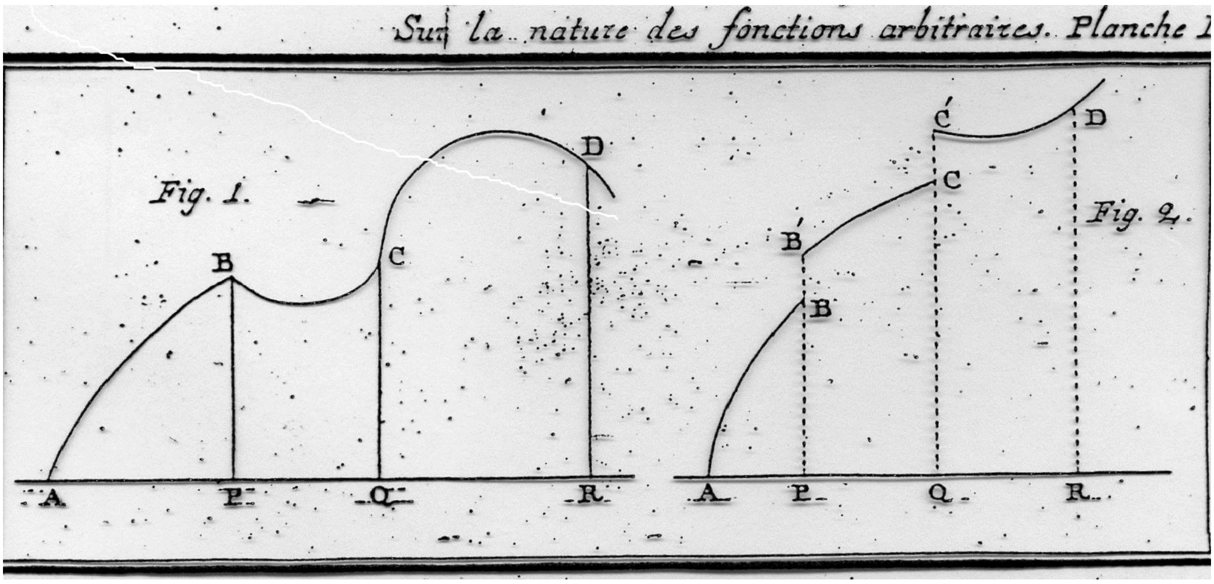
Rüdiger Thiele

Geschichte der reellen Funktionen einer Veränderlichen

Ein quellenorientierter Abriss der Entwicklung vom Beginn des 17. bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Schriften zur Geschichte der Mathematik und ihrer Didaktik 10

Schriften zur Geschichte der Mathematik und ihrer Didaktik

Herausgegeben von
Peter Ullrich

Band 10

RÜDIGER THIELE

Geschichte der reellen Funktionen einer Veränderlichen

Ein quellenorientierter Abriss der Entwicklung vom Beginn des 17. bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://www.dnb.de abrufbar

ISBN 978-3-95987-210-2
https://doi.org/10.37626/GA9783959872102.0

Man sollte überhaupt nie vergessen, dass die Funktionen, wie alle mathematischen Begriffszusammensetzungen [Konstruktionen], nur unsere eigenen Geschöpfe sind, und dass, wo die Definition von der man ausging aufhört einen Sinn zu haben, man eigentlich nicht fragen soll *was ist*? sondern was *convenirt* [passend ist]? anzunehmen, damit ich immer consequent bleiben kann.

Carl Friedrich Gauß über Funktionen

In einem Brief an Bessel vom 21. November 1811
(als es darum ging, dass das Wesen einer Funktion ihr Bestimmtsein ist).

Inhaltsverzeichnis

TEIL A: Einführung

TEIL B: Vorgeschichte und Anfänge

TEIL C: Das frühe analytische Funktionskonzept

TEIL D: Vom Paradies der Potenzreihen zu den trigonometrischen Reihen

TEIL E: Die beliebigen (willkürlichen) Funktionen

TEIL F: Grundlegung der Analysis

Der Engel der Zeit, das verwitterte Original und die rekonstruierte Statue am Königsportal der Cathédrale Notre-Dame-de-Chartres.

Die Gegenüberstellung der beiden Statuen kann man als eine sinnbildliche Deutung der Geschichtsschreibung anhand der Vergänglichkeit eines Standbildes beziehungsweise seiner Deutung (Symbolik) verstehen. Die romanischen Reste des eine Sonnenuhr tragenden Engels (linke Seite) sind rechts in einer zeitgenössischen Wiederherstellung aufgegangen. Der Gegensatz des Vergleichs soll sowohl das Beständige im Wandel der Zeitläufe veranschaulichen als auch auf die Vielfalt von möglichen von Deutungen (Rekonstruktionen) hinweisen.

Einige Vorbemerkungen

Tief ist der Brunnen der Vergangenheit.
Sollte man ihn nicht unergründlich nennen?[1]
THOMAS MANN (1875-1955)

Als Godfrey Harold Hardy (1877-1947) seinen Essay *A Mathematician's Apology* (Entschuldigung eines Mathematikers; 1940) verfasst, resümiert er dazu aus seiner in Oxford 1920 gehaltenen inaugural lecture den Charakter der Mathematik, rhetorisch wie er sagt, um so zu einer besseren Erörterung seines Themas in dem Essay zu kommen. Hier ist ein Satz aus seiner Zusammenfassung, vor etwa acht Jahrzehnten geschrieben, der schlechterdings nicht nur in unsere Zeit passt, sondern in einem weiteren Sinn auch für diese Vorbemerkungen beherzigenswert ist: „In these days of conflict between ancient and modern studies, there must surely be something to be said for a study which did not begin with Pythagoras, and will not end with Einstein."[2]

Abb. 0.1. Godfrey Harold Hardy [3]
(1877-1947)

Tun wir das und fragen: Können Sie sich vorstellen, eine mathematische Vorlesung sowie ein mathematisches Seminar zu besuchen oder ein mathematisches Buch zu lesen, ohne dem Begriff *Funktion* bzw. seinen Synonymen wie Abbildung, Operator, Transformation und anderen zu begegnen? Die vielfältige Reichweite dieses Begriffes belegt nicht nur seine Bedeutung, sondern weist trotz der Beständigkeit der Idee auch auf die Schwierigkeiten hin, dieses Konzept klar zu definieren. Umfassende mathematische Wörterbücher wie das japanische *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*[4] von Kiyosi Itô (1915-2008) führen unangesehen der Synonyme etwa 500 einschlägige Einträge von Abelscher Funktion bis zur Zeta-Funktion. Jede Geschichte des Funktionsbegriffs wird daher eine Auswahl zu treffen haben.

1 Th. Mann, *Joseph und seine Brüder*. Vorspiel, Höllenfahrt. Romane und Erzählungen. Bd. 3. Frankfurt 1960.

2 *A Mathematician's Apology*. With a Foreword by C.P. Snow. Cambridge 1992, p.76. - In diesen Tagen des Konflikts zwischen alten und modernen Studien muss es sicherlich etwas zu zugunsten einer Studie zu sagen geben, die nicht mit Pythagoras anfing und mit Einstein enden wird.

3 Bemerkung bei Wikipedia: „Um so sitzen zu können, muß man in einer Public School erzogen worden sein." (Public School = privates Internat). Originalquelle unbekannt.

4 MIT Press, Cambridge, Massachusetts, [2]1993; es gibt eine wesentlich erweiterte zweite englische Ausgabe von 1987 nach der dritten japanischen Auflage.

Diese Notwendigkeit lässt sich aber allgemeiner in die Mathematik schlechthin einbetten, wie es Henri Poincaré (1854-1912) in seinem Plenarvortrag auf dem Züricher Mathematikerkongress 1897 darlegt:

> Die Kombinationen, die aus Zahlen und Symbolen gebildet werden können, sind endlos. Wie werden wir in dieser Menge diejenigen auswählen, die es wert sind, unsere Aufmerksamkeit auf sich zu ziehen? Werden wir uns nur von unserer Laune leiten lassen? Diese Laune, die sich selbst bald erschöpfte, würde uns zweifellos schnell weit auseinander führen, und wir würden bald aufhören, einander zu verstehen.

Er fährt fort, indem er eine Orientierungshilfe über die Auswahl der formal möglichen Kombinationen ins Spiel bringt:

> Aber das ist nur die kleinere Seite der Frage. Die Physik wird uns ohne Zweifel davon abhalten, in die Irre zu gehen. Sie wird uns auch vor einer viel gewaltigeren Gefahr bewahren und uns daran hindern, sich endlos im Kreis zu drehen. Die Geschichte beweist das. Sie hat uns nicht nur gezwungen, unter den zahllosen Problemen zu wählen, sie hat uns auch solche Probleme aufgenötigt, auf die wir ohne sie nie gekommen wären.[5]

Der Titel und die Auswahl bedürfen daher einiger Erläuterungen. Mit reell-analytischen Funktionen sind die reellwertigen Funktionen $f(x)$ einer unabhängigen reellen Variablen x gemeint. Eine solche Beschränkung des Funktionsbegriffs ist nicht durchgängig sinnvoll und wird deshalb auch bei Bedarf aufgegeben. Eine strikte Trennung von reellen und komplexen Funktionen ist nicht immer angebracht, denn Ausblicke und sogenannte „Durchgänge“ durch das Komplexe klären manche Sachverhalte (z.B. Singularitäten) einfacher. Allerdings können wir schon aus Platzgründen die komplexe Theorie nicht ausführlich erläutern und bauen daher gelegentlich auf gewisse elementare Vorkenntnisse des Lesers. Beispielsweise ist eine Veranschaulichung der Entwicklung von Fourierreihen ohne physikalische Beispiele nicht überzeugend, und als ein wichtiges einschlägiges pysikalisches Problem haben wir die Schwingung einer eingespannten Saite gewählt, bei der es mathematisch um eine Funktion $f(t, x)$ zweier unabhängiger Veränderlicher geht.

Die Entwicklung der Funktionen ist das Thema des Buches. Wir haben die Geburtsstunde für die Entwicklung des analytischen Funktionsbegriffs in die Zeit der ersten erfolgreichen Anwendungen der neuen Infinitesimaltechniken bei Extremalproblemen (Brachistochronenproblem, spektrometrische Probleme, …) am Ende des 17. Jahrhunderts gelegt. Zu jener Zeit gibt es bereits einen analytischen Formalismus, der zu einer Abkehr von der Dominanz der geometrischen funktionalen Abhängigkeit führt und der in Verbindung mit den Infinitesimaltechniken eine eigenständige Rolle zu spielen beginnt, die schließlich die treibende Kraft für die entstehende Disziplin Analysis wird. Isaac Newton (1643-1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) haben hierzu Konzepte geliefert, indem sie frühere

5 „Le combinaisons que peu vent former les nombres et les symboles sont une multitude infinie. Dans cette multitude, comment choisirons - nous elles qui sait dignes de retenir notre attention? Nous laisserons- nous uniquement guider par notre caprice? Ce caprice, qui lui même d'ailleurs ne tarderai pas à se lasser, nous entraînerait sans doute bien loin les uns des autres et nous cesserions promptement de nous entendre entre nous. Mais ce n'est là que le petit côte de la question. La physique nous empêchera sana doute nous égarer. Nous elle préservera aussi d'un danger bien plus redoutable; elle nous empêchera de tourner sans cesse dans le même cercle.“ - H. Poincaré, „Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique.“ Conférence de M. H. Poincaré au congrès international des mathématiciens [ICM] à Zürich, en 1897. Acta mathematica 21 (1897), pp. 331-341, Zitat III, p. 337.

Einsichten erfolgreich bündelten. Auch die Vorläufer analytischer Funktionen (die Bezeichnung erscheint erst mit Leonhard Euler, 1707-1783) werden von uns kurz behandelt, und um die Ausgangslage dieses Gedankenkreises besser zu verstehen, wird auch die Geometrie *(Géométrie,* 1637) von René Descartes (1596-1650) in die Vorgeschichte einbezogen, d.h. die Descartessche Koordinatengeometrie ist skizziert. Dazu wird insbesondere auf unterschiedliche Auffassungen und Deutungen in der seinerzeitigen Mathematik eingegangen, die uns heute nicht mehr oder eben anders geläufig sind. Ein weiteres Beispiel wären die unterschiedlichen Stetigkeitsauffassungen bei Leonhard Euler und modernen Autoren. Im Jahre 1696 erschien die Analyse des infiniment petits (Analysis des unendlich Kleinen) von Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital (1661-1704), das die neuen, etwa zwei Jahrzehnte alten infinitesimalen Techniken der Differentialrechnung zwar darstellt, aber dabei durchgängig auf den Begriff Funktion verzichtet, sondern veränderliche Größen (Variable) seinen Ausführungen zugrunde legt.

Diese summarischen Erörterungen des erstem Kapitels sollen das mathematische Denken im Vorfeld einsichtig machen und insbesondere zeigen, in welchem Umfeld der Funktionsbegriff entstanden ist und warum man auf dieses Konzept kam, das sich als so erfolgreich erweisen sollte. Natürlich müsste man die Darstellung auch auf die Entwicklung des Zahlbegriffs ausdehnen, aber Platzgründe erlauben auch hier nur Streiflichter auf diese Thematik, die übrigens den Mathematikern bis weit in das 19. Jahrhundert durch Anschauung und Rechenerfahrung als gesichert gilt.

Rückblickend ist eine solche angedeutete Haltung logisch gut zu verstehen, aber sie entspricht nicht der Abfolge der historischen Ereignisse. Der Philosoph Ernst Cassirer (1874-1945) bemerkt treffend:

> Wir haben gelernt, die gedanklichen Formen und Operationen, von den Inhalten, an denen sie ausgeübt werden, loszulösen und uns ihre Geltung gesondert zum Bewusstsein zu bringen. Die gesetzliche Beziehung erschien als das eigentliche Prius, das dem einzelnen konkreten Inhalt und seiner Bestimmung logisch vorangeht.[6]

In dieser Geschichte reeller Funktionen wollen wir uns auf solche Funktionen konzentrieren, die eine „Nähe“ oder Beziehung zu analytischen Funktionen aufweisen, denn solche sind ob ihrer Eigenschaften ein Leitstern in der Entwicklung des Funktionenbegriffs gewesen. Diese vage Erklärung wird beim Lesen des Buches klarer werden. Ausgeschlossen sind neben vielen anderen Funktionen diskrete Funktionen, wie sie in der Zahlentheorie auftreten, Funktionen der analytischen Zahlentheorie, rekursive Funktionen ebenso wie stochastische Funktionen. Der Einfachheit halber werden wir in diesem Buch unter *Funktion* stets eine reellwertige Funktion einer reellen Variablen verstehen, und auf gelegentliche Abweichungen von dieser Vereinbarung werden wir hinweisen.

In heutiger Sicht besteht eine *Funktion* (Abbildung) aus drei Teilen: dem Definitionsgebiet D, dem Wertebereich W und der Abbildung f selbst

$$f:\ D \to W,$$

wobei für uns D und W fast durchgängig Teilmengen der Menge der reellen Zahlen R sind;[7] eine

6 Einleitung des Herausgebers zu G.W. Leibniz, *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie*, Bd. 1. Hamburg 1904.

7 Die Auffasung des Bourbaki-Kreises in Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, New York 1960 (dtsch.

komplexe Erweiterung wird ebenso wie das Hinzufügen infinitesimaler Größen in der Regel nicht erfolgen. Die Geschichte des Funktionskonzepts zeigt, dass es ein langer Weg war, bis eine Funktion, symbolisiert durch einen Buchstaben, etwa f, als eigenständiges (aber veränderliches) Objekt angesehen und schließlich als ein Element eines Funktionenraumes mit algebraischer und topologischer Struktur betrachtet wird; zeitweilig galt der dem Argument x zugewiesene Wert $f(x)$ selbst als Funktion, zeitweilig lediglich die (analytische) Rechenvorschrift $f(x)$, und gelegentlich verwirrte die genannte zwiefach lesbare Symbolik das Verständnis, ebenfalls sind vorübergehend auch unterschiedliche Auslegungen zur gleichen Zeit zu finden. Der Intuitionist Hermann Weyl (1885-1955) erklärt schließlich, dass niemand wisse, was eine Funktion sei.[8]

„Alles, was geschieht (anhebt zu sein), setzt etwas voraus, worauf es nach einer Regel folgt.“[9] Diese Aussage des Philosophen der Aufklärung Immanuel Kant (1724-1804) drückt prägnant die klassische rationale Auffassung des Naturgeschehens der Neuzeit aus. In Verbindung mit der vertrauten biblischen Aussage, dass der Schöpfer alles nach Maß, Zahl und Gewicht geordnet habe,[10] ergibt sich als Grundlage zwangsläufig eine gesetzmäßige Abhängigkeit einer Größe von anderen, womit die Mathematisierbarkeit von Naturvorgängen gerechtfertigt ist. Heutzutage ist es selbstverständlich, diese gesetzmäßige Abhängigkeit abstrakt mit Hilfe von Funktionen zu beschreiben.[11] Die mathematische Disziplin Analysis hat diesen wichtigen Funktionsbegriff in ihr Zentrum gerückt, oder – wie wir sehen werden – es war gerade diese Fokussierung auf den Funktionsbegriff, die die Disziplin Analysis hervorbrachte.

Unangesehen der philosophischen Auffassungen[12] dienen Variable und Funktionen dazu, kontinuierlich Vorgänge in der Mathematik und den Naturwissenschaften zu erfassen. Das geometrische Kontinuum war zwar seit der Antike ein problematischer Gegenstand, es wurde aber seit Euklid (Εὐκλείδης, ~365 v.Chr. bis ~300 v.Chr.) letztlich akzeptiert. Postulate in Euklids *Elementen* (Στοιχεῖα, Stoicheia) wie beispielsweise die über die Winkel schließen zudem problematische Sachverhalte wie hornförmige Winkel aus.[13] Das formale arithmetische Gegenbild, nämlich das der reellen Zahlen, ist seit Simon Stevin (1548-1620) in Form von Dezimalzahlen sogar recht „anschaulich“ dargelegt (*De Thiende*, Das Zehntel; 1585). Das anschauliche geometrische und das formale arithmetische Kontinuum bilden stetige Bereiche D für die Variablen, auf denen diese geregelt operieren, und die Funktionen dieser Variablen sind ebenfalls regelmäßig. Ausnahmen gibt es nur an einzelnen Stellen aus geometrischen oder physikalischen Gründen, die Beständigkeit (Stetigkeit) war schlechthin eine selbstverständliche Eigenschaft. Der Mathematiker und Mechaniker Georg Karl Wilhelm Hamel (1877-1954), bekannt durch seinen axiomatischen Aufbau der Mechanik äußerte sich zur Stetigkeit des Ortsvektors eines Massepunktes:

> Die Stetigkeit [des Ortsvektors] ist eine Mindestvoraussetzung, denn für einen materiellen Punkt ist es unmöglich, zu einer Zeit an einer Stelle A zu verschwinden und gleichzeitig an einer anderen Stelle B aufzutauchen. Man könnte ihn nicht wiedererkennen.[14]

Grundzüge der moderenen Analysis, Berlin 1971), 1.4.

8 Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften*, München 1928, ³1966, pp. 22, 27. Siehe Kap. 14 u. 15.

9 I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*. Riga 1781 (Ausgabe A), Zitat S. 189; auch in *Prolegomena,* Teil II, § 17.

10 Sed omnia in mensura, et numero, et pondere disposuisti. *Sapientia* 11, 20.

11 Zum Vergleich erwähnen wir die mühevolle Entwicklung des abstrakten Zahlbegriffs, indem wir beispielsweise an die Schwierigkeiten im Schulunterricht erinnern, die auch heute noch im Übergang von anschaulichen Gegenständen zu den entsprechenden Zahlwörtern und ihrer Verwendung stecken.

12 Siehe hierzu die philosophischen Abschnitte in den Kapitel 14 und 15 sowie im Anhang.

13 *Elemente* I, Def. 8 und 9. Ausführliche in der Euklidausgabe von T. Heath *The Elements of Euclid*, vol. I. (2nd ed. 1925), Notes on def. 8, 9. pp. 176-178; eine Klassifikation der Winkel auf p. 178.

14 *Theoretische Mechanik*, Berlin 1949, Nachauflage 1978. Siehe Kapitel 1, Gen-Identität von K. Lewin.

Gottfried Wilhelm Leibniz soll sogar ein Kontinuitätsprinzip gefordert haben: „Natura non facit saltus“ (Die Natur macht keinen Sprung). Erst mit der mengentheoretischen Auffassung ist man in der Lage, Funktionen aus komplizierten Mengen D und W zu konstruieren, bei denen auch der stetige Zusammenhang als Leitstern aufgegeben wird (was wieder in der Maßtheorie aufscheint, wo Lebesgue-integrierbare Funktionen bis auf eine Nullmenge stetig sind, siehe den Anhang).

Trotz dieses gewählten Rahmens wuchs der Stoff an, so dass auch das avisierte Gebiet beschränkt werden musste, was aus einer subjektiver Sicht heraus erfolgt und deshalb nicht ohne Willkür möglich ist. Bei der weitgefassten Thematik lässt sich die Begrenzung unserer Darstellung nicht scharf abstecken. Um keine barocke Länge aufzuweisen, beschränkt sich der Titel des Buches auf einen griffigen Satz;[15] der Leser sei im Bedarfsfall auf das genauere Inhaltsverzeichnis verwiesen. Wir werden gegenüber den im Inhaltsverzeichnis angekündigten Perioden auch zeitliche Vor- und Rückgriffe einfügen, immer wieder auch Abschnitte, die die Zugochsen der Analysis, die infinitesimale Größen, betrachten; gelegentlich erscheinen entgegen unserem Leitgedanken auch Streiflichter, die Funktionen mehrerer Variablen oder sogar komplexe Funktionen beleuchten.

Komplexe Funktionen werden nicht systematisch in die Darstellung einbezogen, was neben dem Autor auch mancher Leser bedauern mag. Carl Friedrich Gauß (1777-1855) hat sich über die Bedeutung der Ausdehnung reeller Funktionen ins Komplexe in einem Brief vom 18. Dezember 1811 an den Astronomen und Mathematiker Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) so geäußert:

> Zuvörderst würde ich jemand, der eine neue Funktion in die Analysis einführen will, um eine Erklärung bitte, ob er sie schlechterdings bloß auf reelle Größen (reelle Werte der Argumente der Funktion) angewandt wissen will, und die imaginären Werte des Arguments gleichsam als ein Überbein ansieht, oder ob er meinem Grundsatz beitrete, daß man in dem Reich der Größen die imaginären $a + b\sqrt{(-1)} = a + bi$ als gleiche Rechte mit den reellen genießend ansehen müsse. … Die Analysis ist mir eine selbständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingierten Größen außerordentlich an Schönheit und Rundung verlieren und alle Augenblicke Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genötigt sein würde.[16]

Jedoch wäre für ein solches Ziel wenigstens ein weiterer Band nötig, womit der Rahmen dieser Übersicht gesprengt würde. Ich hege trotzdem die Erwartung, dass das Weglassen der komplexen Entwicklungen, die ja in der Tat eng mit den reellen Entwicklung verbunden sind, nicht als irritierend empfunden wird, und einige Seitenblicke werden an ihre Rolle erinnern (siehe z.B. S. 355, 359).

Der Inhalt diese Buches ergibt sich aus seinen 15 Kapiteln und dem Anhang, genauer aus dem Übereinanderlegen ihrer 16 Konturen. Dabei entstehen in gewissen Umfang gemeinsame Durchschnitte, also Wiederholungen und Ergänzungen, die dem Leser häufig nicht ungelegen kommen dürften, insbesondere wenn ihn (zunächst) nur Teile der Darstellung interessieren. Durch Querverweise werden im Buch Stellen deutlich gemacht, an denen ein Sachverhalt noch genauer erklärt wird bzw. bereits erklärt wurde. Ferner habe ich mich auch nicht gescheut, der besseren Ver-

15 Man lese die amüsante Hilfe von Th. Mann für R. Courants Entscheidung, das englische Buch *What is Mathemati*cs zu nennen, von der St. Hildbrandt im Vorwort zur 4. Auflage der deutschen Übersetzung berichtet. Berlin 1992.

16 *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Friedrich Wilhelm Bessel*. Leipzig 1880, Reprint Olms 1975.

ständlichkeit wegen für den Leser, der an irgendeiner für ihn interessanten Stelle zu lesen beginnt, kleinere Redundanzen als Handreichungen in Kauf zu nehmen und beispielsweise mehrfach im Buch zu sagen, dass mechanische Kurven später transzendent genannt werden u.ä. Leser, die mit solchen Dingen bereits vertraut sind, werden sich nicht gestört fühlen, während andere es als nützlich empfinden dürften. Ebenfalls sind für Personen, wenn deren Namen in verschiedenen Themenkomplexen (also spätestens in anderen Kapiteln) erneut auftauchen, die Lebensdaten wiederholt, da diese hilfreich für die zeitliche Ordnung sind.

Für Leser, die ausführlicher informiert werden wollen, habe ich in Fußnoten auf weiterführende Literatur hingewiesen und dabei besonders solche Arbeiten berücksichtigt, die selbst ausführliche Literaturverzeichnisse enthalten. Kapitelweise werden durchgängig spezielle einschlägige Literaturhinweise angeführt. Das Literaturverzeichnis am Ende des Buches gibt ergänzend allgemeine mathematikhistorische Hinweise, denen einige grundlegende Arbeiten zur Geschichte der Mathematik oder Analysis vorangehen, die für meine Vorstellungen ausschlaggebend gewesen sind und auf die ich mich deshalb direkt oder indirekt durchgehend beziehe, ohne im Text ständig darauf zu verweisen. Weiterhin habe ich am Ende eines jeden Kapitels Übungsaufgaben eingefügt, anhand derer sich interessierte Leser mit dem Stoff vertrauter machen können.

Es gibt auch Bereiche, die keineswegs nebensächlich sind aber – nochmals kurz gesagt – aus Platzgründen nicht behandelt werden können. Von einer Darstellung der wesentlichen Entwicklung des Zahlbegriffs und der Zahlzeichen in der Renaissance oder davor wird beispielsweise abgesehen, denn – wie schon gesagt – werden bis zum Ende des 19. Jahrhunderts die reellen Zahlen intuitiv vorausgesetzt und nicht thematisiert; die wegweisende Dezimaldarstellung des flämischen Mathematikers Stevin ist zwar noch etwas umständlich, setzt aber doch den Gebrauch der Dezimalzahlen allgemein durch und veranschaulicht durch die Schreibweise anschaulich die Struktur der reellen Zahlen. Die korrespondierende (naive) geometrische Vorstellung des Kontinuums gilt als Standard. Es ist zwar logisch klar, dass kein Punkt des dichten Kontinuums einen unmittelbar benachbarten (d.h. einen nächsten) Punkt aufweist, aber man kann sich Größen fließend vorstellen (als Fluenten bei Isaak Newton) sowie infinitesimale Probleme auch operational bewältigen (durch die sogenannte Epsilontik). Eine unabhängige Größe, meist eine zeitliche Variable, fließt auf einen Grenzwert zu und führt einen abhängigen Wert mit sich, der dieser Bewegung nach einer vorgeschriebenen Regel folgt. Aber auf solche anschaulichen Vorstellungen kann man sich nicht berufen, wenn man diese Situation (Bewegung) mathematisch formulieren will (Zenons Paradoxien, 5. Jh. v. Chr.).[17]

Seit etwa 1830 (z.B. Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859) wird aus gutem Grund der Zahlbegriff zunehmend problematisiert. Der Einfluss der Mengenlehre und besonders das mit der Punktmengenlehre mögliche präzisere Erfassen von beliebigen Argumentbereichen gegenüber der bis dahin üblichen Intervalle (Strecken) lässt sich nicht mehr abweisen und führt bei der Definitionen einer Funktion $y = f(x)$ dazu, nicht nur die Vorschrift einer Abhängigkeit sondern sowohl das Definitionsgebiet als auch den Wertebereich zu thematisieren. Dabei entsteht schließlich der Funktionsbegriff f als eigenständiges mathematisches Objekt neben dem Wertebereich, der aus den Elementen $f(x)$ besteht und der die Zuordnung repräsentiert. Karl Weierstraß (1815-1897) begann seine viersemestrigen Analysiszyklen mit einer einsemestrigen Vorlesung über den Zahlbegriff. Ihm folgend stellt man heute an den Beginn eines Analysiskurses Vorlesungen über reelle Zahlen, allgemeiner gesagt beruht die Grundlegung der Analysis jetzt auf der Mengenlehre. Die eigenständige Rolle der Funktion wird beispielsweise in dem begrifflich ausgerichteten mehrbändigen Werk

17 Siehe H. Pietschmann, *Phänomenologie der Naturwissenschaft*. Berlin 1996, p. 41 ff.

Foundations of Modern Analysis[18] von Jean Alexandre Eugène Dieudonné (1906-1992), einem der Begründer und führenden Köpfe der französischen Bourbaki-Gruppe von Mathematikern jetzt so gefasst und steht bezeichnenderweise gleich im ersten Band im Kapitel „Anfangsgründe der Mengenlehre“:

> It may be said that one of the main differences between the classical and the modern concepts of analysis is that, in classical mathematics, when one writes $f(x)$, f is visualized as “fixed” and x as “variable”, whereas nowadays both f and x are considered as “variables” (and sometimes it is x which is fixed, and f which is the varying object). (chp. 1)

Wir können auch die wichtige Thematik der Begründung nicht ausführlich behandeln, aber unsere Darlegungen schließen mit einem Ausblick auf die Vielfalt des Begriffs im 20. Jahrhunderts und deren Rechtfertigungen (Kapitel 14 und 15).

Für die vorliegende Darstellung leiteten mich insbesondere die Erfahrungen einsemestriger Vorlesungen, die ich an den Leipziger und Mainzer Universitäten gehalten habe, sowie einer Reihe von Vorträgen, die ich in den letzten Jahren an verschiedenen Orten halten konnte. Dieser Hintergrund hat den Charakter der Darstellung geprägt. Die angestrebte Kürze führt auf eine exemplarische Darstellung, wobei für die Beispiele und Probleme gleichfalls Weitschweifigkeit vermieden wird. Andererseits gilt es, die erörterten typischen Sachverhalte mit ausreichend detaillierten historischen Informationen zu versehen, also auch die Quellen anzugeben, ohne dabei die technischen Tatbestände als „Selbstzweck“ zu präsentieren. Das Wort Quelle wird hier im weiteren Sinn verstanden, indem auch Bemerkungen, Einwendungen, Kritiken u.ä. an mathematischen Ergebnissen erfasst werden, also schlechthin unterschiedlichen Stränge der Rezeption widergespiegelt werden.

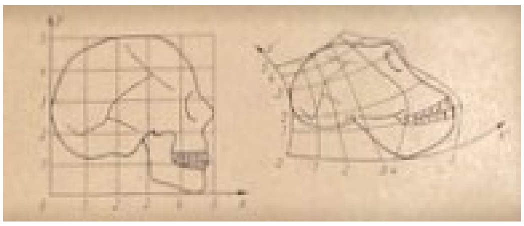


Abb. 0.2. Darstellung evolutionärer Zusammenhänge mittels einer Thompson-Transformation[19]

Ich hoffe, dass mir die Balance zwischen der prägnanten Führung des roten Fadens und der ausreichenden Erläuterung tragender Ideen sowie der begrifflichen Schwierigkeiten gelungen ist, so dass ein lebendiges und fassliches Buch entstanden ist, das trotz der Beschränkungen einen soliden Einblick in das Stoffgebiet gestattet und ein tieferes Verständnis erzielt. Ergänzend möchte ich Leonhard Euler zitieren, der seine lateinisch verfasste Arbeit „Commentatio de matheseos sublimioris utilitate“ (Über Nutzen der höheren Mathematik, E 790)[20] für den preußischen König Friedrich II (1712-1786, König seit 1740) 1741 mit dem Hinweis beendete. „Ich könnte zeigen,

18 *Foundations of Modern Analysis*, 9 Bde. New York 1960 ff., frz. *Éléments d'Analyse*, Paris 1972, dtsch. *Grundzüge der modernen Analysis,* Berlin/Braunschweig 1971.

19 Nach D'Arcy Wentworth Thompson, *On Growth and Form*, Cambridge 1917, dtsch. *Über Wachstum und Form*, Frankfurt/M. 2006; insbes. Kap. IX.

20 EO III/2, pp. 392-399, mit einer deutschen Übersetzung; gedruckt erstmals im Crelle Journal 35 (1847), S. 109-116. Zitat p. 116 „quantum vis ingenii per eam acuatur atque ad veritatem indagandam aptior reddatur“.

dass die Analysis unsere Denkkraft schärft und so zur Aufnahme der Wahrheit vorbereitet“, aber zu seinem Verhängnis las Friedrich nicht lateinisch, sondern die französischen Philosophen.

Obwohl es sich bei dem Funktionsbegriff um ein grundlegendes mathematisches Konzept handelt, gibt es in der mathematikhistorischen Literatur nicht besonders viele Darstellungen, die diesem Begriff selbst gewidmet sind, denn seine Historie wird natürlich in den einschlägigen Mathematikgeschichten und insbesondere den Geschichten der Analysis in einem angemessenen Rahmen abgehandelt. Unsere Darstellung zeigt jedoch die Entwicklung des Funktionsbegriffs als eine eigene Thematik auf, um die sich die verschiedenen Zweige der Analysis ranken, deren ganze Fülle natürlich weder erfasst noch beschrieben werden kann. Der Fortschritt des Funktionenkonzepts ist stets mit einem Fortgang in den jeweiligen Disziplinen verbunden, und umgekehrt fördern deren Probleme und ihre Behandlung die Herausbildung des Funktionsbegriffs.

Die Geschichte der Funktionen wird hier grundsätzlich chronologisch dargestellt, sofern man – wie bereits erwähnt – von gelegentlichen Aus- und Rückblicken absieht. Der eigentlichen Geschichte des Konzepts ist ein besonderes Abschnitt (Kapitel 2) vorangestellt, von dem oben die Rede war und in dem der historische Wissenstand zur Zeit der Entstehung des Funktionsbegriffs dargelegt wird. Der Herausgeber Gottfried Koethe (1905-1989) von Otto Toeplitz' (1881-1940) sehr lesenswerter *Entwicklung der Infinitesimalrechnung* (1949) zitiert im Vorwort aus einer Rede von Toeplitz, dass nämlich in den üblichen Darstellungen der Analysis

> nirgends die Frage berührt wird: warum so?, wie kommt man zu ihnen [den Konzepten]? Alle diese Requisiten also müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals, als sie geschaffen wurden. Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würde der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen.

Es sei auch an Gottfried Wilhelm Leibniz und seine Bemerkung erinnert,

> Da es jedoch nichts so Wichtiges gibt, als die Ursprünge der Erfindungen zu sehen, die meiner Meinung nach aufgrund ihrer Fruchtbarkeit besser sind als die Erfindungen selbst.[21]

In dem eben genannten Sinn hoffe ich, dass dieser an den Quellen orientierte Abriss die tragenden Ideen des Funktionenkonzepts in ihrer Entwicklung lebendig wiedergibt. An dieser Stelle sei jedoch nachdrücklich auf die methodische Maxime hingewiesen, die unser Leitstern befolgt und die in den folgenden Zeilen des Medizinhistorikers Christoph Gradmann (*1950) treffend ausgedrückt wird:

> Der Abstand im politischen, kulturellen und moralischen Horizont zwischen der Gegenwart und Vergangenheit sollte uns vorsichtig machen, zu urteilen. … Nur selten werden wir in der Geschichte Figuren finden, die die Ideale unserer Gegenwart verkörpern. Alles was wir erreichen können, ist ein Dialog über das Material, das aus der Vergangenheit auf uns gekommen ist, und das uns helfen kann, die Tradition zu erarbeiten, die wir erhalten oder verändern wollen.[22]

---

21 Or comme il n'y a rien de si important que de voir les origines des inventions qui valent mieux à mon avis que les inventions même, à cause de leur fécondité. - *Ges. Werke*, ed. Pertz. Folge 3, Bd. 5, S. 89.

22 „Vergangenheit verschwindet nicht, wenn wir sie verurteilen“, in Süddeutsche Zeitung 108 (2021), p. 12.

Bei der Aufarbeitung der historischer Geschehnisse sollten wir beachten, dass Geschichte zunächst an sich keinen Sinn hat. Aber bei ihrer Darstellung sollten wir der Historie daher nicht lediglich der Ordnung oder der verlockender Wunschträume wegen Ziele unterstellen, die uns bequeme Orientierungen ermöglichen, indem wir in ihren Verlauf Muster stricken, die „den Wünschen für die Zukunft entsprechen“ (Günter de Bruyn, 1926-2020). Es darf nicht Vergangenes an der alleinigen Sicht des Gegenwärtigen gemessen werden, anders gesagt, der Historiker soll kein „rückwärts gekehrter Prophet sein“ (Friedrich Schlegel, 1772-1829). Diese allgemeinen methodischen Gesichtspunkte werden unsere Richtschnur sein und an den erörterten Problemen verdeutlicht werden.[23]

Das Buch ist in neuer Rechtschreibung abgefasst. Quellen und fremdsprachige Zitate sowie alte Verdeutschungen sind in der jeweiligen historischer Orthographie wiedergegeben, moderne Übersetzungen hingegen erscheinen in neuer Rechtschreibung. Russische Wörter werden stets in kyrillischer Schreibweise angeführt, dann aber in einer gemäßigten phonetischen Schreibweise dem deutschen Sprachverständnis angepasst. Eingedeutschte Wörter werden in der gebräuchlichen Orthographie benutzt.

Potsdam, im April 2022 Rüdiger Thiele

Literatur

K. Bråting, „Writing the History of Mathematics: Interpretation of the Mathematics of the Pat and its Relation to the Mathematics of Today“, *Handbook of the Mathematics of the Arts and Sciences*. ed. B. Sriraman. Berlin 2021.

M.J. Crowe, „Ten 'laws' concerning patterns of chance in the history of mathematics.“ Hist. Math. 2 (1975), pp. 161-166.

H.M. Edwards, „The Role of History in the Study of Mathematics“, Math. Intelligencer 1 (2020).

H. Givsan, „Wozu Historie? Anmerkungen zur Frage der Geschichtsschreibung der Wissenschaften (Mathematik). In: D. Spalt (Hrg.), *Rechnen mit dem Unendlichen*. Basel 1991, pp. 1-11.

E. Hairer, G, Wanner, *Analysis by Its History*, New York 1996.

G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*. Mit einem Vorwort von C.P. Snow. Cambridge 1992.

I. Kleiner, *Excxursions in the History of Mathematics*. Springer 2012.

P. Lorenzen, *Die Entstehung der exakten Wissenschaften*. Berlin 1960.

F. Nietzsche, *Vom Nutzen und Nachteil der Historie für das Leben*. Reclam o.J.

K.O. May, „What is good history and who should do it?“ Hist. Math. 2 (1975), pp. 449-455.

F. Schiller, „Was heißt und zu welchem Ende studiert man Universalgeschichte?“ In: *Werke*, hrg. von Leuschner, Kleine historische Schriften, Bd. 1. Wien o.J.

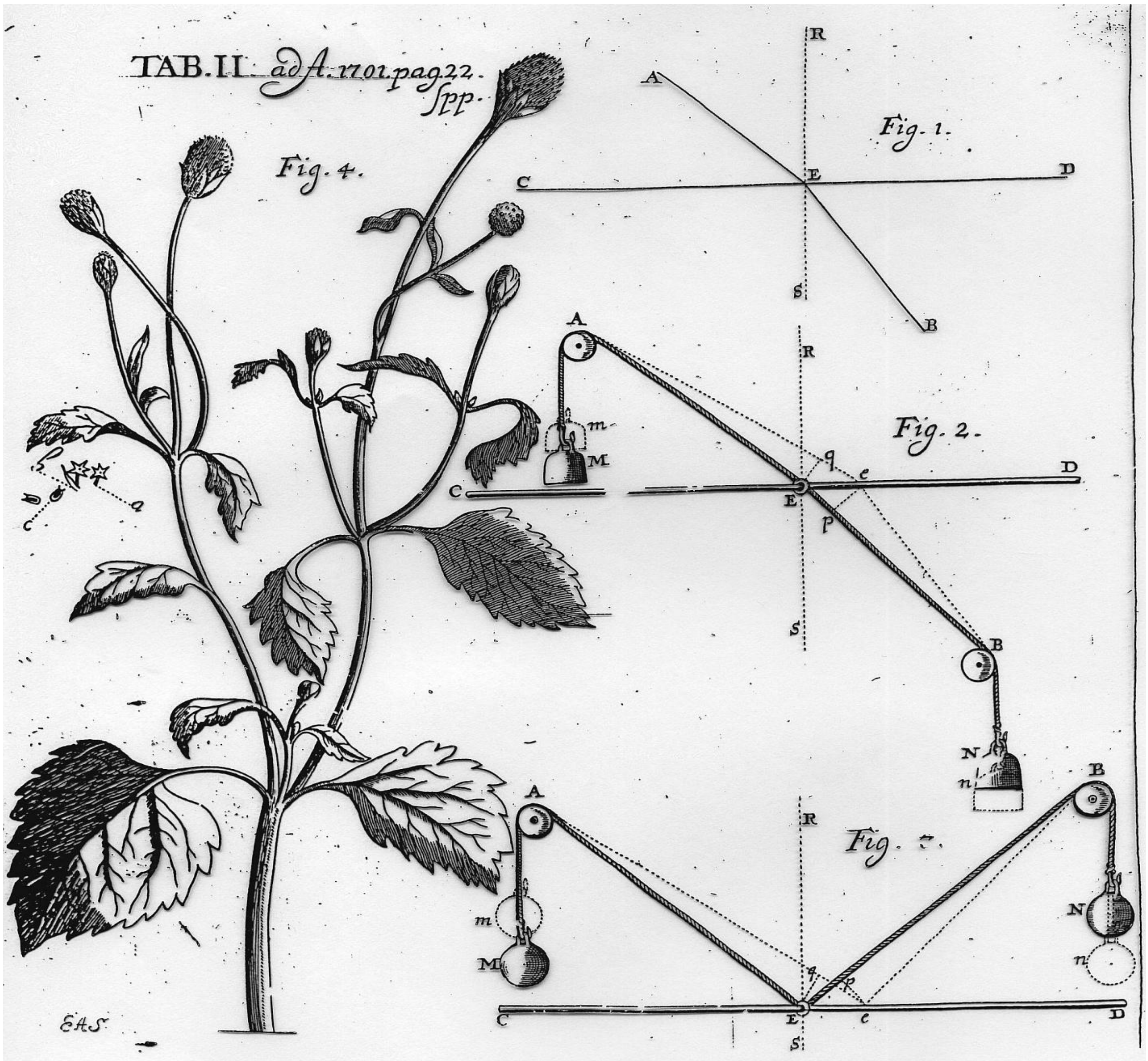
M. Schramm, „Wissenschaftsgeschichte, Naturwissenschaften.“ In: *Handlexikon zur Wissenschaftstheorie*, hrg. Von H. Seifert und G. Radnitzky, München 1989, pp. 425-439.

C.J. Scriba, „Geschichte der Mathematik.“ *Überblicke Mathematik*, Bd. 1. Hrg. von D. Laugwitz. Mannheim 1968, pp. 1-33.

D. Spalt, „Das Unwahre des Resultatismus“. Mathem. Sem. Ber. 35 (1988), pp. 6-35.

R. Thiele, „Wie und zu welchem Ende studiert man Geschichte der Mathematik?“ Mitteilungen d .Math. Ges. in Hamburg, Bd. XII, Heft 4 (Festschrift zu ihrem 300jährigen Bestehen) 1991, pp. 1093-1106.

23 Wen weitere Ausführungen hierzu interessieren, dem sei R. Thiele „Wie und zu welchem Ende studiert man Geschichte der Mathematik“, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg XI, 4 (1991), pp. 1093-1106 (Festschrift zum 300jährigen Bestehen der Gesellschaft, Teil 4) empfohlen, dort weitere Literaturangaben.



Johann Bernoulli (1667-1748)
Disquisitio Catoptrico-Dioptrica exhibens Reflexionis & Refractionis naturam, nova & genuina ratione ex aequilibrii fundamento deductam & stabilitam, Opus LXV.
(Katoptrische und Dioptrische Untersuchung, bei der wir durch das [mechanische] Prinzip des Gleichgewichts die Natur der Reflexion und Refraktion auf neue Weise erklären).
Acta eruditorum, Januarii 1701, pp. 19-26. Tafel II zur Seite 22; Figur 4 gehört nicht zum Artikel

Catoptrica (die Catoptrick oder Spiegel-Kunst), Ist eine Wissenschaft der Spiegel und ihrer Eigenschaften. Sie erkläret nemlich wie die Sachen gesehen werden, wenn die Strahlen von einem Spiegel in das Auge zurückgeworfen werden.

Dioptrica, (die Dioptrick), Ist eine Wissenschaft der sichtbahren Dinge, in so weit sie durch gebrochene Strahlen gesehen werden.

Ch. Wolff (1679-1754), *Mathematisches Lexicon*. Leipzig 1716, Spalten 324, 540ff.

Kapitel 1
Eine kurze historische Zusammenfassung

Parmenides (~520-~460 v.u.Z.)
Euklid (~365-~300 v.u.Z.)
Descartes, René (1596-1650)
Fermat, Pierre de (1607-1665)
Huygens, Christiaan (1629-1650)
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716)
Euler, Leonhard (1707-1783)
Cauchy, Augustin Louis (1789-1857)
Frege, Gottlieb (1848-1925)
Russell, Bertrand (1872-1970)
Lewin, Kurt (1890-1947)

If I have seen further it is by standing on ye [the] shoulders of giants.[1]
ISAAC NEWTON (1643-1727) in einem Brief vom 5. Februar 1676
an ROBERT HOOKE (1635-1703)

Die Gegenstände, mit denen wir es im Alltag, in den Wissenschaften oder in der Philosophie zu tun haben, interessieren uns weniger als Dinge an sich, sondern vor allem in ihren gegenseitigen Beziehungen. Dabei richten die exakten Wissenschaften bei Beschreibungen des Naturgeschehens ihr Augenmerk auf die messbaren Größen, so dass sich Beziehungen von Zahlen ergeben. Solche Beziehungen zwischen Zahlen sind ein Gegenstand der Mathematik und werden in dieser durch Rechenausdrücke erfasst, wobei sich deren Reichweite durch die von der Mathematik zur Verfügung gestellten Rechenoperationen bestimmt. Das wahrgenommene Naturgeschehen wird mathematisch auf einer gedanklichen Ebene abstrakt durch Zahlen widergespiegelt. Im Hinblick auf gestellte Fragen kann funktionales Denken der Wirklichkeit entsprechen, sie unzureichend abbilden oder sogar über sie hinausgehen. Der letzte Fall kann sich ereignen, wenn sich beispielsweise Naturvorgänge im atomaren Bereich nur theoretisch erschließen. Es ist die mathematische Disziplin Analysis, die solche gesetzlichen Beziehungen bzw. Abhängigkeiten unter der Bezeichnung Funktion (Abbildung) in ihr Zentrum rückte, oder genauer gesagt, brachte der Funktionsbegriff diesen Zweig der Mathematik hervor.

1 Wenn ich weiter geblickt habe, so deshalb, weil ich auf den Schultern von Riesen stehe. - Das Bild lässt sich bereits bei Pythagoras nachweisen; im Mittelalter zitiert Johannes von Salisbury in seinem um 1159 beendeten Werk *Metalogicon* Bernhard von Chartres (um 1120) in diesem Sinn.

Der Sachverhalt, dass alles irgendwie voneinander abhängt bzw. miteinander verbunden ist, ist zweifelsohne seit je bekannt, so dass die Ansicht bestehen könnte, den Funktionsbegriff gäbe es seit Anbeginn des Denkens. Jedoch wendet der Mathematiker und Philosoph Ernst Alfred Cassirer (1874-1945), wie wir gerade in den Vorbemerkungen gelesen haben, dagegen ein, dass es eine schwierige Prozedur ist, den abstrakten Funktionsbegriff aus den konkreten Gegebenheiten herauszulösen. Die Trennung zwischen einer Funktion und ihrer rechnerischen Darstellung öffnet schließlich die Tür zur Funktionalanalysis (Kapitel 14 und 15). Es ist deutlich zwischen einer Funktion, die ein eindeutiges Abhängigkeitsverhältnis zwischen Größen widerspiegelt,[2] und der mathematischen Darstellung dieses Verhältnisses zu unterscheiden.

Möglichkeiten der Darstellung sind üblicherweise: a) Rechenausdrücke (numerische Werte) in ihrer allgemeinsten Form (algebraische Formeln, Potenzreihen, Fourierreihen usw.; Kapitel 2, 4, 5 und 8 fallen hierunter), aber letztlich werden wir Rechenausdrücke beständig untersuchen; b) auch Graphen (Messkurven, mit Hand gezeichnete Kurven) sind möglich (Kapitel 2, 5 und 14); c) schließlich lassen sich Funktionen auch tabellieren (was schon die sumerischen Tontafeln – natürlich nicht in moderner Sicht – belegen), in diesem Buch erscheint dieser Gedanke im Kapitel 2, Napier, und den abschließenden Kapiteln 14 und 15; d) bei fortgeschrittenen Theorien können Funktionen auch durch Lösungen von Differentialgleichungen erklärt werden (d.h. als finite Lösung von im Infinitesimalen aufgestellten Gleichungen). Die Art der Darstellung einer Funktion kann dazu führen, dass diese in ihrem Definitionsgebiet vollständig repräsentiert wird oder dass dies auch nur in Teilen geschieht, selbst Darstellungen in nur einem oder gar keinem Punkt erscheinen (insbesondere in den Kapiteln 9-12). Schließlich gibt es neben eindeutigen Repräsentationen auch mehrdeutige Darstellung. Ein einfaches Beispiel geht auf Augustin Louis Cauchy (1789-1857) zurück, indem er für die Betragsfunktion zwei weitere Darstellungen angibt (Wurzelfunktion und Integraldarstellung, Kapitel 9). Neben einer genauen Repräsentation wird auch eine approximative Darstellung in der Analysis verwendet (insbesondere Restglieder unendlicher Reihen, der Kleinsche Funktionsstreifen, Kapitel 3, 4, 6 und 14). Die Einteilung erfolgt vor dem Hintergrund der Arithmetik (Algebra) und Geometrie, später auch vor dem der Logik.

Neben den rechnerischen Verfahren gibt es in der Mathematik auch andere Methoden, zum Beispiel geometrische Beziehungen zwischen entsprechenden Größen durch Konstruktionen (in der Regel durch Zirkel und Lineal) zu beschreiben, wodurch gleichfalls funktionales Denken erfasst wird. In der Antike hat die babylonische Mathematik ebenso wie die griechische Mathematik zudem rechnerische funktionale Beziehungen nicht formelhaft erfasst (nicht erfassen können), sondern bei Bedarf tabellarisch dargestellt (babylonische Multiplikationstafeln, Almagest des Ptolomäus (~100-~170), eines der Hauptwerke der antiken Astronomie). Wenn man sich bei dem Funktionskonzept auf die Mittel der Descartesschen Mathematik (algebraische Schreibweise und Koordinatengeometrie) fokussiert, dann kann man Antonie Frans Monna (1909-1995) zustimmen

> The notion of a function has no place in Greek mathematics.[3]

Man kann aber auch fragen, ob in dieser geometrisch orientierten Periode der Mathematik, in der

2 Wir erinnern daran, dass in diesem Buch vor allem Abhängigkeiten einer reellen Variablen von eindeutig zugeordneten Werten (reellen Zahlen) studiert werden sowie deren Entwicklung.

3 „The concept of function“, in: Archive for the History of Exact Sciences 9 (1972), pp. 57-84, p. 58.

die Mathematik hoch entwickelt ist, wie es bei den Griechen der Fall ist, nicht doch irgendwie „funktionale“ Beziehungen ausgedrückt wurden, und wenn ja, wie das möglich gewesen wäre. Die Antwort liegt auf der Hand: es war die geometrische Konstruktion, die die Abhängigkeit geometrischer Objekte erfasste und darstellte.[4] Dieses „geometrische Funktionskonzept“ hängt naturgemäß von den zulässigen Konstruktionsmitteln ab (ebenso wie später auch der arithmetische Funktionsbegriff von den zulässigen Rechenoperationen bestimmt wird).

Auch der gegenüber der Euklidischen Geometrie erweiterte Descartessche Konstruktionsbegriff ist nicht in der Lage, alle klassischen Kurven zu erfassen. Es gibt sowohl bei Euklid (Εὐκλείδης, Eukleídēs, ~365-~300 v.Chr.) als auch bei René Descartes (1596-1650) geometrisch nicht konstruierbare, sog. mechanische Kurven, die folglich keine Objekte der Geometrie sein konnten. Sie sind aber keineswegs unwichtig, sondern spielen wie bestimmte Rollkurven (z.B. Epizykloiden) in der griechischen Astronomie eine herausragende Rolle.[5] Der mathematische Vorbehalt gegenüber mechanischen Kurven kann beispielsweise an den Rollkurven gut veranschaulicht werden. Hier wäre die mathematische Frage zu beantworten, mit welchen Mitteln die zwei Bewegungen (Rotation und Translation), die die Bewegung hervorbringen, sich synchronisieren lassen, d.h. sich mathematisch erfassen lassen (siehe Abbildung 1.1.).

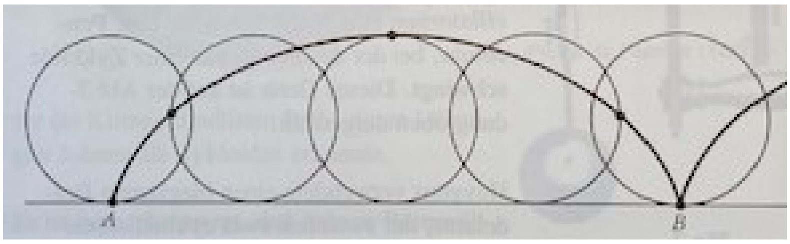


Abb. 1.1. Eine Rollkurve (Zykloide) als Beispiel einer nicht-algebraischen Kurve, einer mechanischen oder transzendenten Kurve. Die Kurve wird erzeugt, indem man einen Kreis auf einer Geraden abrollen lässt und dabei die Bahn eines fixierten Punktes *P* auf dem Kreisumfang verfolgt.

Aus mathematischer Sicht wird später (nach Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716) eine mechanische Kurven ebenso wie die entsprechenden Gleichungen solcher Kurven transzendent genannt. Die trennende Mauer, die seit den griechischen Zeiten zwischen den algebraischen und den transzendenten Kurven aufgerichtet worden ist, wird durch die neuen infinitesimalen Techniken durchlässig. Trotzdem wagt Descartes in seiner *Géométrie*[6] noch die Prophezeiung, dass mechanische Kurven, nie ein Gegenstand der Geometrie (= Mathematik) sein würden. Jedoch bereits eine Gene-

4 In der Regel waren Zirkel und Lineal die zulässigen Konstruktionsmittel, obwohl Euklid in seinen *Elementen* diese nirgends verlangt. Allerdings sind alle Beweise von Euklid so angelegt, dass sie konstruktiv mit Zirkel und Lineal ausführbar sind. Andere Konstruktionsmittel lässt erst Descartes in seiner *Géométrie* (1637) zu und erweitert damit die Konstruktionen bzw. das geometrische Funktionskonzept.

5 G. Loria widmet ihnen in seinem Standardwerk (Übers. a. d. Italienischen, Leipzig 1902) zwei Kapitel (Kap. 8f.). *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven..*

6 In der *Géométrie,* livre second, p. 340: ... a cause que la proportion , qui est entre les droites & les courbes n'estant pas connue, & mesme ie croy ne le pouuant estre par les hommes, on ne puorroit rien conclure de là qui fust exact & assuré (weil das Verhältnis, das zwischen den geraden Linien und den Kurven besteht, nicht bekannt ist, und ich selbst glaube nicht, dass es möglich sein wird, daraus zu schließen, was genau und sicher ist).

ration nach Descartes beginnen alte Dogmen zu zerbröseln, während entsprechende neue Standards noch nicht oder nur vage verfügbar sind: die typische Situation einer Übergangszeit.

Beispielsweise stellt einer der führenden Mathematiker des 17. Jahrhunderts, Christiaan Huygens (1629-1695), der an dem neuen Infinitesimalkalkül grundsätzlich zweifelt, Gottfried Wilhelm Leibniz 1690 ein Problem, um die Reichweite des Kalküls zu erproben. Es ist die Fallkurve eines Körpers (Massenpunktes) in einem Medium zu ermitteln, für das der Widerstand – eine übliche Annahme – proportional zum Quadrat v^2 der Geschwindigkeit v des Körpers sein soll. Leibniz gab als Lösung

$$\mathrm{b}^t = (1 + v)/(1 - v) \qquad (t = \text{Zeit, b Konstante}).$$

Diese rechnerische Lösung hat keine geometrisch zulässige Form, da die Veränderliche t im Exponenten erscheint. Die für das geometrische Schließen grundlegenden Proportionalitätsbeziehungen machen es unmöglich, dass eine variable Größe als Exponent von Größen auftritt. Also verlangt Huygens von Leibniz eine übliche geometrische Konstruktion, und er billigte diese! (Details in Kapitel 2, S. 59). Aus heutiger Sicht ist klar, dass in die Konstruktion eine transzendente Kurve eingehen muss, nämlich eine logarithmische Kurve, seinerzeit Logarithmica genannt, die durch den Vergleich einer arithmetischen und geometrischen Reihe definiert ist. Dieser seinerzeit gängige Vergleich bzw. seine geometrische Fassung als Kurve (Logarithmica) wird offenbar aufgrund seiner häufigen Verwendung – selbst bei konservativeren Mathematikern – als geometrisch zulässig angesehen, mithin gewährt man einer transzendenten Kurve „geometrisches" Bürgerrecht. Leibniz selbst sowie jüngere Zeitgenossen sehen hingegen klar, dass die infinitesimalen Leibnizschen Verfahren auch auf transzendente Kurven anwendbar sind, die bislang den algebraischen Methoden widerstanden. Schon in der inaugurierenden Arbeit „Nova methodus pro maximis et minimis… " (Eine neue Methode für Maxima und Minima…) aus dem Jahre 1684 bemerkt Leibniz hierzu:

> Es ist klar, dass sich unsere Methode auf transzendente Kurven erstreckt, welche man nicht auf algebraische Rechnungen zurückführen kann.[7]

Der Begriff der Funktionalität (d.h. einer beliebigen Abhängigkeit) hat eine lange Vergangenheit, aber wann beginnt eine Geschichte des modernen Funktionsbegriffs?

Wir werden gleich sehen, dass die Neuzeit (17. und 18. Jh.) wesentlich für die Entstehung des modernen (analytischen) Funktionskonzepts gewesen ist. Zuvor wollen wir uns erst den mathematischen Auffassungen dieser Zeit zuwenden. Für deren Verständnis ist die Einsicht in die Rolle des Größenbegriffs entscheidend. Den Begriff der Größe gibt es seit der Antike. Euklid behandelt ihn im Buch V seiner *Elemente* und bringt ihn in Beziehung mit der Messbarkeit, indem er – in moderner Sicht – jeder geometrischen Größe eine reelle Zahl zuordnet (Archimedisches Axiom), wobei zu beachten ist, dass geometrische Größen ihrer Natur nach positiv sind.[8]

---

7 … patet etiam methodum nostram porrigi ad lineas transcendentes, quae ad calculum Algebraicum revocari non possunt, … „Nova methodus pro maximis et minimis … per G.G.L [=G.W. Leibniz]", Acta eruditorum (1684), pp. 467-472, Zitat p. 470. Vermutlich erscheint hier nach D.J. Struik der Ausdruck transzendent (= nicht algebraisch) erstmals im Druck.

8 Euklid stellt im Buch V der *Elemente* die Theorie des Eudoxus dar, die in moderner „Interpretation" zu den Dedekindschen Schnitten führt, mit denen man reelle Zahlen erklären kann. Während dazu Dedekind die unendliche Menge der rationalen Zahlen als gegeben hinnimmt, bezieht sich Eudoxos nur auf die für konkrete Konstruktionen benötigten endlich viele rationalen Zahlen.

Ein *Wörterbuch der philosophischen Grundbegriffe* von Friedrich Kirchner (1848-1900) und Carl Michaëlis (1852-1911),Leipzig 1907[9], erklärt in seiner fünften Auflage zum Stichwort Größe:

> Alles Räumliche hat bestimmte Größe. Die Größenbestimmung beginnt mit der geraden Linie. … Von der geraden Linie schreitet die Größenbestimmung zur Ebene, von da zum Raum, von Raum zur Zeit [Physik!], von der mathematischen Größe zur physikalischen Maßbestimmung fort, so daß schließlich die ganze Außenwelt in Maße gefaßt und in Größenverhältnisse bestimmt wird.

———————————————————————————————————————

C.F. Gauß über Größen

13. Zur Metaphysik der Mathematik.

[Aus Varia (M), Kapsel 46, b.]

1. Gegenstand der Mathematik sind alle extensive Grössen (solche, bei denen sich Theile denken lassen); intensive Grössen (alle nicht extensive Grössen) nur insofern, als sie von extensiven abhangen. Zu der erstern Art von Grössen gehören: Der Raum oder die geometrischen Grössen, welche Linien, Flächen, Körper und Winkel unter sich begreifen, die Zeit, die Zahl: zu der letztern: Geschwindigkeit, Dichtigkeit, Härte, Höhe und Tiefe der Töne, Stärke der Töne und des Lichts, Wahrscheinlichkeit u. s. w.

2. Eine Grösse für sich kann noch kein Gegenstand einer wissenschaftlichen Untersuchung werden: die Mathematik betrachtet die Grössen nur in Beziehung auf einander. Die Beziehung der Grössen auf einander, die sie haben, nur in sofern sie Grössen sind, nenne man arithmetische Beziehung: Bei geometrischen Grössen findet auch eine Relation in Ansehung der Lage Statt und diese nenne man geometrische Beziehung. Es ist klar, dass geometrische Grössen auch arithmetische Beziehungen zu einander haben können.

3. Die Mathematik lehrt nun eigentlich allgemeine Wahrheiten, welche die Relationen der Grössen betreffen, und der Zweck davon ist, Grössen, die zu bekannten Grössen oder zu denen bekannte Grössen bekannte Beziehungen haben, darzustellen, d. h. eine Vorstellung davon möglich zu machen. Nun aber können wir von einer Grösse auf eine zwiefache Art eine Vorstellung haben, entweder durch unmittelbare Anschauung (eine unmittelbare Vorstellung), oder durch Vergleichung mit andern, durch unmittelbare Anschauung gegebnen Grössen (mittelbare Vorstellung). Die Pflicht des Mathematikers ist demnach, die gesuchte Grösse entweder wirklich darzustellen (geometrische Darstellung oder Construction), oder die Art und Weise

XII. 8

7. Da der eigentliche Gegenstand der Mathematik die Relationen der Größen sind, so haben wir uns mit den wichtigsten dieser Beziehungen … bekannt zu machen. (p. 59).

Abb. 1.2. In einem undatierten (um 1800) und nicht veröffentlichten Manuskript, das vermutlich im Hinblick auf einen denkbaren (elementaren) Unterricht verfasst wurde (Auszug).

C.F. Gauss, *Werke.* 12 Bde. u. Suppl. Bd. X, 1 Varia. Leipzig 1917, pp. 57ff.

———————————————————————————————————————

9 *Wörterbuch der philosophischen Begriffe.* Begründet von F.Kirchner und C.Michaëlis (Phil. Bibliothek), fortgesetzt von Johannes Hoffmeister, vollständig neu herausgegeben von Arnim Regenbogen und Uwe Meyer. Hamburg 1998.

Noch 1770 schreibt Leonhard Euler (1707-1783), aus etwas anderer Sicht als Euklid, in seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra*[10]:

> Die Mathematik [ist] überhaupt nichts anderes […], als eine Wissenschaft der Größen. .

Dabei wird alles

> dasjenige […] eine Größe genannt, welches einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder davon wegnehmen lässt. (Kap. I, §§ 29, 1)

Es gibt zahlreiche Größenarten, die auf verschiedene Disziplinen der Mathematik führen, etwa geometrische Größen (wie Punkte oder Geraden), arithmetische Größen (wie etwa Zahlen), aber auch physikalische Größen (wie Geschwindigkeiten oder Temperaturen). In der griechischen Mathematik dominiert die Geometrie, und diese Vorherrschaft bleibt bis in die Neuzeit erhalten, was sich noch im 19. Jh. durch das Synonym Geometrie für Mathematik widerspiegelt. Allerdings entwickelt sich etwa seit der Renaissance mehr und mehr eine Rechenhaftigkeit, die auf die Erfordernisse des Handels zurückgeht. Es bildet sich dabei eine algebraische Notation heraus (François Viète, lat. Franciscus Vieta, 1540-1603), mit der Rechenverfahren und insbesondere (zunächst) algebraische Gleichungen aufgeschrieben werden können. Diese Möglichkeit führt dazu, algebraische Kurven und Gleichungen in die bekannten Beziehungen zu setzen (Fermat[11], Descartes): Kurven entsprechen algebraischen Gleichungen und umgekehrt. Die Einführung des Buchstabenrechnens, das die Arithmetik ungemein fördert, führt wiederum auch zu einem Aufschwung der Geometrie, da es einfacher ist, eine neue algebraische Gleichung aufzuschreiben und sie geometrisch als Kurve zu deuten als sich eine noch nicht bekannte geometrische Konstruktion einer Kurve auszudenken.

Im Hintergrund dieser Entwicklungen steht der Zahlbegriff, dessen Entwicklung kompliziert ist und der hier mit modernen Begriffen nur skizzenhaft umrissen wird. Intuitiv setzt man die Abgeschlossenheit des Körpers der reellen Zahlen bis gegen Ende des 19. Jahrhunderts voraus. Diese Gewissheit ist durch die Stetigkeit der Geraden inspiriert: jedem Punkt eines Zahlenstrahls soll eine positive reelle Zahl entsprechen (Dedekindsches Axiom), und umgekehrt legte jede positive reelle Zahl genau einen Punkt auf dem Zahlenstrahl fest (Cantorsches Axiom); allgemeiner stehen beide Forderungen für die Messbarkeit von geometrischen Größen. Da es nur sinnvoll ist, etwas zu messen, wenn eine messbare Größe vorhanden ist, sind Maßzahlen von gegebenen Größen positiv und nur gleich null, wenn diese Größe verschwindet.[12] Negative Größen, die man anfänglich auch verneinende Größen nannte, sind das Ergebnis von Rechenvorgängen, die einen Mangel (das Fehlen von Größen) ausdrücken, und in diesem Sinne sind die Zeichen + und – als ursprüngliche

10 *Vollständige Anleitung zur Algebra,* 2 Bde. 1770. E 387-388, OE I/1 (E = Enestroem-Nummer, OE = *Opera Euleri*, Gesamtausgabe der Eulerschen Werke), Vorabdruck einer russischen Ausgabe 1768, bearbeite Auflage von Johann Philipp Grüsson 1797, Zusätze von Lagrange in der französischen Übersetzung von 1784. Diese Erklärung setzt bereits voraus, dass klar ist, was vermindert oder vermehrt werden kann, dass also implizit eine Größenordnung bzw. ein geordneter Zahlkörper erklärt ist. Ein solcher Zahlkörper in „geometrischer Form“, der dem der reellen Zahlen weitgehend gleichwertig ist (Nachweis mit Dedekindschen Schnitten), wurde bereits bei Euklid, *Elemente*, Buch V, angegeben (siehe vorangehende Fußnote).

11 Pierre de Fermat, 1607-1665, Abbildung seiner Statue in Toulouse auf Seite 79.

12 Das Verschwinden einer Größe (Maßzahl = 0) ist ebenso ein Grenzfall, wie es der andere zugehörige Grenzfall ist, in dem eine Größe über alle Grenzen wächst, also auf eine unendliche Maßzahl ($= +\infty$) führt.

Orientierungen der Koordinatenlinien in Koordinatensystemen zu verstehen. (Siehe Kap. 2, S. 45).

Aus der Sicht der Algebra und Analysis beschreiben wir nachfolgend noch einige besondere Arten von Größen.

I. *Unbekannte, gesuchte Größen*. Eine Gleichung, die in unbekannten Größen notiert wird, kann durch eine oder mehrere Größen erfüllt werden. Die gesuchten Größen können durchaus auf eine neue Art von Größen führen; z.B. auf komplexe Zahlen in einer Gleichung mit reellen Größen. Unbekannten Größen werden in der Regel nach Descartes mit den letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet.

II. *Unbestimmte*. Es gibt Größen, denen man keinen bestimmten Wert zuordnet (etwa mit x bezeichnet). Sie fungieren damit nur als Rechengrößen, als Symbole. Auf diese Weise kann man – modern gesprochen – vom Ring der Polynome $R[X]$ über einem kommutativen Ring R mit Einselement (insbesondere dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen) sprechen, also der Menge der Polynome mit Koeffizienten aus R sowie den üblichen Rechenregeln eines Ringes. Der Ring der formalen Potenzreihen $R[[X]]$ besteht aus den verallgemeinerten Polynomen des Polynomringes, X ist eine Unbestimmte, der kein Wert zugewiesen wird; im modernen algebraischer Verständnis sieht man X als frei erzeugendes oder adjungiertes Element an.

III. *Verschwindende* oder *infinitesimale Größen*. Diese Größen können als die Zugochsen der Analysis angesehen werden, und sie sind in der theoretischen Physik noch heute umtriebig und sehr effektiv. Es ist mithin angebracht, den Begriff der infinitesimalen Größe ernst zu nehmen (eine mathematische „Rechtfertigung“ folgt gleich). Infinitesimale Größen werden häufig mit ε, δ oder ω bezeichnet. Die Definition von verschwindenden Größen ist problematisch; eine gängige arithmetische Erklärung zeigt die Problematik: eine verschwindende positive Größe kann kleiner als jede vorgegebene Größe (> 0) gemacht werden. Logisch folgt hieraus, dass solche Größen gleich null sein müssen, was ihre gesonderte Einführung nicht rechtfertigt. Die sich ergebenden Schwierigkeiten sind aus heutiger Sicht verständlich, denn infinitesimale Größen können im Körper der reellen Zahlen nicht untergebracht werden, da sie den Anordnungsaxiomen nicht genügen.

Die mathematischen Schwierigkeiten mit unendlich kleinen Größen erscheinen beim Grenzbegriff: Die anschauliche Vorstellung, dass eine stetige reelle Größe x sich einem reellem Wert a beliebig nähert, bedeutet, dass die Differenz d zwischen der Variablen und dem Grenzwert gegen null geht. Aber streng genommen ist d stets von null verschieden, zwischen der Variablen und dem Grenzwert bleibt wenigstens ein unendlich kleiner Abstand d (siehe VI); eine unendliche Zahlenfolge kann sich einem Grenzwert beliebig nähern, ohne ihn jemals zu erreichen (Zenon von Elea, Ζήνων: Aporie des fliegenden Pfeiles, Achilles und die Schildkröte)[13].

Wir können uns grob eine moderne Rechtfertigung verschwindender Größen in der Nichtstandard Analysis so vorstellen. In der Cantorschen Darstellung reeller Zahlen werden diese durch Klassen von konvergenten Zahlenfolgen mit gleichem Grenzwert repräsentiert. Verschwindende Größen entsprächen also Nullfolgen (mit positiven Gliedern). Man kann aber innerhalb dieser Klasse von Folgen die Folgen noch nach ihrer Konvergenzgeschwindigkeit unterscheiden. Während nach

13 Zeno von Elea (Ζήνων, 490-430 v.Chr.), griechischer vorsokratischer Philosoph, der sich mit dem Kontinuum und der Geschwindigkeit beschäftigte. Bekannt sind seine einschlägigen Aporien, etwa ein Pfeil kann sein Ziel nicht erreichen, da er zunächst die Hälfte des Weges zurücklegt, dann die Hälfte der Hälfte, usw. Siehe hierzu auch H. Pietschmann, *Phänomenologie der Naturwissenschaften*, Berlin 1996, Abschn. 3.3.

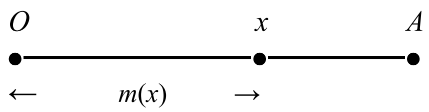
Georg Cantor (1845-1918) z.B. die Nullfolgen mit den Gliedern $a_n = 1/n$ und $b_n = 1/n^2$ identifiziert werden (und schlechthin als infinitesimal angesehen werden), kann man in der Nichtstandard Analysis diese zwei verschiedenen Folgen zwei „unterschiedliche Nullen“ definieren lassen und allgemein ein entsprechendes sog. hyperreelles Zahlensystem aufbauen, das die Menge der reellen Zahlen enthält. In diesem System wird man allerdings auf die bekannten Größenbeziehungen der reellen Zahlen bei infinitesimalen Größen ω verzichten müssen; denn wenn a irgendeine positive reelle Zahl ist und ω eine infinitesimale Größe ist, so gibt es keine natürliche Zahl n derart, dass das Archimedische Axiom $n\omega > a$ (ein Axiom der Anordnung) erfüllt werden kann. Das Beachten der Konvergenzgeschwindigkeit ist in der Analysis bei den häufigen Untersuchungen von Quotienten (insbesondere auch von Differentialquotienten) äußerst nützlich, wie es das einfache Beispiel $a_n/b_n = (1/n^2)/(1/n) = 1/n$ für die oben eingeführten Folgen zeigt, in dem der Grenzwert für $n \to\infty$ gleich null ist.

IV *Abhängige* und *unabhängige Variable*. Eine Größe, die in ihrem Definitionsgebiet (gemäß einer Vorschrift) beliebig gewählt werden kann, heißt unabhängige Variable; wenn sie jedoch von einer oder mehreren anderen Variablen (funktional) abhängt bzw. bestimmt wird, nennt man sie abhängige Variable.

V. *Konstante, Parameter.* Feste Werte einer Größe heißen Konstante. Beispiel: Koeffizienten eines Polynoms. Werden veränderliche Größen aus bestimmten Gründen als fest angesehen, nennt man sie oft Parameter, beispielsweise sind jene Größen, die in einer Kurvenschar einzelne Kurven festlegen, Parameter. Feste Werte werden Descartes folgend mit den ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet.

VI. *Stetige Veränderliche, kontinuierliche Variable*. Größen sind per Definition dadurch charakterisiert, dass sie sich verändern lassen. Kann man irgendwie einer Größe zwei Werte (Zustände) zuordnen, so kann man diese Größe als veränderlich ansehen. Während Konstante oder Parameter (siehe V) eindeutig bestimmte Größen sind, sieht Bertrand Russell (1872-1970) – um es hier noch lax zu formulieren (gemäß seiner Maxime „The explanations given … are such as place lucidity before correctness“, *Principia mathematica*, vol. 1, p. 2) – alles, was nicht eindeutig bestimmt ist bzw. was sich wie Parameter verändern kann, als Variable an.[14]

Die verschiedenen Bestimmungen, die eine Veränderliche aufnehmen kann, sind ihre Werte. Für die Analysis sind stetige Veränderungen (Bestimmungen) von besonderem Interesse. Eine gängige Vorstellung ist, dass sich eine Größe innerhalb eines zulässigen stetigen Bereichs verändert, mehr noch, man stellt sich auch vor, dass sie als eine stetige Veränderliche x nacheinander alle Werte ihres (linear geordneten) Definitionsgebietes durchläuft, also keinen Wert auslässt. Beispielsweise bewege sich der Anfangspunkt O einer Strecke OA stetig zum Endpunkt A hin, wobei die jeweils zurückgelegten Strecken x eine reelle Maßzahl $m(x)$ haben.



Schon die Griechen beschrieben Größen als messbar, modern gesagt mit reellen Zahlen ausmessbar

14 *Principles of Mathematics*, Cambridge 1903. Der zentrale Begriff wird im chp. VIII kommentiert; ein Zitat „thus what are called parameters are simply variables“, p. 6. Mehr in Kapitel 14 - Frege wird definieren, dass alles, was bestimmt ist, ein Gegenstand und keine Funktion sei.

(Theorie von Eudoxos in Euklids *Elementen*, Buch V). Die anschauliche geometrische Stetigkeit[15] (des linearen Kontinuums) überträgt sich intuitiv auf die reellen Zahlen (Zahlenkontinuum)[16] und führt auf den Begriff der kontinuierlichen Veränderlichen im Bereich der reellen Zahlen. Die suggestive Dezimalschreibweise bei reellen Zahlen macht deren Anordnung sofort anschaulich.

Der Begriff der Bewegung gehört nicht zur reinen Mathematik; die Philosophie verfügt seit griechischen Zeiten über diese Vorstellung als eleatisches Erbe (Parmenides aus Elea (Παρμενίδης, ~520-~560 v. Chr., berühmtester Schüler Zenon (Ζήνων)). Trotzdem ist es unter Mathematikern und insbesondere unter Physikern gängiges (heuristisches) Gedankengut, dass eine stetige Variable alle Werte ihres kontinuierlichen Definitionsgebiets durchläuft; das Definitionsgebiet kann dabei sowohl ein geometrischen Kontinuum als auch ein Zahlenkontinuum sein. Die Möglichkeit, aus dem Kontinuum ein beliebiges Element auswählen zu können, wird unterstellt. Auf philosophische Bedenken werden wir im letzten Kapitel genauer eingehen. Zum Beispiel durchläuft eine stetige reelle Variable x das Intervall $(0, 1)$, indem sie nacheinander alle reellen Zahlen aus diesem Intervall annimmt; man kann sich andererseits auch Variable vorstellen, die nacheinander alle rationalen Zahlen diese Intervalls annehmen (wie?), die aber damit auf $(0, 1)$ nicht stetig sind.

Erst Leibniz hat den heute unverzichtbaren Begriff der stetigen Variablen in die Analysis eingeführt. Richard Courant (1888-1972) schreibt:

> In ihrem Studium von Bewegung und Funktion betrachteten die Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts als selbstverständlich den Begriff einer unabhängigen Variablen; der zeitlichen Größe x; die stetig einem Grenzwert x_1 „zufließt". Zu diesem primären Fluß der unabhängigen Variablen x wird dann ein sekundärer Wert $u = f(x)$ mitgeführt, sozusagen der Bewegung von x folgend. Der intuitiven Vorstellung, dass $f(x)$ einem festen Wert a „zustrebt" oder sich „nähert", wenn x nach x_1 fließt, wollte man eine genauere mathematische Formulierung geben.[17]

Die anschauliche geometrische bzw. physikalische Vorstellung, einen Punkt ein Kontinuum stetig durchlaufen zu lassen, ist naheliegend. Aber man kann sich nicht darauf berufen, wenn man damit einen mathematischen Sachverhalt aufklären will:

> Seit der Zeit von Zeno und seiner Paradoxien sind [solche] Versuche … mißglückt. Eine diskrete Folge von Werten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kann Schritt für Schritt durchlaufen werden. Aber wenn es sich um eine stetige Veränderliche handelt, deren Werte ein ganzes Intervall der

15 Der Begriff der Stetigkeit ist hier anschaulich naiv gebraucht und wird erst später diskutiert; ebenso wird die Vorstellung vom mathematischen Kontinuum unkritisch benutzt, wobei der „Leitbegriff" das anschauliche geometrische Kontinuum (hier der Linie) ist. Dedekind wird diese Vorstellung für seine Definition reeller Zahlen als Schnitte benutzen.

16 Die Zahlenschreibweise ist seit dem Mittelalter ständig perfektioniert worden und führt schließlich zur Darstellung reeller Zahlen als Dezimalbrüche, deren Gesamtheit als kontinuierlich und den Punkten der Geraden gleichwertig angesehen wurde. Dieses Zahlenkontinuum genügte der klassischen Naturwissenschaft, ergänzend erfand man noch infinitesimale Größen und zog später komplexe Zahlen heran. Die Theorie des Messens, die für die exakten Naturwissenschaften unverzichtbar ist, führt logisch jedoch auf ein anderes Zahlenkontinuum als das durch die Gerade anschaulich inspirierte Kontinuum. Da Messwerte mit Fehlern behaftet sind, folgt aus $A = B$ und $B = C$ (Gleichheit im Sinn der Messfehler) nicht notwendig $A = C$! Das zugehörige Kontinuum der Messwerte ist nicht archimedisch geordnet. (H. Poincaré).

17 R. Courant, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*. Heidelberg 1954, p. 46 (das Zitat nur seit dieser deutschen Ausgabe).

> Zahlengeraden erfüllen, dann besteht die Schwierigkeit zu erklären, wie x sich dem festen Wert x_1 so nähern soll, daß x hintereinander und in der richtigen Reihenfolge alle Werte des Intervalls annimmt. Die Punkte einer Geraden bilden eine dichte Punktmenge, es gibt keinen „nächsten" Punkt, wenn man einen gewissen Punkt erreicht hat. … Zwischen der intuitiven Idee und der mathematischen Formulierung, welche die wissenschaftlich wichtigen Elemente unserer Intuition in präzisen Ausdrücken beschreiben soll, wird immer eine Lücke bleiben. Zenos Paradoxien weisen auf diese Lücke hin.[18]

Man benutzt (schon des Erfolges wegen) dieses Konzept ohne Bedenken. Eine logische Analyse, wie sie am Ende des 19. Jhs. beispielsweise von Bertrand Russell in seiner Untersuchung *Principles of Mathematics* (Cambridge 1903) vorgenommen wurde, zeigt jedoch, dass der Begriff der stetigen (reellen) Variablen komplizierter ist, als er auf den ersten Blick erscheint, aber „It is certainly also one of the most difficult [notions] to understand."[19] In Schriften von Gottlob Frege (1848-1925) findet sich beispielsweise eine empfehlenswerte gut lesbare Kritik aus logischer Sicht am Funktionsbegriff.[20] Trotzdem ist diese nachhaltige mathematische Leistung von Leibniz ein Markstein der Analysis! (Siehe auch die Ausblicke in Kapitel 14 und 15).

Noch einige Bemerkung zum Begriff der Stetigkeit (siehe auch unten). B. Russell hat eine geistreiche Anmerkung gemacht, die uns als Einführung dienen soll: „The notion of continuity has been treated by philosophers, as a rule … But to what they meant by continuity and discreteness, they preserved a discreet and continuous silence."[21] Die griechische Geometrie und die in deren Tradition fußende Geometrie konstruiert Kurven punktweise; die Konstruktionsmittel waren i.a. Zirkel und Lineal. Damit sind solche Kurven, von Gerade und Kreis abgesehen, praktisch nur durch endlich viele Kurvenpunkte angebbar. Auch physikalische Messungen liefern nur endlich viele Messwerte. Man behilft sich mit „Stetigkeitsargumenten", um die Ergebnisse in eine möglichst glatte Kurve einzubetten. Descartes hat beispielsweise die Methode der Fadenkonstruktion hierfür vorgeschlagen. Hierbei wird ein Faden, der um die Funktionswerte (anschaulich die durch Nägel markierten Messwerte) gelegt und festgezurrt. Ähnlich hat schon Euler auf konvexen Flächen elastische Fäden benutzt, um kürzeste Verbindungen von auf der Fläche liegenden Punkte zu ermitteln. Bernhard Riemann (1826-1866) erklärt in seiner Dissertation „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe" (1851) unter Verwendung infinitesimaler Größen Stetigkeit in einem Intervall $[a, b]$ auf diese Weise:

> Unter dem Ausdruck, die Grösse w ändert sich stetig mit z zwischen den Grenzen $z = a$ und $z = b$ verstehen wir: in diesem Intervall entspricht jeder unendlich kleinen Änderung von z eine unendlich kleine Änderung von w.[22]

Funktionen, für die in einem Punkt kein Grenzwert existiert, zeigen in diesem Punkt ein Verhalten,

18 Ibid., p. 46.

19 *Principles of Mathematics*, Cambridge 1903, § 86. - Mehr in Kapitel 15.

20 „Funktion und Begriff", „Was ist eine Funktion?", gut zugänglich in Frege, *Funktion, Begriff, Bedeutung*. Hrg. G. Patzig. Göttingen 1969. Mehr zu dieser Problematik im Kapitel 14.

21 *Principles of Mathematics*, Cambridge 1903, p. 287. Der Fachbegriff *stetig* kann durch die umgangssprachlichen Wörter „unveränderlich, dauerhaft, fortlaufend, immer wieder, fortsetzen, folgen lassen und ununterbrochen verdeutlicht" werden; die Beständigkeit, der Zusammenhang lässt sich auch durch Kontinuität oder continuité (frz.), continuity (engl.), continuatio (lat.) angeben, ggf. in einem anderen Verständnis.

22 *Gesammelte mathematische Werke* (Hrg. R. Dedekind und H. Weber), Leipzig ²1892, p. 46. - Die Aussagen beziehen sich auf komplexe Variable, sie sind aber vermöge des Abstands ohne weiteres auf reelle Größen übertragbar.

das als unstetig bezeichnet wird. Gibt es jedoch einen Grenzwert, so schließen sich in dessen Umgebung die Punkte nachbarschaftlich zusammen. Stetigkeit kann ausschließlich mit topologischen Begriffen beschrieben werden, woraus folgt, dass die Beziehungen zwischen zwei toplogischen Räumen mittels stetiger Funktionen angebbar sind. Anders gesagt sind stetige Funktionen solche, die mit den Strukturen topologischer Räume verträglich sind. Stetige Funktionen in der Analysis sind vergleichbar mit den Homomorphismen der Algebra.

Georg Hamel (1877-1954) erörtert in seiner *Theoretischen Mechanik*[23] diese Problematik aus der Sicht des Physikers und weist dabei auf die Wichtigkeit der Identifizierung materieller Punkte hin. Eine irritierende Frage wäre, was ein Stern tue, wenn man ihn nicht beobachtet. Hamel führt aus, dass die Stetigkeit des Ortsvektors eines Massepunktes eine Mindestvoraussetzung ist. Man könnte ihn sonst „nicht wiedererkennen."[24] Er beruft sich zur Lösung der Frage auf ein Prinzip, das später als der Gen-Identität bekannt wird (Abb. 1.3.). Allgemein ist es prägnant erstmals 1922 von dem bedeutenden Psychologen Kurt Lewin (1890-1947) angegeben worden: Gen-Identität ist die Beziehung, in der Dinge stehen, die auseinander hervorgehen.[25] In der Physik sieht Lewin einen im Zeitraum von t_a bis t_e unter Beobachtung stehenden Körper zu einem Zeitpunkt t_0 lediglich als Glied einer Kette K von Körpern an, wobei jedem Glied dieser Kette (= einer Existentialphase) eine physikalische Geschichte zukommt. Ihre gemeinsame Geschichte legt die Kette K fest. Zwischen zwei Körpern A und B dieser Kette und zwischen den zwei dadurch definierte Zeitpunkte t_a und t_e gibt es für jeden dazwischen liegenden Zeitpunkt t Körper, die zu dieser Kette K gehören und an ihrer Geschichte teilhaben. D.h., die Gen-Identität erzeugt beliebige viele (kontinuierlich viele) „Zwischenkörper" und damit ggf. auch eine Korrespondenz zu den reellen Zahlen, die sich durch die Dedekindschen Schnitte besonders gut veranschaulichen ließe.

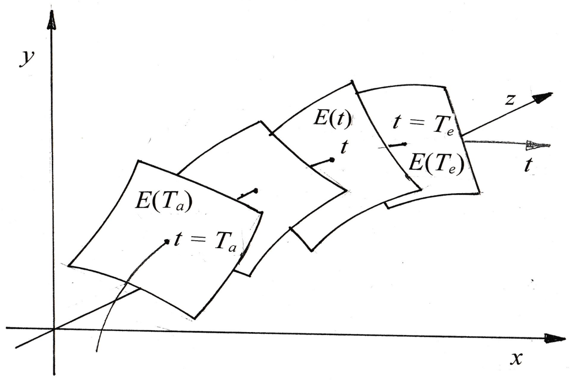


Abb. 1.3. Veranschaulichung der Gen-Identität von Lewin

Kurt Lewin hat sein Prinzip, das er für die Naturwissenschaften als gültig ansieht und das ihm Vergleiche unterschiedlicher Disziplinen ermöglichen soll, so zusammengefasst: Was wir für einen

23 Berlin 1949, Reprint 1978; siehe auch die Vorbemerkung (Seite 4).

24 Ibid., p. 10. G. Hamel bezieht sich auf die *Vorlesungen* (6 Bände) von Helmholtz, Bd. 1, 2, §4. H. Hermes axiomatisierte 1938 das Prinzip der Genidentität „Eine Axiomatisierung der allg. Mechanik", Forsch, z. Logik u. z. Grundlegung der exakten Wiss. NF 3 (1938), pp. 1-48). - Man wendet das Prinzip auch in der Biologie an, aber der Sinn ist dann nicht im biologischen Verständnis mit genetisch zu verwechseln.

25 K. Lewin, *Der Begriff der Genese in Physik, Biologie und Entwicklungsgeschichte* (Habilitationsschrift) 1922; abgedruckt in: *Kurt-Lewin-Werkausgabe*, herausgegeben von C.-F. Graumann, Band 2: *Wissenschaftstheorie* II, herausgegeben von A. Métraux. Bern und Stuttgart 1983, pp. 47–304,