70
3.4	Studie zu <i>beliefs</i> deutscher Sekundarstufenlehrkräfte zum Analysisunterricht (Erens/Eichler)	73
3.5	Fazit: Forschungslücke für die vorliegende Arbeit	78
Teil II	Interviewstudie zum Argumentieren im Analysisunterricht	
4	Methodik der Interviewstudie mit Lehrkräften	83
4.1	Forschungsinteresse, Forschungsgegenstand und Forschungsfragen	83
4.2	Leitfadengestützte, explorative (Experten)Interviews	85
4.3	Durchführung und Transkription der Interviews	90
4.4	Die Qualitative Inhaltsanalyse als Auswertungsmethode	93
4.4.1	Die Qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring	95
4.4.2	Die Qualitative Inhaltsanalyse nach Kuckartz	98
4.4.3	Die Auswertung der Lehrerinterviews – eine Synthese aus Mayring (2015) und Kuckartz (2016)	101
4.5	Qualitätssicherung in der qualitativen Forschung	108
4.5.1	Kriterien zur Beurteilung der Studiengüte	108
4.5.2	Maßnahmen zur Qualitätssteigerung der vorliegenden Studie	113
5	Ergebnisse und Diskussion der Analyse der Lehrerinterviews	119
5.1	Einschätzungen zur vorgelegten Schulbuchseite	121
5.2	Begriffsverständnis der Lehrkräfte zum Argumentieren	124

5.2.1	Ausgestaltung des Argumentierens	125
5.2.1.1	Art des Argumentierens	126
5.2.1.2	Gestalt der Argumentation	131
5.2.2	Gegenstände und Auslöser des Argumentierens	134
5.2.3	Zusammenhang und Unterscheidung der Begriffe <i>Argumentieren, Begründen und Beweisen</i>	140
5.3	Aktuelle Umsetzung des Argumentierens im Analysisunterricht	143
5.3.1	Fallzusammenfassungen zur aktuellen Umsetzung des Argumentierens im Analysisunterricht	143
5.3.2	Übergreifende Tendenzen bezüglich der aktuellen Umsetzung des Argumentierens im Analysisunterricht	149
5.4	Die Bedeutung des mathematischen Argumentierens	155
5.4.1	Persönliches Anliegen der Befragten	155
5.4.2	Bedeutung für die Schüler	157
5.4.3	Positiv für das Unterrichten	159
5.4.4	Typischer mathematischer Prozess	160
5.5	Herausforderungen rund um das Argumentieren im Analysisunterricht	162
5.5.1	Herausforderungen durch Rahmenbedingungen	163
5.5.2	Herausforderungen beim Unterrichten	167
5.5.3	Herausforderungen in Zusammenhang mit Schülern	170
5.5.3.1	Schwierigkeiten der Schüler	171
5.5.3.1.1	Schülerschwierigkeiten im Allgemeinen	172
5.5.3.1.2	Schülerschwierigkeiten im Bereich Sprache	172
5.5.3.1.3	Schülerschwierigkeiten durch fehlende Voraussetzungen	178
5.5.3.1.4	Schülerschwierigkeiten im Prozess des Argumentierens (aktiv und passiv)	179
5.5.3.2	Probleme in Bezug auf Schüler	186
5.5.3.2.1	Heterogenität der Schüler	186
5.5.3.2.2	Weitere Probleme in Bezug auf Schüler	190
5.6	Fazit zu den Erkenntnissen aus der Interviewstudie und Zwischenfazit der Arbeit	192

Teil III Entwicklung und Evaluation einer Lernumgebung zum Argumentieren im Analysisunterricht

6 Theoretische Grundlagen für die Entwicklung einer Lernumgebung zum Argumentieren im Analysisunterricht	199
6.1 Lernumgebungen im Mathematikunterricht	199
6.2 Differenzierung	203
6.2.1 Begriffsklärung	204
6.2.2 Aufgabenbasierte Differenzierung im Mathematikunterricht	207
6.2.3 Blütenaufgaben	209
6.3 Sprache im Mathematikunterricht	211
6.3.1 Systematisierung von Sprache im (Mathematik-) Unterricht	213
6.3.2 Schwierigkeiten und Probleme durch Sprache im Mathematikunterricht	217
6.3.3 Schreiben im Mathematikunterricht	218
6.3.4 Sprachförderung im Mathematikunterricht	220
6.3.4.1 Ganzheitliche Sprachförderung	221
6.3.4.2 Fokussierte Sprachförderung	223
6.3.4.3 Wortspeicher	224
6.4 Lernen aus Lösungsbeispielen	226
6.4.1 Arten von Lösungsbeispielen	227
6.4.2 Wirksamkeit von Lösungsbeispielen	229
6.4.3 Struktur des Lernens mit (Sequenzen von) Lösungsbeispielen	233
7 Entwicklung einer differenzierenden, aufgabenbasierten Lernumgebung mit sprachförderlichen Elementen zum Argumentieren mit ganzrationalen Funktionen	235
7.1 Die Konstruktion der Aufgaben	238
7.1.1 Überblicksartige Schulbuchanalyse zur Ableitung ganzrationaler Funktionen	239
7.1.2 Die Aufgaben	241
7.1.3 Differenzierungspotenzial der Aufgaben	248
7.2 Entwicklung von Formulierungshilfen	250
7.3 Konstruktion eines vorangestellten Lösungsbeispiels	256
7.4 Vorschläge zu Methoden, Sozialformen und Medien	261

8	Qualitative Studie zur Evaluation der Lernumgebung	263
8.1	Teilnehmende Lehrkräfte	264
8.2	Die Methode der schriftlichen Interviews	265
8.3	Auswertungsmethodik	266
8.4	Ergebnisse	267
8.4.1	Gewählte Versionen der Lernumgebung	268
8.4.2	Beschreibung des Einsatzes der Lernumgebung im Unterricht	270
8.4.3	Evaluation des Lösungsbeispiels	271
8.4.4	Evaluation der Aufgaben	274
8.4.5	Evaluation des Differenzierungspotenzials	276
8.4.6	Evaluation der Formulierungshilfen und sprachliche Schwierigkeiten	277
8.4.7	Änderungswünsche der Befragten	280
8.5	Diskussion der Evaluationsstudie	282
Teil IV Schlussbetrachtung		
9	Zusammenführung, Diskussion und Ausblick	287
Literaturverzeichnis		295

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1	Aufbau der Arbeit	6
Abbildung 2.1	Toulmin-Schema (nach Toulmin 2003, S. 92)	15
Abbildung 2.2	Mehrschichtiges Argument (nach Meyer 2007a, S. 90)	15
Abbildung 2.3	Modell zum Zusammenhang von Argumentieren, Begründen und Beweisen	32
Abbildung 2.4	Einordnung weiterer Begriffe in das Modell zum Zusammenhang von Argumentieren, Begründen und Beweisen	40
Abbildung 4.1	Allgemeines Ablaufmodell der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2015)	96
Abbildung 4.2	Ablaufmodell der Analyseformen Induktive Kategorienbildung (links) und Inhaltliche bzw. Skalierende Strukturierung (rechts) bei Mayring (2015)	97
Abbildung 4.3	Ablauf einer <i>Inhaltlich strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse</i> nach Kuckartz (2016, S. 100)	100
Abbildung 4.4	Ablaufschema der qualitativen Inhaltsanalyse der Lehrerinterviews	103
Abbildung 5.1	Überblick über die Hauptkategorien im Bereich des Argumentierens	120
Abbildung 5.2	Bewertung der vorgelegten Aufgaben durch die Lehrkräfte	122
Abbildung 5.3	Bewertung der vorgelegten Begründungsaufgaben durch die Lehrkräfte	122

Abbildung 5.4	Bewertung der vorgelegten Nicht-Begründungsaufgaben durch die Lehrkräfte	122
Abbildung 5.5	Überblick über die Subkategorie „Ausgestaltung des Argumentierens“	126
Abbildung 5.6	Überblick über die Subkategorie „Gegenstände und Auslöser des Argumentierens“	134
Abbildung 5.7	Überblick über die Subkategorie „Bedeutung für die Schüler“	157
Abbildung 5.8	Überblick über die Hauptkategorie „Herausforderungen rund um das Argumentieren im Unterricht“	164
Abbildung 5.9	Überblick über die Subkategorie „Schüler“	171
Abbildung 6.1	Unterscheidungen bezüglich des Differenzierungsbegriffs mit Einordnung von Blütenaufgaben	205
Abbildung 7.1	Grundpfeiler der entwickelten Lernumgebung	237
Abbildung 7.2	Sechs Versionen der Lernumgebung	238
Abbildung 7.3	Aufgabe 1 der Lernumgebung: Symmetrie von Funktion und Ableitung	243
Abbildung 7.4	Aufgabe 2 der Lernumgebung: Anzahl von Extrema ...	246
Abbildung 7.5	Aufgabe 3 der Lernumgebung: Begründung einer Kalkülregel	248
Abbildung 7.6	Satzbausteine zu Aufgabe 1 der Lernumgebung	252
Abbildung 7.7	Wortspeicher zu Aufgabe 1 der Lernumgebung	253
Abbildung 7.8	Eine Variante des Lösungsbeispiels zu Aufgabe 1	258
Abbildung 8.1	Hauptkategorien der qualitativen Inhaltsanalyse der schriftlichen Interviews	268
Abbildung 8.2	Subkategorien der Hauptkategorie „Gewählte Aufgabe, gewählte Variante“	269
Abbildung 8.3	Subkategorien der Hauptkategorie „Beschreibung der Umsetzung“	270
Abbildung 8.4	Subkategorien der Hauptkategorie „Evaluation des Lösungsbeispiels“	272
Abbildung 8.5	Subkategorien der Hauptkategorie „Evaluation der Aufgaben“	274
Abbildung 8.6	Subkategorien der Hauptkategorie „Evaluation des Differenzierungspotenzials“	276

Abbildung 8.7	Subkategorien der Hauptkategorie „Evaluation der Formulierungshilfen/sprachliche Schwierigkeiten“	278
Abbildung 8.8	Subkategorien der Hauptkategorie „Änderungswünsche“	281

Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1	Arten des Argumentierens und Gestaltungsmöglichkeiten der Argumentation	17
Tabelle 3.1	Überblick über den Forschungsstand zum Argumentieren im Analysisunterricht	79
Tabelle 4.1	Überblick über die verschiedenen Phasen der Interviews	88
Tabelle 4.2	Übersicht über Analysetechniken und Analyseformen bei Mayring (2015)	96
Tabelle 7.1	Kategorien der überblicksartigen Schulbuchanalyse	240



Einleitung

1

*Der, die, das.
Wer, wie, was?
Wieso, weshalb, warum?
Wer nicht fragt, bleibt dumm!
Tausend tolle Sachen, die gibt es überall zu seh'n.
Manchmal muss man fragen, um sie zu versteh'n.*

(Intro der Sesamstraße)

Proof is respectability. Proof is the seal of authority. [...] Proof is mathematical power, the electric voltage of the subject which vitalizes the static assertions of the theorems. Finally, proof is ritual, and a celebration of the power of pure reason.

(Davis et al. 2012, S. 167)

Warum beginnt die vorliegende Arbeit gerade mit diesen beiden Zitaten? Das Intro der Sesamstraße verdeutlicht eine fragende Grundhaltung, die Kinder im Zuge des Entdeckens der Welt und insbesondere kausaler Zusammenhänge irgendwann entwickeln (z. B. Oskar 2021, S. 267). Davis und Hersh beschreiben und rühmen eindrucksvoll das Konzept des Beweisens, das die Mathematik von anderen Wissenschaften unterscheidet. Was haben diese beiden so unterschiedlichen Zitate gemeinsam? Beide machen auf ihre ganz eigene Art und Weise auf die Bedeutung von Argumentationsprozessen aufmerksam. Die Beschäftigung mit **Warum**-Fragen ist schon für kleine Kinder wesentlich, um Zusammenhänge in unserer Welt zu hinterfragen und zu verstehen. Beweise in der wissenschaftlichen Disziplin der Mathematik stellen Zusammenhänge zwischen verschiedenen Bausteinen mathematischer Theorie her und geben damit in ganz spezifischer Form Antwort auf Fragen nach dem **Warum**. Dazwischen liegt die Schulzeit mit

sehr vielen Mathematikstunden, in denen Schüler¹ die Welt der Mathematik kennenlernen und sich dabei im Idealfall häufig mit verschiedenen **Warum**-Fragen auseinandersetzen. Kannst du mir erklären, **warum** die Ableitung einer Funktion an einer lokalen Extremstelle immer gleich Null ist? **Warum** kann ich aber von einer Nullstelle der Ableitungsfunktion noch nicht sicher auf eine Extremstelle schließen? Auch wenn die Schüler dazu aufgefordert werden, selbst Fragen zu stellen, wird gezielt aktives Argumentieren gefördert (Storz 2018, S. 56 f.). Die Förderung der Kompetenz des (mathematischen) Argumentierens im weiten Sinne² ist ein ausdrückliches Ziel des Mathematikunterrichts. **Warum?** Dazu sollte der Leser spätestens nach der Lektüre dieser Arbeit und insbesondere des Abschnitts 2.3 mehrere gute Gründe anführen können.

Subjektive und unsystematische Unterrichtsbeobachtungen, Gespräche mit Lehrkräften und Mathematikdidaktikern sowie die Lektüre wissenschaftlicher Arbeiten ließen die Vermutung entstehen, dass das Argumentieren im Mathematik- und insbesondere im Analysisunterricht noch nicht in dem Maße und Umfang gefördert wird, wie es wünschenswert wäre. Beispielhaft ist hier die Aufforderung von Stylianides und Kollegen (2016) zu mehr Forschung diesbezüglich anzuführen:

[P]roof currently has a marginal place in ordinary mathematics classrooms. More research is needed on how to elevate the role of proof in ordinary classrooms and how to support teachers' work in enhancing students' understanding of proof. We thus argue that more intervention-oriented studies in the area of proof are sorely needed.

(Stylianides et al. 2016, S. 237)

Bevor jedoch Änderungen angestrebt werden können, ist es wichtig, die aktuelle Situation im Mathematikunterricht in Bezug auf das Argumentieren zu untersuchen und besser zu verstehen, **warum** Lehrkräfte das Argumentieren so in ihren Unterricht integrieren, wie sie es tun oder **warum** sie dies vielleicht nicht tun. Reid und Knipping (2010) formulieren diesbezüglich³:

¹ Aufgrund der besseren Lesbarkeit wird in dieser Arbeit das generische Maskulinum verwendet, wenn andere Formulierungen keine gute Alternative darstellen. Gemeint sind immer alle Geschlechter.

² Der Begriff des *mathematischen Argumentierens* wird in dieser Arbeit in einem weiten Sinne gebraucht, der auch das Begründen und Beweisen umfasst (siehe Abschnitt 2.1.4).

³ Da Reid und Knipping (2010, S. 28, S. 33) den Begriff *proof* für das Konzept des Beweises als Oberbegriff verwenden, ist damit ein weites Beweisverständnis verbunden, sodass er im Zusammenhang dieser Arbeit auch mit *Argumentieren* übersetzt werden könnte.

Changes to how teachers teach proof must be based on a detailed understanding of how teachers now teach proof, and the context of that teaching, for that is where the process of change must begin.

(Reid/Knippling 2010, S. 217)

Deshalb besteht der Kern dieser Arbeit aus zwei aufeinander aufbauenden Teilen, deren Aufbau und Inhalt in Abschnitt 1.2 beschrieben wird. Zuvor werden in Abschnitt 1.1 der Fokus und verschiedene Ziele dieser Arbeit ausgeführt.

1.1 Fokus und Ziele der Arbeit

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf das mathematische Argumentieren als weit gefassten Kompetenzbereich, der auch das Begründen und Beweisen umfasst und im Mathematikunterricht gefördert werden soll. Hauptziel ist es dabei, durch eine explorative Interviewstudie mit Lehrkräften die aktuelle Situation rund um das mathematische Argumentieren im Analysisunterricht besser zu verstehen und die gewonnenen Einsichten anschließend zu nutzen, um einen theoretisch fundierten Unterrichtsvorschlag zu entwickeln und diesen wiederum von Lehrkräften in der Praxis testen und beurteilen zu lassen. So wird die Expertise von Lehrkräften in zweifacher Hinsicht genutzt. Erstens werden ihre alltäglichen Erfahrungen expliziert, um einen Einblick in die aktuelle Unterrichtspraxis mit Schwerpunkt auf Herausforderungen beim Argumentieren zu gewinnen. Zweitens wird ein theoriebasiert entwickeltes Unterrichtskonzept einem Praxistest unterzogen und dabei auch die Akzeptanz der Lehrkräfte für das Konzept untersucht. Die Interviews wurden zwischen Mai und August 2016 geführt, anschließend ausgewertet und als Grundlage für die Entwicklung einer Lernumgebung verwendet. Diese wurde im ersten Halbjahr des Schuljahres 2017/2018 von Lehrkräften im Unterricht eingesetzt. Der Einsatz wurde direkt im Anschluss durch schriftliche Interviews evaluiert.

Die beiden Studien sollen gleichzeitig beispielhaft aufzeigen, wie ein Austausch zwischen fachdidaktischer Forschung und unterrichtspraktischer Umsetzung in beide Richtungen gelingen kann. Dazu ist erstens eine klare, verständliche theoretische Grundlage nötig, die von beiden Seiten akzeptiert wird, zweitens eine Wertschätzung der Expertise der Lehrkräfte durch die Fachdidaktik, und drittens eine Akzeptanz und Bereitschaft zur Umsetzung von Ideen der Fachdidaktik seitens der Lehrkräfte.

Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist es deshalb, eine theoretische Grundlage zum Begriffsfeld rund um *Argumentieren*, *Begründen* und *Beweisen* zu schaffen, indem

verschiedene mögliche Verständnisse aus der Literatur zusammengestellt werden und das verwendete Verständnis für diese Arbeit begründet wird. Durch die Interviewstudie wird dieses mit dem Verständnis von Lehrkräften abgeglichen. Dies soll auch eine mögliche Grundlage für künftige wissenschaftliche Arbeiten darstellen und so die Kommunikation zwischen Fachdidaktikern und praktizierenden Lehrkräften im Bereich des mathematischen Argumentierens erleichtern.

Die theoretischen Auseinandersetzungen konzentrieren sich auf deutschsprachige Literatur mit gelegentlichen Ausblicken und Verweisen auf weiterführende englischsprachige Abhandlungen. Diese Einschränkung basiert auf mehreren Gründen. Beim Argumentieren handelt es sich um ein großes Forschungsfeld, das zurecht immer mehr an Bedeutung gewinnt, sodass eine internationale, umfassende Recherche die Möglichkeiten einer empirisch ausgerichteten Dissertation übersteigen würde. Außerdem haben regionale Besonderheiten, aktuelle bildungspolitische Vorgaben (und hoffentlich auch aktuelle didaktische Forschungsergebnisse) sowie kulturelle Prägungen großen Einfluss auf den zu untersuchenden Unterricht, sodass auch dadurch eine regionale Beschränkung ihre Berechtigung hat. Ein weiterer Grund für den Fokus auf deutschsprachige Literatur ergibt sich daraus, dass bei der Betrachtung der im Deutschen häufig gemeinsam genannten Begriffe *Argumentieren*, *Begründen* und *Beweisen* und der im Englischen häufig gemeinsam genannten Begriffe *argumentation*, *reasoning* und *proof* viele kleine Feinheiten und Unterschiede in der Wortbedeutung, den Konnotationen und der Verwendung auffallen. Diese müssten erst aufgearbeitet werden, um Theorien zu diesen Begriffen überhaupt substantiell miteinander vergleichen zu können. Auch die klar erscheinende Entsprechung von *Beweis* und *proof* zeigt beim genaueren Lesen Unstimmigkeiten. Noch diffiziler wird es, wenn Konnotationen mit einbezogen werden. So scheint im Deutschen das enge Begriffsfeld rund um *Beweis* – im Gegensatz zu *Argumentieren* – teilweise negative Konnotationen bei Studierenden und Lehrkräften mit sich zu bringen, was sich beispielsweise in der vorliegenden Interviewstudie mit Lehrkräften zeigt (siehe Abschnitt 5.2) und im Begriffsverständnis von *Beweis* als strenge Form des Argumentierens begründet liegen könnte. Eine ähnliche Problematik ist im englischsprachigen Raum weniger zu vermuten, da dort *proof* häufig als Oberbegriff für das gesamte Feld des Argumentierens, Begründens und Beweisens verwendet wird, was sich beispielsweise schon am Titel des Überblickswerkes *Proof in Mathematics Education* von Reid und Knipping (2010) zeigt, das sich mit dem gesamten Feld des Argumentierens, Begründens und Beweisens im Bereich der Mathematikdidaktik beschäftigt, auch viele historische Arbeiten aufgreift und einen wichtigen Beitrag vor allem zur englischsprachigen Diskussion der Thematik bietet. Die Unterschiede in der Bedeutung der Begriffe in unterschiedlichen

Sprachen sowie zugehörige Konnotationen wären ein spannendes Feld für weitere Forschungen, das aus der vorliegenden Arbeit aus Kapazitätsgründen leider ausgeschlossen werden muss.

In den beiden theoretischen Abschnitten dieser Arbeit werden auf Grundlage dieser Gedanken alle für die beiden durchgeführten Studien als zentral betrachteten Überlegungen dargestellt und zumindest versucht, das Vorhandensein einer Forschungslücke zu begründen. Wer über mathematisches Argumentieren schreibt, dem muss klar sein, dass die Nicht-Existenz eines Objektes mit bestimmten Eigenschaften nicht mit Hilfe von Beispielen stichhaltig begründet werden kann. Vielmehr müsste mit einer All-Aussage argumentiert werden, wofür theoretisch alle in Frage kommenden Objekte überprüft werden müssten. Übertragen auf die vorliegende Arbeit heißt das, dass alle publizierten (und auch die noch nicht publizierten) Arbeiten gelesen und miteinbezogen werden müssten, um mit absoluter Sicherheit eine Forschungslücke aufzeigen zu können. Sollten dem Leser dieser Arbeit also wissenschaftliche Bemühungen bekannt sein, die er als relevant für die Arbeit einschätzt und trotzdem hier nicht wiederfindet, so bitte ich diesen Leser, mich darauf aufmerksam zu machen. Der Abschluss der Arbeit bedeutet nicht den Abschluss der Forschung an diesem umfassenden Thema, sondern vielmehr eine systematische Dokumentation der bisherigen Forschungsbemühungen.

1.2 Aufbau der Arbeit

Für die vorliegende Arbeit wurde ein nicht ganz klassischer Aufbau gewählt, um den Charakter der beiden aufeinanderfolgenden Studien geeignet darstellen zu können (siehe Abb. 1.1).

Ein erster theoretischer Teil zum mathematischen Argumentieren und zum Forschungsstand ist Grundlage für beide Studien. Der zweite Teil umfasst die erste Studie, eine explorative Interviewstudie. Diese Studie ist Ausgangspunkt für den dritten Teil, der als Reaktion auf die Ergebnisse der Interviewstudie entstand. Ausgehend von diesen Ergebnissen ist deshalb ein weiterer Theorieteil nötig, der zwei Problembereiche theoretisch aufgreift, die sich in der Interviewstudie zeigten, und zusammen mit dem ersten Theorieteil die Grundlage für die zweite Studie darstellt. Im vierten Teil werden abschließend beide Studien zusammengeführt.

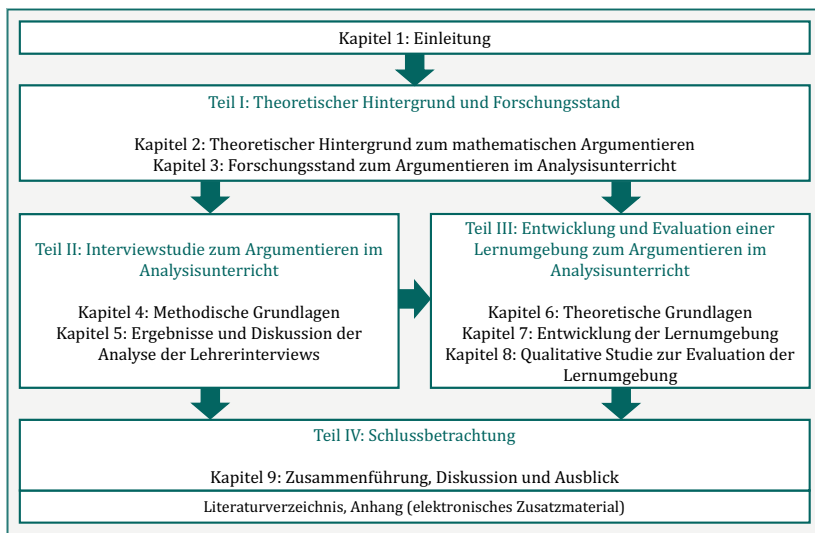


Abbildung 1.1 Aufbau der Arbeit

In **Kapitel 2** werden theoretische Grundlagen zu den Begriffen *Argumentieren*, *Begründen* und *Beweisen* zusammengestellt, das Begriffsverständnis für die vorliegende Arbeit aufgezeigt und daraus ein Modell entwickelt, das den Zusammenhang zwischen diesen Konzepten beschreibt. Des Weiteren wird das mathematische Argumentieren aus der Perspektive der Kompetenzorientierung betrachtet und seine Funktionen und seine Bedeutung in der mathematischen Disziplin sowie für Lernende im Mathematikunterricht herausgearbeitet. So ist das Argumentieren ein Bestandteil eines adäquaten Bildes von Mathematik, fördert den Erwerb mathematisch-inhaltlicher und überfachlicher Kompetenzen und bietet gleichzeitig Möglichkeiten zur Lernstandseinschätzung.

Kapitel 3 stellt den Forschungsstand zum Thema Argumentieren im Analysisunterricht mit Fokus auf der Perspektive von Lehrkräften dar. Dazu werden vier Studien mit unterschiedlichen Schwerpunkten präsentiert, eine US-amerikanische Studie zum formalen Beweisen aus der Perspektive von Lehrkräften (Knuth 2002a,b), eine italienische Studie zum Umgang von Lehrkräften mit dem Beweisen im Unterricht und dem zugehörigen *practical knowledge* (Furinghetti/Morselli 2011), eine deutsch-kanadische Studie zu Beweisprozessen in weiterem Sinne im

Bereich der Analysis (Grundey 2015) und eine Studie zu *beliefs* deutscher Lehrkräfte zum Analysisunterricht (Erens/Eichler 2013a,b; 2014; 2019; Eichler/Erens 2014; 2015). Aus der Zusammenschau dieser Studien wird eine Forschungslücke abgeleitet, welche die vorliegende Arbeit zu füllen versucht.

In **Kapitel 4** werden das Forschungsinteresse, der Forschungsgegenstand und die Forschungsfragen für die Interviewstudie mit Lehrkräften formuliert. Außerdem werden die genaue Interviewform und die Teilnehmer der Studie vorgestellt und die konkrete Durchführung und Transkription der Interviews beleuchtet. Das Kapitel zeigt zudem auf, wie die spezifische Form der qualitativen Inhaltsanalyse zur Auswertung der Interviewstudie in dieser Arbeit als Synthese aus den Theorien von Mayring und Kuckartz entwickelt wurde. Abschließend sind in Kapitel 4 Überlegungen zur Qualitätssicherung in der qualitativen Forschung enthalten und es wird aufgezeigt, welche Maßnahmen zur Qualitätssicherung der vorliegenden Interviewstudie getroffen wurden.

Kapitel 5 enthält die Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalyse der Lehrerinterviews. Darin wird zuerst aufgezeigt, wie sich die befragten Lehrkräfte zu vorgelegten Schulbuchaufgaben äußerten. Des Weiteren wird das Begriffsverständnis der Lehrkräfte zum Argumentieren präsentiert, das sich in verschiedenen genannten Gegenständen, Auslösern und Ausgestaltungen des Argumentierens sowie in Aussagen zum Zusammenhang der Begriffe *Argumentieren*, *Begründen* und *Beweisen* zeigt. Außerdem werden aus den Interviews übergreifende Tendenzen zur konkreten Umsetzung des Argumentierens im Unterricht der Befragten abgeleitet. Durch eine Vielfalt von genannten Gründen wird zudem aufgezeigt, dass die Lehrkräfte dem Argumentieren eine große Bedeutung beimessen. Trotzdem wurden zahlreiche verschiedene Herausforderungen beim mathematischen Argumentieren im Analysisunterricht genannt. Diese beziehen sich auf Rahmenbedingungen, das Unterrichten und Schwierigkeiten der Schüler sowie Probleme in Bezug auf die Schüler. Zwei herausragende Problemfelder sind hierbei die Heterogenität der Schüler und sprachliche Schwierigkeiten der Schüler. Das Kapitel enthält abschließend ein Zwischenfazit der Arbeit.

Kapitel 6 greift die beiden herausragenden Problemfelder aus Kapitel 5 auf und beleuchtet theoretisch die Konzepte der Differenzierung und der Sprachförderung im Mathematikunterricht. Dadurch wird die Grundlage gelegt, um auf die herausgearbeiteten Problemfelder zu reagieren. Die beiden zugehörigen Abschnitte 6.2 und 6.3 beginnen jeweils mit einer allgemeinen Darstellung der Theorie und werden dann enger, um auf die spezifischen Konzepte hinzuwirken, die für die Entwicklung der Lernumgebung in Kapitel 7 verwendet werden, nämlich Blütenaufgaben zur Differenzierung und Formulierungshilfen in Form von Wortspeichern und Satzbausteinen zur fokussierten Sprachförderung. Zudem

wird in Kapitel 6 der Begriff der *Lernumgebung* theoretisch vorgestellt und die Idee des Arbeitens mit Lösungsbeispielen präsentiert, die ebenfalls in der Lernumgebung in Kapitel 7 Anwendung findet.

In **Kapitel 7** wird aufbauend auf den theoretischen Überlegungen in Kapitel 6 eine differenzierende, aufgabenbasierte Lernumgebung mit sprachförderlichen Elementen zum Argumentieren mit ganzrationalen Funktionen entwickelt, die in sechs konkret ausgearbeiteten Versionen vorliegt. Dazu werden drei Aufgaben zum Themengebiet *Ableitung ganzrationaler Funktionen* basierend auf einer überblicksartigen Schulbuchanalyse entwickelt und durch jeweils zwei Arten von Formulierungshilfen (Wortspeicher und Satzbausteine) ergänzt. Zudem werden zu jeder Version ein passendes vorangestelltes Lösungsbeispiel entwickelt und allgemeine Vorschläge zum Einsatz der Lernumgebung gemacht.

Eine qualitative Studie zur Evaluation der entwickelten Lernumgebung wird in **Kapitel 8** dargestellt. Es werden die Teilnehmer und die Methodik zur Datenerhebung und -auswertung beschrieben sowie anschließend die Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalyse dargestellt und diskutiert. So wird untersucht, welche Versionen der Lernumgebung gewählt wurden, wie diese eingesetzt wurden und welche Erfahrungen die teilnehmenden Lehrkräfte mit den Aufgaben, dem Lösungsbeispiel, dem Differenzierungspotenzial und den Formulierungshilfen machten. Dadurch wird die Qualität der entwickelten Lernumgebung nachgewiesen und gleichzeitig eine Akzeptanz der entwickelten Unterrichtsvorschläge seitens der Lehrkräfte aufgezeigt.

In **Kapitel 9** werden schließlich die Ergebnisse beider Studien zusammengebracht und die wesentlichen Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit zusammenfassend dargestellt und diskutiert. Dabei werden auch Grenzen der dargestellten Studien aufgezeigt. Zum Abschluss werden Anregungen für mögliche anschließende Untersuchungen gegeben.