Michael Holz
Detlef Wille

Repetitorium der Linearen Algebra

Teil 2

3. Auflage

HANSER

Wichtige Definitionen und Sätze

Gruppe

$(G, \circ)$ heißt Gruppe, falls gilt:

(G1) $\forall a, b, c \in G$
$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

(G2) $\exists 0 \in G \; \forall a \in G \; 0 \circ a = a \circ 0 = a$

(G3) $\forall a \in G \; \exists b \in G \; a \circ b = b \circ a = 0$

G abelsch $\iff \forall a, b \in G \;\; a \circ b = b \circ a$

Körper

$(K, +, \cdot)$ heißt Körper, falls gilt:

(K1) $(K, +)$ abelsche Gruppe

(K2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppe

(K3) $\forall a, b, c \in K$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Vektorraum

V heißt Vektorraum über K, falls gilt:
(V1)–(V4) $(V, +)$ ist abelsche Gruppe
und $\forall v, w \in V \;,\; \forall \lambda, \mu \in K \;:$

(V5) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

(V6) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

(V7) $\lambda\,(\mu v) = (\lambda\mu)\,v$

(V8) $1v = v$

Untervektorraum

heißt jede Teilmenge U von V mit:

(U1) $0 \in U$

(U2) $v, w \in U \implies v + w \in U$

(U3) $\lambda \in K \;,\; v \in U \implies \lambda v \in U$

Lineare Unabhängigkeit

Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ heißen linear unabhängig, falls gilt:

$$\forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K \; (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0 \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0)$$

(Der Nullvektor ist aus $v_1, \ldots, v_m$ nur trivial linear kombinierbar!)

Dimensionsformel

Sind U und W endlich-dimensionale Vektorräume, so gilt:

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) \; = \dim U + \dim W$$

Lineare Abbildung

$\varphi : V \longrightarrow W$ heißt linear, falls gilt:

(L1) $\forall v, w \in V \; \varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

(L2) $\forall v \in V \;,\; \forall \lambda \in K \; \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

Endomorphismus: $V = W$

Automorphismus: $V = W$, φ bijektiv

$\operatorname{Kern} \varphi \;=\; \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$

$\operatorname{Bild} \varphi \;=\; \varphi(V)$

Kern–Bild–Satz

$\dim \operatorname{Kern} \varphi + \dim \operatorname{Bild} \varphi \; = \dim V$

Jeder Vektorraum V besitzt eine Basis.

Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} \;=\; \sum_{\pi \in \gamma_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)} \qquad \textbf{Leibnizformel}$$

$$\;=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij}$$

Entwicklung n. d. $i-$ten Zeile (analog für Spalten)

$\mathbf{A}_{ij}$ entsteht aus $\mathbf{A}$ durch Streichen von Zeile i und Spalte j.

Wichtige Definitionen und Sätze

Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_B^A(\varphi)$

Es sei $\varphi : V \longrightarrow W$ linear, A Basis von V, B Basis von W.

1. Die Spalten von $\mathbf{M}_B^A(\varphi)$ sind die Koordinatenvektoren bzgl. B der Bilder $\varphi(v_i)$ der Vektoren v_i aus A.
2. Multipliziert man $\mathbf{M}_B^A(\varphi)$ mit dem Koordinatenvektor von v bzgl. A, so erhält man den Koordinatenvektor bzgl. B vom Bildvektor $\varphi(v)$.
3. $\psi : W \longrightarrow U$ linear, C Basis von U: $\mathbf{M}_C^A(\psi \circ \varphi) = \mathbf{M}_C^B(\psi) \cdot \mathbf{M}_B^A(\varphi)$
   speziell für Endomorphismen φ:
   $\mathbf{M}_B^B(\varphi) = \mathbf{M}_B^A(\mathrm{id}) \cdot \mathbf{M}_A^A(\varphi) \cdot \mathbf{M}_A^B(\mathrm{id}) = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{M}_A^A(\varphi) \cdot \mathbf{B}$
   (**Transformationsformel**)

Eigenwert, Eigenvektor von Matrizen

Sei $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$.
Gilt $\mathbf{A}(v) = \lambda v$ für $v \neq 0$ und $\lambda \in K$, so heißt v Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ.
Die Eigenwerte sind die Nullstellen des **charakteristischen Polynoms** $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E})$.
Die Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ sind die nicht-trivialen Lösungen des LGS $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})x = 0$.

Skalarprodukte

Ist $\beta : V \times V \longrightarrow K$ eine Bilinearform (d. h. linear in beiden Argumenten) und symmetrisch ($\beta(u, v) = \beta(v, u)$ für alle $u, v \in V$), so heißt β ein Skalarprodukt.
Ist $K = \mathbb{R}$ und gilt $\beta(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$, so heißt β positiv definit.
(Oft gehört diese Eigenschaft zur Definition eines Skalarprodukts.)

$u, v \in V$ heißen **orthogonal** bzgl. β, falls $\beta(u, v) = 0$

Euklidischer Vektorraum (V, β): $K = \mathbb{R}$, β pos. def. Skalarprodukt auf V.
Unitärer Vektorraum (V, β): $K = \mathbb{C}$, β pos. def. Hermit. Form auf V.
Jeder euklidische (unitäre) Vektorraum mit abzählbarer Dimension besitzt eine Orthogonalbasis. (SCHMIDTsches Orthogonalisierungsverfahren)

Äquivalenz, Ähnlichkeit, Kongruenz von Matrizen

$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ äquivalent: es gibt invert. Matrizen $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ mit $\mathbf{B} = \mathbf{PAQ}$.
$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ ähnlich: es gibt eine invert. Matrix $\mathbf{P}$ mit $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$
$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ kongruent: es gibt eine invert. Matrix $\mathbf{P}$ mit $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{\top}\mathbf{AP}$
Hierdurch werden Äquivalenzrelationen definiert. Das **Normalformproblem** besteht jeweils darin, einen möglichst einfachen Repräsentanten jeder Äquivalenzklasse zu finden. (siehe dazu Seiten 59, 61, 199)

REPETITORIUM

DER

LINEAREN ALGEBRA

Teil 2

Dr. Michael Holz
Dr. Detlef Wille

3. Auflage

Verlag:	**Binomi**	**Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen**
	Telefon	**05105-6624000**
	Email	**verlag@binomi.de**
	Internet	**https://www.binomi.de**

Zu beziehen auf

www.binomi.de

ISBN 978–923 923–70–0

Hannover 7/20

Vorwort

Im vorliegenden Teil 2 des Repetitoriums zur Linearen Algebra wird die Aufgabensammlung des ersten Teils fortgesetzt. Die Themen der ersten beiden Kapitel ergänzen und vertiefen den dort behandelten Stoff. Kapitel 3 bis 6 bringen Aufgaben zu Themen, die üblicherweise im zweiten Teil einer zweisemestrigen Vorlesung zur Linearen Algebra im Mittelpunkt stehen. Insgesamt kann das Repetitorium studienbegleitend zu einem Kurs über Lineare Algebra während der ersten beiden Semester eines Mathematik– bzw. Physikstudiums benutzt werden.
Für Physikstudenten möchten wir folgende Punkte besonders hervorheben:

- die Eigenwerttheorie
- die simultane Diagonalisierbarkeit von Matrizen in Abschnitt 2.6
- die Triangulierung von Matrizen, die JORDAN-CHEVALLEY-Zerlegung bzw. die Berechnung der JORDANschen Normalform von Matrizen als Hilfsmittel bei der Untersuchung von Systemen linearer Differentialgleichungen in den Abschnitten 2.6, 3.2 bzw. in Kapitel 4
- die Hauptachsentransformation von Flächen 2. Ordnung mit Berechnung der zugehörigen affinen Basen in Kapitel 6.

Die Terminologie in diesem Buch schließt sich im wesentlichen an die des ersten Teils an. Auf folgende Besonderheiten möchten wir aber ausdrücklich hinweisen:

1. Vektoren X des K^n sind als Elemente dieser Menge $n-$Tupel der Form $(x_1, \ldots, x_n)$. Da wir Vektoren von rechts an Matrizen heranmultiplizieren, ist es unumgänglich, einen Vektor als Spaltenvektor aufzufassen. Wir identifizieren also das $n-$Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit der Spalte $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
2. Da wir Vektorräume V über beliebigen Körpern K betrachten, haben wir die Bezeichnung des Koordinatenvektors von X bzgl. einer Basis B von V geändert. Wir bezeichnen hier diesen Vektor mit $k_B(X)$.
3. Die kanonische Basis des K^n bezeichnen wir stets mit E.

In der vorliegenden Neuauflage haben wir das Kapitel 3 über die JORDAN-CHEVALLEY-Zerlegung neu eingefügt, in dem ausführlich nilpotente Matrizen und die JORDAN-CHEVALLEY-Zerlegung einer zerfallenden Matrix mit Anwendungen, insbesondere in der Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme, behandelt werden.

Barsinghausen, im Juli 2020

Griechisches Alphabet

A	α	alpha	I	ι	iota	R	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mü	Υ	υ	üpsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nü	Φ	φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

Deutsches Alphabet

$\mathcal{A}$	$\mathcal{a}$	a	$\mathcal{J}$	$\mathcal{j}$	j	$\mathcal{S}$	$\mathcal{s}$	s
$\mathcal{B}$	$\mathcal{b}$	b	$\mathcal{K}$	$\mathcal{k}$	k	$\mathcal{T}$	$\mathcal{t}$	t
$\mathcal{C}$	$\mathcal{c}$	c	$\mathcal{L}$	$\mathcal{l}$	l	$\mathcal{U}$	$\mathcal{u}$	u
$\mathcal{D}$	$\mathcal{d}$	d	$\mathcal{M}$	$\mathcal{m}$	m	$\mathcal{V}$	$\mathcal{v}$	v
$\mathcal{E}$	$\mathcal{e}$	e	$\mathcal{N}$	$\mathcal{n}$	n	$\mathcal{W}$	$\mathcal{w}$	w
$\mathcal{F}$	$\mathcal{f}$	f	$\mathcal{O}$	$\mathcal{o}$	o	$\mathcal{X}$	$\mathcal{x}$	x
$\mathcal{G}$	$\mathcal{g}$	g	$\mathcal{P}$	$\mathcal{p}$	p	$\mathcal{Y}$	$\mathcal{y}$	y
$\mathcal{H}$	$\mathcal{h}$	h	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{q}$	q	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{z}$	z
$\mathcal{I}$	$\mathcal{i}$	i	$\mathcal{R}$	$\mathcal{r}$	r			

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vektorräume beliebiger Dimension

Dieses Kapitel bringt Ergänzungen und Vertiefungen zu Teil 1 des Repetitoriums. Insbesondere sollen wesentliche Aspekte – wie die Existenz einer Basis, der Austauschsatz von Steinitz, der Dimensionsbegriff, die Definition von linearen Abbildungen durch die Bilder von Vektoren einer Basis – für Vektorräume beliebiger Dimension behandelt werden. Die beiden ersten Abschnitte befassen sich daher mit den wichtigsten Tatsachen und Techniken, die man beim Umgang mit unendlichen Mengen kennen und beherrschen sollte.

Bei Hinweisen auf Teil 1 des Repetitoriums werden wir stets die Abkürzung REP1 verwenden.

1.1 Unendliche Mengen

Zunächst wiederholen wir eine Definition aus REP1, Abschnitt 1.3:

Mächtigkeit von Mengen

Zwei Mengen M und N heißen **gleichmächtig**, wenn es eine bijektive Funktion $f : M \longrightarrow N$ gibt.
M und N haben dann gleiche **Mächtigkeit** (in Zeichen: $|M| = |N|$).

Wir schreiben $|M| \leq |N|$, falls es eine injektive Funktion von M nach N gibt.
Mit dem Auswahlaxiom (siehe nächste Seite) gilt für $M \neq \emptyset$:
$|M| \leq |N| \iff$ Es gibt eine surjektive Funktion von N auf M.
$|M| < |N|$ bedeutet $|M| \leq |N|$ und $|M| \neq |N|$.

Unendliche Mengen

Eine Menge M heißt **unendlich**, falls $M \neq \emptyset$ und $|M| \neq |\{1, \ldots, n\}|$ für jede natürliche Zahl n gilt.
Andernfalls heißt M **endlich**.

Beim Umgang mit unendlichen Mengen setzen wir stets das **Auswahlaxiom** voraus.

Auswahlaxiom

Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen, so ist das kartesische Produkt $\prod_{i \in I} M_i$ dieser Familie nicht leer
(d. h. es gibt eine Funktion $f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} M_i$ mit $f(i) \in M_i$ für alle $i \in I$).

Das Auswahlaxiom ist äquivalent zu der Aussage:

Für je zwei Mengen M, N gilt $|M| < |N|$ oder $|M| = |N|$ oder $|N| < |M|$.

Man kann mit Hilfe des Auswahlaxioms das Zeichen $|M|$, das bis jetzt nur in obigen Bezeichnungen sinnvoll gebraucht werden kann, exakt definieren als **Kardinalzahl** oder **Mächtigkeit** der Menge M.[1]
Häufige Bezeichnung: $|\mathbb{N}| =: \aleph_0$.[2]
Für uns hat $|M| = \aleph_0$ die Bedeutung $|M| = |\mathbb{N}|$, d.h. es gibt eine bijektive Funktion von $\mathbb{N}$ auf M.
Summe, Produkt und Potenz von Kardinalzahlen werden wie folgt definiert:

Rechenoperationen für Kardinalzahlen

Sind M und N Mengen und ist $|M| = \mu$ und $|N| = \nu$, so ist

$$\begin{aligned} \mu + \nu &:= |(M \times \{0\}) \cup (N \times \{1\})| \,, \\ \mu \cdot \nu &:= |M \times N| \qquad \text{und} \\ \nu^\mu &:= |N^M| = |\{f \mid f : M \longrightarrow N\}|. \end{aligned}$$

Diese Definition ist sinnvoll, da aus $|M| = |S|$ und $|N| = |T|$ folgt:

$$\begin{aligned} |M \times N| &= |S \times T| \,, \\ |N^M| &= |T^S| \qquad \text{und} \\ |(M \times \{0\}) \cup (N \times \{1\})| &= |(S \times \{0\}) \cup (T \times \{1\})| \,. \end{aligned}$$

Die wesentlichen Hilfsmittel beim Arbeiten mit Mengen unendlicher Mächtigkeit sind die folgenden Regeln:

[1] Wir werden hier nicht definieren, was eine Kardinalzahl ist. Dennoch ist es zweckmäßig, Kardinalzahlen zu verwenden; ihr Gebrauch läßt sich jedoch stets mit Hilfe der Definitionen von $|M| = |N|$ und $|M| \leq |N|$ eliminieren.

[2] $\aleph$ (sprich: Alef) ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets. Mit $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$ bezeichnet man in aufsteigender Folge die Kardinalzahlen unendlicher Mengen. $\aleph_0$ ist also die kleinste unendliche Kardinalzahl (siehe Aufgabe 2 a)).

Sätze über unendliche Mengen

1. **Satz von SCHRÖDER–BERNSTEIN**

   Ist $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$, so ist $|M| = |N|$

   (d. h. gibt es eine Injektion von M nach N und eine Injektion von N nach M, so gibt es eine Bijektion von M auf N).

2. Ist eine der beiden nichtleeren Mengen M und N unendlich, so gilt
   $$|M \times N| = \max\{|M|, |N|\}.^3$$
   Insbesondere ist $|M^n| = |M|$ für jede unendliche Menge M ($n \in \mathbb{N}$).

3. Ist $|M_i| \leq |M|$ für jedes $i \in I$, so gilt
   $$|\bigcup\{M_i \mid i \in I\}| \leq |I| \cdot |M|.$$

4. Sei $\mathcal{P}_{fin}(M) := \{S \subseteq M \mid S \text{ ist endlich }\}$ die Menge der endlichen Teilmengen von M. Ist M unendlich, so ist
   $$|M| = |\mathcal{P}_{fin}(M)|.$$

5. Für jede Menge M gilt $|M| < |\mathcal{P}(M)| := |\{S \mid S \subseteq M\}|$.

1.1.1

Eine Menge A heißt
abzählbar unendlich, *wenn es eine Bijektion f von $\mathbb{N}$ auf A gibt,*
abzählbar, *wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.*
Man zeige:

a) *Ist A abzählbar und ist M endlich, so ist $A \cup M$ abzählbar.*

b) *Ist A abzählbar und ist M eine Teilmenge von A, so ist M abzählbar.*

c) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, *definiert durch*
$$f(x,y) := \tfrac{1}{2}(x+y)(x+y+1) + y\ ,$$
ist eine Bijektion von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ (wobei hier $0 \in \mathbb{N}$ gelten soll).

d) $\mathbb{Z}$ *und* $\mathbb{Q}$ *sind abzählbar unendlich.*

e) *Die Menge* $2^{\mathbb{N}} := \{f \mid f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}\}$ *ist nicht abzählbar.*

f) $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

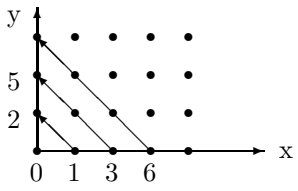
a) Da die Vereinigung endlicher Mengen endlich ist, sei o. B. d. A. $|A| = |\mathbb{N}|$. Ferner sei $A \cap M = \emptyset$ (sonst betrachte $M \setminus A$ statt M).

[3] Hieraus folgt, falls eine der Mengen M und N unendlich ist:
$|M| + |N| = \max\{|M|, |N|\}$.

Der Beweis läßt sich humorvoll beschreiben durch die Geschichte vom Hotel mit den abzählbar unendlich vielen Betten. Wenn es belegt ist und $k = |M|$ neue Gäste ankommen, rücken alle Gäste k Betten weiter, und schon ist wieder Platz genug da.
Sei also $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$ (M ist endlich bedeutet nach Definition: Es gibt eine natürliche Zahl k mit $|M| = |\{1, \ldots, k\}|$ – oder $M = \emptyset$, was hier uninteressant ist), und sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ eine Bijektion.
Definiere $g(n) := m_n$ für $n \leq k$ und $g(k+n) := f(n)$. g ist eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $M \cup A$.

b) Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich (vollständige Induktion!). Sei also $|A| = |\mathbb{N}|$. Da es eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf A gibt, genügt es, die Behauptung für $A = \mathbb{N}$ zu zeigen. Sei o. B. d. A. M unendlich.
Wir definieren durch *vollständige Induktion* eine Injektion g von $\mathbb{N}$ nach M. Sei $g(1) := \min M$. Sind $g(1), \ldots, g(n)$ bereits definiert, so ist $M \neq \{g(1), \ldots, g(n)\}$, da M unendlich ist. Somit hat $M \setminus \{g(1), \ldots, g(n)\}$ ein kleinstes Element b. Setze $g(n+1) := b$. Nach Konstruktion ist g injektiv, also gilt $|\mathbb{N}| \leq |M|$.
Da $M \subseteq \mathbb{N}$, gilt $|M| \leq |\mathbb{N}|$, und somit folgt $|M| = |\mathbb{N}|$ mit dem Satz von Schröder–Bernstein.
(Bemerkung: Die oben definierte Funktion g ist sogar bijektiv.)

c) Der Leser mache sich eine Skizze:



f zählt die Paare natürlicher Zahlen längs der Geraden $y = -x + m$, $m \in \mathbb{N}$, ab, und zwar von unten nach oben. Hat der Punkt $(0, m)$ die Nummer n, so erhält der Punkt $(m+1, 0)$ die Nummer $n+1$.

Diese Vorstellung macht den folgenden Beweis durchsichtig.
Wir zeigen zunächst, daß f injektiv ist.
Sei $(a, b) \neq (x, y)$; o. B. d. A. sei $a + b \leq x + y$.
(i) Ist $a + b = x + y$ und o. B. d. A. $b < y$ (aus $b = y$ folgt $a = x$), so ist

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \frac{1}{2}(a+b)(a+b+1) + b = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) + b \\ &< \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) + y = f(x,y). \end{aligned}$$

(ii) Ist $a + b < x + y$, also $a + b + 1 \leq x + y$, so ist

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \frac{1}{2}(a+b)(a+b+1) + b < \frac{1}{2}(a+b)(a+b+1) + a + b + 1 \\ &= \frac{1}{2}(a+b+1)(a+b+2) \leq \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) \\ &\leq f(x,y). \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist also $f(a,b) \neq f(x,y)$.
Durch *vollständige Induktion* zeigen wir nun, daß jede natürliche Zahl als Bild unter f auftritt.
Es ist $f(0,0) = 0$. Sei $f(a,b) = n$. Zu zeigen ist, daß es x und y gibt mit $f(x,y) = n+1$. Ist $a = 0$, so ist

$$f(b+1,0) = \frac{1}{2}(b+1)(b+2) = (\frac{1}{2}b(b+1)+b)+1 = f(a,b)+1 = n+1.$$

Ist $a \neq 0$, so ist

$$f(a-1,b+1) = f(a,b)+1 = n+1.$$

d) Wir zeigen zunächst, daß $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich ist. Sei $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Dann läßt sich r als Bruch $\frac{p}{q}$ mit teilerfremden $p, q \in \mathbb{N}$ eindeutig darstellen. Die Funktion $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $f(r) = f(\frac{p}{q}) := (p,q)$ ist somit injektiv[4], also gilt nach Teil c) die Abschätzung $|\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Sicher ist $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}^+|$, also folgt $|\mathbb{Q}^+| = |\mathbb{N}|$.
Ist g eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}^+$, so erhält man durch

$$0, g(1), -g(1), g(2), -g(2), g(3), -g(3), \ldots$$

alle rationalen Zahlen. Präziser:
Sei $h(2m) := g(m)$, $h(2m+1) := -g(m)$ für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, und sei $h(1) := 0$. Dann ist h eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Z}$ läßt sich entsprechend abzählen gemäß der Aufzählung:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

Ein anderer Weg zur Einsicht, daß $\mathbb{Z}$ abzählbar ist, ist der folgende:
$\mathbb{Z}$ ist eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{Q}$, denn $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Nach Teil b) und wegen $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ gilt $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

e) Die Behauptung folgt mit $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}|$ sofort aus dem Vorspann (Satz 5 über unendliche Mengen) und der nachfolgenden Aufgabe 2 b).
Wir wollen sie hier aber auf andere Weise zeigen, nämlich durch ein sog. Diagonalargument.
Annahme: $2^{\mathbb{N}}$ ist abzählbar. Zunächst ist $2^{\mathbb{N}}$ nicht endlich, denn für die Menge $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $g_n(k) := 1$ g.d.w. $k = n$ gilt $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$.
Also gibt es eine Bijektion $\Phi : \mathbb{N} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$. Mit der Abkürzung $f_n := \Phi(n)$ ist dann $2^{\mathbb{N}} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Definiere $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ durch $f(n) := 1 - f_n(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach Annahme gibt es ein m mit $f = f_m$. Aber es gilt $f(m) = 1 - f_m(m) \neq f_m(m)$ – ein Widerspruch. Somit ist $2^{\mathbb{N}}$ nicht abzählbar.

[4] $\mathbb{Q}^+ := \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0\}$

f) Die Aussage folgt aus $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$ (siehe Aufgabe 2 c)) und Teil e). Der klassische Beweis von G. CANTOR benutzt ein Diagonalargument.
Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Dann ist auch das Intervall $(0,1)$ nach b) abzählbar. Sicher ist $(0,1)$ unendlich, da $\{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq (0,1)$. Also gibt es eine Bijektion $\Phi : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$. Mit der Abkürzung $a_n := \Phi(n)$ ist dann

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Jedes $x \in (0,1)$ läßt sich eindeutig als nichtabbrechender Dezimalbruch[5] darstellen. Also hat jedes a_n eine Darstellung

$$a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} \cdot 10^{-i} \quad \text{mit } a_{ni} \in \{0,1,2,\ldots,9\} \text{ für alle } i.$$

Wir werden nun eine Zahl b mit $0 < b < 1$ angeben, die in $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ nicht vorkommt (im Widerspruch zu unserer Annahme).
Setze $b_i := 1$, falls $a_{ii} \neq 1$, und $b_i := 2$, falls $a_{ii} = 1$.
Es ist $b := \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot 10^{-i} \in (0,1)$, also gibt es ein m mit $b = a_m$. Aus der Eindeutigkeit der Darstellung als nichtabbrechender Dezimalbruch folgt nun $b_i = a_{mi}$ für alle i, also insbesondere $b_m = a_{mm}$. Aber nach Definition von b_m ist $b_m \neq a_{mm}$. Dieser Widerspruch zeigt, daß das Intervall $(0,1)$ (und damit auch $\mathbb{R}$) nicht abzählbar ist.

1.1.2
Man zeige:

a) *Ist M eine unendliche Menge, so ist $|\mathbb{N}| \leq |M|$.*

b) *Ist $2^M := \{f \,|\, f$ ist Funktion von M nach $\{0,1\}\}$, so ist $|2^M| = |\mathcal{P}(M)|$.*

c) $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}^n| \qquad (n \in \mathbb{N})$.
(Hierher rührt die Aussage $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, da man mit $2^{\aleph_0}$ die Kardinalzahl von $2^{\mathbb{N}}$ bezeichnet.)[6]

a) Wir konstruieren durch *vollständige Induktion* eine injektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M.

[5] Es gilt z. B. $x = 0,456 = 0,455\overline{9}$. Die eindeutige Darstellung von x als nichtabbrechender Dezimalbruch ist $x = 0,455\overline{9}$.

[6] Da $|\mathbb{N}| < \mathcal{P}(\mathbb{N})$, gilt $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Die sog. **Kontinuumhypothese** von G. CANTOR lautet: Es gibt keine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $|\mathbb{N}| < |M| < |\mathbb{R}|$. Eine andere Formulierung ist: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, denn $\aleph_1$ ist nach Definition die kleinste unendliche Kardinalzahl $> \aleph_0$.
K. GÖDEL und P.J. COHEN haben gezeigt, daß die Kontinuumhypothese mit Hilfe der üblichen Axiome der Mengenlehre weder beweisbar noch widerlegbar ist.

Da $M \neq \emptyset$, gibt es $m_1 \in M$. Seien $m_1, \ldots, m_n$ schon gewählt mit $m_i \neq m_j$ für $i \neq j$. Da M nicht endlich ist, ist insbesondere $M \neq \{m_1, \ldots, m_n\}$ (wäre $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$, so wäre durch $f(i) := m_i$ eine Bijektion von $\{1, \ldots, n\}$ auf M gegeben). Somit existiert ein Element $m_{n+1} \in M \setminus \{m_1, \ldots, m_n\}$. Insbesondere ist $m_{n+1} \neq m_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Damit ist eine Injektion $g : \mathbb{N} \longrightarrow M$ durch $g(i) := m_i$ gegeben.
Der aufmerksame Leser wird feststellen, daß wir das Auswahlaxiom gebraucht haben, da wir ohne eine effektive Vorschrift unendlich oft jeweils aus einer Teilmenge von M ein Element ausgewählt haben.

b) Für $S \subseteq M$ sei $\chi_S : M \longrightarrow \{0,1\}$ die sog. **charakteristische Funktion** von S (in M), definiert durch

$$\chi_S(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in S \\ 0\,, & \text{falls } x \in M \setminus S \end{cases} .$$

Da zwei Funktionen mit demselben Definitionsbereich genau dann gleich sind, wenn sie überall denselben Funktionswert haben, sieht man leicht, daß durch $\Phi(S) := \chi_S$ eine Bijektion $\Phi : \mathcal{P}(M) \longrightarrow 2^M$ gegeben ist.

c) Es reicht der Beweis der ersten Gleichung, da die zweite Gleichung aus b) folgt und $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$ nach dem Vorspann gilt.
Bekanntlich läßt sich jede reelle Zahl x mit $0 < x < 1$ eindeutig als nichtabbrechender Dualbruch der Form $\sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i}$ mit $a_i \in \{0,1\}$ für alle i darstellen. Somit ist durch $\Phi(x) := (a_i : i \in \mathbb{N})$ eine Injektion Φ von $(0,1)$ nach $2^{\mathbb{N}}$ gegeben. Nach Aufgabe 3 ist $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$, also folgt $|\mathbb{R}| \leq |2^{\mathbb{N}}|$.

Wir zeigen nun $|2^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{R}|$ und erhalten dann insgesamt mit Hilfe des Satzes von Schröder–Bernstein die Aussage $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$. Dazu konstruieren wir eine injektive Funktion $\Psi : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Sei $2^{\mathbb{N}} = M \cup N$, wobei

$$M := \{f \in 2^{\mathbb{N}} \mid \exists n_0 \forall n \geq n_0\ f(n) = 0\} \text{ und } N := 2^{\mathbb{N}} \setminus M$$

ist. Für $f \in M$ sei $\Psi(f) := -\sum_{i=1}^{\infty} f(i)\, 2^{-i}$, für $f \in N$ sei $\Psi(f) := \sum_{i=1}^{\infty} f(i)\, 2^{-i}$.
Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von Elementen von $(0,1]$ als nichtabbrechender Dualbruch ist $\Psi \restriction N$ injektiv. (Mit $\Psi \restriction N$ bezeichnen wir die **Einschränkung** von Ψ auf N.) Ist $f \in M$, so ist $\Psi(f)$ eine endliche Summe, und bekanntlich ist $\Psi \restriction M$ injektiv. Nun folgt leicht, daß $\Psi : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv ist, und es gilt daher $|2^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{R}|$.

1.1.3
Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so gilt: $|(a,b)| = |\mathbb{R}| = |[a,b]|$.

Zunächst gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:

$$|(a,b)| = |(0,1)| \quad \text{und} \quad |[a,b]| = |[0,1]| \,.$$

Durch $\varphi(t) := tb + (1-t)\,a$ ist nämlich eine Bijektion von $[0,1]$ auf $[a,b]$ definiert. Dies erkennt man wie folgt: $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.
Ist $t_1 < t_2$, so ist $\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = (t_2 - t_1)(b-a) > 0$, also $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$; φ ist injektiv. Ist $a < c < b$ und $t = \frac{c-a}{b-a}$, so ist $\varphi(t) = c$; φ ist surjektiv.
Da $\tan : (-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ bijektiv ist, ist $|\mathbb{R}| = |(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2})| = |(0,1)| = |(a,b)|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
Mit dem Satz von Schröder–Bernstein folgt nun auch die Behauptung für die Fälle, in denen bei (a,b) $a = -\infty$ oder $b = \infty$ zugelassen ist.
Es bleibt zu zeigen: $|[a,b]| = |(a,b)|$.
Dies folgt mit den bisherigen Ergebnissen, wenn wir $|(0,1)| = |[0,1]|$ beweisen.
Nach 1 a) gibt es eine Bijektion f von $\{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} =: M$ auf $M \cup \{0,1\}$.
Nun ist $g : (0,1) \longrightarrow [0,1]$, definiert durch $g(t) := f(t)$ für $t \in M$, $g(t) := t$ für $t \in (0,1) \setminus M$, eine Bijektion.

1.1.4
Es gilt: $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}| < |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$.

Wir zeigen:

$$(*) \qquad |\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}| = |(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}| \,.$$

Daraus folgt mit 2 c): $\begin{aligned} |\mathbb{R}| &= |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}| \\ &= |(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| \,. \end{aligned}$

Ferner gilt nach 2 b): $|\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\{0,1\}^{\mathbb{R}}| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$.
$(*)$ zeigen wir allgemeiner:
Für beliebige Mengen A, B, C ist $|A^{B\times C}| = |(A^B)^C|$.
(Dies liefert die Kardinalzahlregel: $a^{b\cdot c} = (a^b)^c$.)
Zum Beweis dieser Aussage geben wir eine Bijektion von $(A^B)^C$ auf $A^{B\times C}$ an.
Sei $f \in (A^B)^C$. Dann ist für jedes $c \in C$ durch $f_c := f(c)$ eine Funktion von B nach A gegeben. $\Phi(f) \in A^{B\times C}$ sei definiert durch $\Phi(f)\,((b,c)) := f_c(b)$.
Man überzeugt sich schnell, daß Φ eine gesuchte Bijektion ist.

1.1.5
Man zeige: Ist V ein Vektorraum endlicher Dimension über dem Körper K, so ist

$$|V| = \begin{cases} |K| & , \text{ falls } K \text{ unendlich ist.} \\ m^{\dim V} & , \text{ falls } |K| = m \in \mathbb{N} \, . \end{cases}$$

Hat V die Dimension $n \in \mathbb{N}$, so wissen wir (siehe auch Aufgabe 1.3.2), daß V isomorph zum Vektorraum K^n (über K) ist, wobei ein Isomorphismus gegeben ist durch diejenige lineare Abbildung φ, die jedem Vektor seinen Koordinatenvektor bezüglich einer fest vorgegebenen Basis B zuordnet.
Insbesondere ist φ bijektiv, also ist $|V| = |K^n|$.
Ist K unendlich, so folgt nach dem Vorspann $|V| = |K^n| = |K|$.
Ist K endlich und $m = |K|$, so ist bekanntlich $|K^n| = m^n$.

1.1.6
Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Man zeige:

a) *Ist B eine Basis von V, ist $V \neq \{0\}$ und ist K oder B eine unendliche Menge, so ist $|V| = \max\{|K|, |B|\}$.*

b) *Ist S eine unendliche Teilmenge von V, so ist $|L(S)| = \max\{|S|, |K|\}$.*

Teil b) folgt aus Teil a), wenn man eine beliebige Basis $B \subseteq S$ vom Vektorraum $V := L(S)$ wählt (dies ist möglich nach Aufgabe 1.2.3).
Zunächst ist dann nämlich nicht sowohl B als auch K endlich, da sonst $L(S)$ genau $|K|^{|B|}$ Elemente hätte im Widerspruch dazu, daß $S \subseteq L(S)$ und S unendlich ist. Also ist nach a) $|L(S)| = \max\{|K|, |B|\}$. Da wegen $B \subseteq S$

$$\begin{aligned} |L(S)| &= \max\{|K|, |B|\} \leq \max\{|K|, |S|\} \\ &\leq \max\{|K|, |L(S)|\} = |L(S)| \, , \end{aligned}$$

ist auch $|L(S)| = \max\{|K|, |S|\}$.

Wir beweisen nun Teil **a)**.
Sicher ist $|B| \leq |V|$.
Wähle $0 \neq X \in B$. Für $\alpha, \beta \in K$ mit $\alpha \neq \beta$ ist $\alpha X \neq \beta X$, da $X \neq 0$. Somit ist

$$|K| = |\{\alpha X \mid \alpha \in K\}| = |L(X)| \leq |V|.$$

Es folgt $\max\{|K|, |B|\} \leq |V|$.

Zum Beweis der Relation "$\geq$"ordnen wir jedem Vektor $Y \neq 0$ eine endliche Teilmenge

$$\Phi(Y) := \{(\lambda_1, X_1), \ldots, (\lambda_k, X_k)\} \text{ von } K \times B$$

zu, wobei $Y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i$ die eindeutige Darstellung von Y durch $X_1, \ldots, X_k \in B$ mit gewissen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K \setminus \{0\}$ ist. Setzt man noch $\Phi(0) = \emptyset$, so ist eine injektive Abbildung Φ von V in $\mathcal{P}_{fin}(K \times B)$ definiert. Da $K \times B$ unendlich ist, ist nach den vorn angeführten Sätzen

$$|\mathcal{P}_{fin}(K \times B)| = |K \times B| = \max\{|K|, |B|\}.$$

Also ist $|V| \leq \max\{|K|, |B|\}$.

1.1.7
Man zeige, daß der Vektorraum $\mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$ keine abzählbare Basis besitzt.

Bekanntlich ist $\mathbb{Q}$ abzählbar, $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar (in unserer Sprechweise: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0 < |\mathbb{R}|$).
Wäre B eine Basis von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ mit $|B| \leq |\mathbb{N}|$, so wäre nach der vorigen Aufgabe $|\mathbb{R}| = \max\{|B|, |\mathbb{Q}|\} = \aleph_0$ – ein Widerspruch.

1.1.8
Sei V ein Vektorraum über K. Man zeige, daß je zwei Basen B_1 und B_2 von V gleichmächtig sind.
(Dies rechtfertigt die Definition der Dimension von V auch für Vektorräume, die keine endliche Dimension haben – siehe 1.3.*)*

Falls eine der Basen endlich ist, so ist es auch die andere, und es gilt $|B_1| = |B_2|$ nach dem Austauschsatz von Steinitz für Vektorräume endlicher Dimension. Seien also beide Basen unendlich. Wir zeigen $|B_2| \leq |B_1|$. Aus Symmetriegründen folgt dann auch $|B_1| \leq |B_2|$, also $|B_1| = |B_2|$ mit dem Satz von Schröder–Bernstein.
Sei $X \in B_1$. Dann gibt es $X_1, \ldots, X_k \in B_2$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K \setminus \{0\}$ mit

$$X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i \, .$$

Es sei $\Phi(X) := \{X_1, \ldots, X_k\}$. Hierdurch ist eine Abbildung Φ von B_1 nach $\mathcal{P}_{fin}(B_2)$ definiert.

Behauptung: $B_2 = \bigcup\{\Phi(X) \mid X \in B_1\} =: C$.
Sicher ist $C \subseteq B_2$. Wir nehmen an, daß ein Vektor $Y \in B_2 \setminus C$ existiert. Da B_1 eine Basis ist, ist Y eine Linearkombination von gewissen Vektoren $Y_1, \ldots, Y_r \in B_1$. Jedes Y_i ist eine Linearkombination von Elementen von $\Phi(Y_i)$, also ist Y eine Linearkombination von Elementen von $C \subseteq B_2$. Nach Annahme kommt Y unter diesen nicht vor. Dies widerspricht der linearen Unabhängigkeit von B_2. Somit gilt $C = B_2$, und damit nach unseren Regeln (Regel 3)

$$|B_2| = |\bigcup\{\Phi(X) \mid X \in B_1\}| \leq |\mathbb{N}| \cdot |B_1|,$$

denn $|\Phi(X)| < |\mathbb{N}|$ für jedes $X \in B_1$.
Nun ist $|\mathbb{N}| \cdot |B_1| = \max\{|\mathbb{N}|, |B_1|\} = |B_1|$, da B_1 unendlich ist (Aufgabe 2 a)).
Also folgt insgesamt $|B_2| \leq |B_1|$.

1.1.9
Man zeige, daß die Vektorräume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ als Vektorräume über dem Körper $\mathbb{Q}$ isomorph sind. Insbesondere sind also die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{C}, +)$ isomorph.

1. Lösungsweg:
Wir wissen, daß $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$ gilt. Ist B eine Basis von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$, so folgt aus Aufgabe 6: $|\mathbb{R}| = \max\{|B|, |\mathbb{Q}|\}$. Wegen $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ und $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$ ist $|B| = |\mathbb{R}|$. Analog folgt für jede Basis C von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$: $|C| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ haben folglich als Vektorräume über $\mathbb{Q}$ dieselbe Dimension (siehe Vorspann zu 1.3) und sind daher nach Aufgabe 1.3.2 isomorph.

2. Lösungsweg:
Wähle eine Basis B des Vektorraums $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$. Da jedes $z \in \mathbb{C}$ die Darstellung $z = x + iy$ für gewisse $x, y \in \mathbb{R}$ hat, rechnet man leicht nach, daß

$$B \cup \{ib \mid b \in B\} =: B \cup iB$$

eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$ ist. B ist unendlich, da sonst für $|B| = n \in \mathbb{N}$ der Widerspruch $|\mathbb{R}| = |\mathbb{Q}^n| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ folgt. Daher gilt nach den Regeln für das Rechnen mit Kardinalzahlen wegen $B \cap iB = \emptyset$:

$$|B \cup iB| = |B \times \{0, 1\}| = \max\{2, |B|\} = |B| \,.$$

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ haben also als Vektorräume über $\mathbb{Q}$ dieselbe Dimension und sind, wiederum nach Aufgabe 1.3.2, isomorph.

1.2 Das ZORNsche Lemma

Das wichtigste Beweisprinzip für unendliche Mengen ist ein Axiom der Mengenlehre, das unter dem Namen **ZORNsches Lemma** – abgekürzt (ZL) – bekannt ist. Äquivalent zu (ZL) sind u. a. die spezielle Fassung des ZORNschen Lemmas für die Halbordnung $\subseteq$, hier $(ZL)^*$ genannt, das **Auswahlaxiom** und der sog. **Wohlordnungssatz**, der hier nicht behandelt werden soll.
Zu den Begriffen **Halbordnung** sowie **Ordnung** bzw. **Kette** sei auf REP1 verwiesen. Statt Ordnung sagt man auch **lineare Ordnung**.
Zur Formulierung von (ZL) werden einige Begriffe benötigt.

$\leq$ sei eine Halbordnung auf der Menge H.

1. Ist $S \subseteq H$, so heißt $h \in H$ eine **obere Schranke** von S, falls $a \leq h$ für alle $a \in S$ gilt.
2. $a \in H$ heißt **maximales Element** von H bzgl. $\leq$, falls kein $b \in H$ mit $a \leq b$ und $a \neq b$ existiert. (Oder äquivalent: Für alle $b \in H$ mit $a \leq b$ gilt $a = b$.)

ZORNsches Lemma (ZL)
Ist H eine nichtleere Menge und $\leq$ eine Halbordnung auf H mit der Eigenschaft, daß jede bzgl. $\leq$ linear geordnete Teilmenge von H eine obere Schranke in H hat, so besitzt H bzgl. $\leq$ ein maximales Element.

ZORNsches Lemma Fassung (ZL)*
Ist M eine nichtleere Menge von Teilmengen einer Menge mit der Eigenschaft, daß für jede bzgl. $\subseteq$ linear geordnete nichtleere Teilmenge M' von M die Menge $\bigcup M'$ ein Element von M ist, so besitzt M (bzgl. $\subseteq$) ein maximales Element.[7]

[7] $\bigcup M' := \{x \mid \text{ Es gibt ein } S \in M' \text{ mit } x \in S\}$.

1.2.1
Man beweise: $(ZL) \iff (ZL)^*$.

Sicher impliziert (ZL) die Aussage $(ZL)^*$:
Wählt man nämlich als Halbordnung die Relation $\subseteq$ auf M, so ist $\bigcup M'$ stets eine obere Schranke für Ketten $M' \subseteq M$; die Voraussetzungen von (ZL) sind damit erfüllt.
Gelte nun umgekehrt $(ZL)^*$ und sei $(H, \leq)$ eine Halbordnung, die die Voraussetzungen von (ZL) erfüllt. Definiere

$$M := \{S \subseteq H \mid S \text{ ist eine } \leq -\text{Kette in } H\}.$$

Sicher ist $M \neq \emptyset$, da $\{h\} \in M$ für jedes $h \in H$ (oder da $\emptyset \in M$). Ist $M' \subseteq M$ eine nichtleere $\subseteq -$Kette in M, so zeigen wir, daß $S_0 := \bigcup M'$ eine $\leq -$Kette ist.
Sind $a, b \in S_0$, so gibt es $S_1, S_2 \in M'$ mit $a \in S_1$ und $b \in S_2$. Da M' eine $\subseteq -$Kette ist, ist o. B. d. A. $S_1 \subseteq S_2$. Also gilt $a, b \in S_2$, und da S_2 eine $\leq -$Kette ist, gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$.
Somit ist $S_0 \in M$, die Voraussetzungen von $(ZL)^*$ sind erfüllt. M besitzt folglich ein (bzgl. $\subseteq$) maximales Element T. Nun erfüllt $(H, \leq)$ die Voraussetzungen von (ZL), also besitzt T in H eine obere Schranke y_0. Wir zeigen, daß y_0 ein maximales Element von H ist.
Sei $z_0 \in H$ mit $y_0 \leq z_0$. Dann ist $T \cup \{z_0\} \in M$. Da T maximal bzgl. $\subseteq$ in M ist, ist $T \cup \{z_0\} = T$, also $z_0 \in T$ und damit $z_0 \leq y_0$, da y_0 obere Schranke von T ist, also insgesamt $z_0 = y_0$. Somit ist y_0 ein maximales Element von H, dessen Existenz nachzuweisen war.

1.2.2
Man beweise:
a) *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.*
b) *Ist S eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums V über K, so gibt es eine Basis B von V mit $S \subseteq B$.*

Teil a) folgt sofort aus b), wenn man $S = \emptyset$ wählt, denn $\emptyset$ ist für jeden Vektorraum eine linear unabhängige Menge.
Wir beweisen b) mit $(ZL)^*$.
Sei S eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums V (über K) und sei

$$M := \{T \subseteq V \mid S \subseteq T \text{ und } T \text{ ist linear unabhängig }\}.$$

Sicher ist $M \neq \emptyset$, da $S \in M$. Gegeben sei nun eine nichtleere Kette M' (bzgl. $\subseteq$) in M. Wir setzen $T_0 := \bigcup M'$ und müssen zeigen, daß T_0 linear unabhängig ist, denn sicher gilt $S \subseteq T_0$. Dazu müssen wir nach Definition nachweisen, daß jede endliche Teilmenge von T_0 linear unabhängig ist. Es folgt wieder ein Argument, das für alle Anwendungen von $(ZL)^*$ typisch ist.

Sei R eine endliche Teilmenge von T_0; dann hat R die Form $R = \{X_1, \ldots, X_k\}$ mit $X_1, \ldots, X_k \in T_0$. Es existieren $T_1, \ldots, T_k \in M'$ mit $X_i \in T_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Nun sind $T_1, \ldots, T_k$ bzgl. $\subseteq$ vergleichbar, also gibt es unter ihnen ein größtes Element. (Jede endliche Teilmenge einer Kette besitzt ein Maximum – dies folgt leicht durch vollständige Induktion.) O. B. d. A. sei dies T_k. Nun gilt $X_1, \ldots, X_k \in T_k$, und da T_k linear unabhängig ist, ist auch R linear unabhängig. M erfüllt somit die Voraussetzungen von $(\mathrm{ZL})^*$ und besitzt ein maximales Element B. B ist als maximal linear unabhängige Teilmenge von V eine Basis von V.
(Für die Leser, denen diese Aussage nicht so vertraut ist, wird sie bewiesen:
Wir müssen zeigen, daß B den Vektorraum V erzeugt und nehmen dazu an, daß $L(B) \neq V$ gilt. Dann gibt es einen Vektor $X \in V \setminus L(B)$. Nach 1.3.4 ist $B \cup \{X\}$ linear unabhängig im Widerspruch zur Maximalität von B in M.)

1.2.3
Sei V ein Vektorraum über K, sei $A \subseteq V$ und sei $S \subseteq A$ linear unabhängig.

a) *Man zeige: Es gibt eine Teilmenge B von A mit $S \subseteq B$, die eine Basis von $L(A)$ ist.*

b) *Man folgere aus a) den Austauschsatz von* Steinitz *in der Fassung des Vorspanns von* 1.3.

Der aufmerksame Leser sieht, daß a) die Aussagen in Aufgabe 2 impliziert – setze $A = V$.

a) Setze

$$M := \{T \subseteq A \mid S \subseteq T \text{ und } T \text{ ist linear unabhängig } \} .$$

Man erhält wörtlich wie in Aufgabe 2 ein maximales Element B von M, wenn man dort $T_0 := \bigcup M' \subseteq A$ verwendet. Wir zeigen, daß $L(A)$ von B erzeugt wird.
Annahme: Es gibt einen Vektor $X \in A \setminus L(B)$. Dann ist nach 1.3.4 $B \cup \{X\}$ linear unabhängig, also ein Element von M im Widerspruch zur Maximalität von B in M. Somit ist $A \subseteq L(B)$. Es folgt:

$$L(A) \subseteq L(L(B)) = L(B) \subseteq L(A) ,$$

also $L(B) = L(A)$.

b) Setze $A := B \cup S$. Nach a) gibt es eine Basis C von $L(A) = V$ mit $S \subseteq C \subseteq B \cup S = A$. Es ist $C = S \cup (C \setminus S)$ und $C \setminus S \subseteq B$. Damit erfüllt $T := B \setminus (C \setminus S)$ die Forderungen.

1.2.4
Sei V ein Vektorraum über K und seien U bzw. W Untervektorräume von V mit Basen B bzw. C, so daß $V = U + W$ gilt. Man zeige:

a) *Es gibt eine Teilmenge D von C mit $B \cap D = \emptyset$, so daß $B \cup D$ eine Basis von V ist.*

b) *Es gibt einen Untervektorraum W' von W, so daß $V = U \oplus W'$ gilt.*

Sicher folgt Teil b) aus Teil a), wenn man $W' = L(D)$ setzt: Es ist $L(D)$ ein Untervektorraum von W und $W' \cap U = \{0\}$, da $B \cup D$ linear unabhängig und $B \cap D = \emptyset$ ist. Schließlich ist $V = U + W'$, da $B \cup D$ den Vektorraum erzeugt. Also ist dann $V = U \oplus W'$.

Wir beweisen nun a) mit $(\mathrm{ZL})^*$.
Sei $M := \{S \subseteq C \mid B \cup S \text{ ist linear unabhängig und } B \cap S = \emptyset\}$. Es ist $M \neq \emptyset$, da $\emptyset \in M$. Ist $M' \subseteq M$ eine nichtleere Kette, so ist $S_0 := \bigcup M' \subseteq C$ und es gilt:

$$B \cup S_0 = B \cup \bigcup \{S \mid S \in M'\} = \bigcup \{B \cup S \mid S \in M'\}.$$

$\{B \cup S \mid S \in M'\}$ ist ebenfalls eine Kette linear unabhängiger Mengen, und nach dem Beweis von Aufgabe 1.2.2 ist die Vereinigung über eine Kette linear unabhängiger Mengen wieder linear unabhängig. Ferner ist $S_0 \cap B = \emptyset$. Folglich ist $S_0 \in M$, M erfüllt die Voraussetzungen von $(\mathrm{ZL})^*$. Sei D ein maximales Element von M. Wir zeigen, daß $B \cup D$ eine Basis von V ist. Dazu bleibt zu zeigen, daß $B \cup D$ den Vektorraum V erzeugt.
Dies zeigen wir durch den Beweis von $B \cup C \subseteq L(B \cup D)$, denn daraus folgt

$$V = U + W = L(B) + L(C) \subseteq L(B \cup C) \subseteq L(L(B \cup D)) = L(B \cup D).$$

Annahme: Es gibt einen Vektor $X \in (B \cup C) \setminus L(B \cup D)$. Dann ist nach 1.3.4 $B \cup D \cup \{X\}$ linear unabhängig. Nun ist $X \notin B \cup D$, aber $X \in B \cup C$, also ist $X \in C \setminus B$. Die Menge $D \cup \{X\}$ ist somit ein Element von M im Widerspruch zur Maximalität von D.
Die Aussage $B \cup C \subseteq L(B \cup D)$ ist damit bewiesen.

1.2.5
Man beweise Teil b) von Aufgabe 1.2.4 *ohne Verwendung von Teil a), indem man $(ZL)^*$ auf*

$$M := \{S \subseteq W \mid S \text{ ist Untervektorraum von } W \text{ und } U \cap S = \{0\}\}$$

anwendet.

Wir wollen hier nur die Beweisidee schildern. Es ist $M \neq \emptyset$, da $\{0\} \in M$. Mit dem üblichen Argument zeigt man, daß die Vereinigung S_0 über eine nichtleere Kette von Untervektorräumen aus M wieder ein Untervektorraum von W ist und daß $U \cap S_0 = \{0\}$ gilt. Somit erfüllt M die Voraussetzungen von (ZL)* und besitzt ein maximales Element W'. Es bleibt zu zeigen, daß $V = U \oplus W'$ gilt. Annahme: Es gibt einen Vektor $X \in V \setminus (U \oplus W')$. Nach Voraussetzung ist $X = Y_1 + Y_2$ mit $Y_1 \in U$ und $Y_2 \in W$. Also ist $Y_2 \notin W'$.
Ferner ist $L(W' \cup \{Y_2\}) \cap U = \{0\}$:

Ist Z Element dieses Durchschnitts, so ist $Z \in U$ und $Z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i + \lambda Y_2$ für gewisse $X_1, \ldots, X_n \in W'$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \in K$. Ist $\lambda = 0$, so ist $Z \in U \cap W'$, also $Z = 0$ nach Wahl von W'. Also sei $\lambda \neq 0$; damit folgt aber

$$Y_2 = \frac{1}{\lambda} Z - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \in U \oplus W'$$

und somit $X = Y_1 + Y_2 \in U \oplus W'$ im Widerspruch zu unserer Annahme über X. Also ist $Z = 0$.
Damit haben wir gezeigt, daß $L(W' \cup \{Y_2\})$ aus M ist, und dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von W', denn $Y_2 \notin W'$.
Insgesamt folgt $V = U \oplus W'$.

1.2.6
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und sei $I \subseteq R$ ein Ideal mit $I \neq R$. Man zeige, daß es ein maximales Ideal J_0 von R gibt mit $I \subseteq J_0$.

Die Definitionen der Begriffe Ideal und maximales Ideal entnehme man Abschnitt 2.2.
Setze $M := \{J \subseteq R \mid J \text{ ist ein Ideal in } R \text{ mit } I \subseteq J\}$. Es ist $M \neq \emptyset$, da $I \in M$. Ist $M' \subseteq M$ eine nichtleere Kette in M, so ist $I_0 := \bigcup M'$ ein Element von M. Zunächst ist nämlich $I_0 \neq \emptyset$, da ein $J \in M'$ existiert und da $J \neq \emptyset$. Sind $a, b \in I_0$ und ist $\lambda \in R$, so gibt es $I_1, I_2 \in M'$ mit $a \in I_1$ und $b \in I_2$. Da M' eine Kette ist, sei o. B. d. A. $I_1 \subseteq I_2$. Dann sind $a, b \in I_2$, und da I_2 ein Ideal ist, folgt $a - b, \lambda a \in I_2$, also $a - b, \lambda a \in I_0$. Damit ist $I_0 \in M$ und M erfüllt die Voraussetzungen von (ZL)*. Ist J_0 ein maximales Element von M, so ist J_0 nach Definition ein maximales Ideal von R, und es gilt $I \subseteq J_0$.

1.3 Vektorräume

Lineare Unabhängigkeit

V sei ein Vektorraum über dem Körper K.
Eine endliche Teilmenge $\{X_1, \ldots, X_m\}$ von V heißt **linear unabhängig** in V, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_m X_m = 0 \tag{1}$$

für $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ nur die Lösung $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ besitzt.[8]

Eine beliebige Teilmenge S eines Vektorraumes V heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von S linear unabhängig ist.

Eine Teilmenge von V heißt **linear abhängig**, wenn sie nicht linear unabhängig ist.

Völlig analog definiert man, daß ein geordnetes $m-$Tupel $(X_1, \ldots, X_m)$ von Vektoren aus V linear unabhängig (in V) heißt, wenn Gleichung (1) nur die triviale Lösung besitzt.[9]

Linearkombination der Vektoren $X_1, \ldots, X_m$	$\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_m X_m, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$
lineare Hülle von $S \subseteq V$	$L(\emptyset) := \{0\}$ $L(S) := \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i \mid X_i \in S, \lambda_i \in K, m \in \mathbb{N}\}$

Merke: Die lineare Hülle $L(S)$ ist die Menge aller Linearkombinationen von jeweils endlich vielen Vektoren aus S. $L(\{X_1, \ldots, X_m\}) =: L(X_1, \ldots, X_m)$.

Es sei $S \subseteq V$ und U Unterraum von V. S heißt

Erzeugendensystem von U	$:\Longleftrightarrow$	$U = L(S)$.
Basis von U	$:\Longleftrightarrow$	$U = L(S)$ und S ist linear unabhängig.

Dimension von U $:=$ $|B|$, falls B Basis von U ist.

$B = (B_1, \ldots, B_n)$ heißt **geordnete Basis** von U, falls $U = L(B_1, \ldots, B_n)$ und $(B_1, \ldots, B_n)$ linear unabhängig ist.

Die Definition der Dimension ist sinnvoll, da nach dem folgenden Satz 2 je zwei Basen eines Vektorraums gleichmächtig sind.

[8] Formal: $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K \; (\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_m X_m = 0 \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0)$

[9] Beachte: Ist $X \neq 0$, so ist (X, X) linear abhängig, aber $\{X, X\} = \{X\}$ ist linear unabhängig.

Wichtige Sätze über Vektorräume

1. Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
2. Je zwei Basen eines Vektorraumes sind gleichmächtig.
3. **Basisergänzungssatz**

   In einem Vektorraum läßt sich jede linear unabhängige Teilmenge zu einer Basis ergänzen.
4. **Austauschsatz** von STEINITZ

   Ist B eine Basis des Vektorraums V und S eine linear unabhängige Teilmenge von V, so gibt es eine Teilmenge $T \subseteq B$ derart, daß die Menge $(B \setminus T) \cup S$ eine Basis von V ist.

Die Beweise entnehme man den Aufgaben 1.2.2, 1.1.8, 1.2.2 und 1.2.3.

1.3.1
Im Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *der reellen Zahlenfolgen definieren wir eine Teilmenge* U *durch*

$$U := \{X \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \text{ ist konvergent}\}.$$

a) *Man zeige mit Hilfe der* CAUCHY–SCHWARZ*schen Ungleichung (*REP1*, Seite* 33*), daß* U *ein Untervektorraum ist.*

b) *Sei* $E_i := (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$. *Sicher ist* $E_i \in U$, *und* $W := L(\{E_i \mid i \in \mathbb{N}\})$ *ist ein Untervektorraum von* U.
Man zeige: $W \subsetneq U$.

c) *Man zeige:* $\dim U = |U| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$
(Hinweis: REP1*, Aufgabe* 3.3.10*).*

(U *wird mit* $\ell^{(2)}$ *bezeichnet und ist ein Standardbeispiel für einen sogenannten* HILBERT*–Raum – siehe auch Aufgabe* 5.5.9.*)*

a) Zu zeigen ist: $0 \in U$ und

$$\forall X, Y \in U \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\lambda X \in U \text{ und } X + Y \in U).$$

Zunächst ist der Nullvektor von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, also diejenige Folge, die nur Nullen als Glieder hat, ein Element von U.
Sicher ist $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda x_n)^2$ konvergent, falls $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ konvergiert, und somit folgt aus $X \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $\lambda X \in U$.

Wir zeigen nun, daß mit $X, Y \in U$ auch $X + Y \in U$ gilt.
Ist $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $Y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist $X + Y = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Zu zeigen ist: $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n)^2$ konvergiert.

Da $(x_n + y_n)^2 = x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2$ und $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2\ ,\ \sum_{n=0}^{\infty} y_n^2$ nach Voraussetzung konvergent sind, genügt es, die Konvergenz der Reihe $\sum x_ny_n$ zu beweisen. Wir weisen nach, daß diese Reihe absolut konvergiert (und daher auch konvergiert). In der folgenden Abschätzung gilt $(*)$ nach der CAUCHY–SCHWARZschen Ungleichung für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} |x_ny_n| &= \sum_{n=0}^{k} |x_n|\,|y_n| \\ &\overset{(*)}{\leq} \left(\sum_{n=0}^{k} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=0}^{k} y_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n^2\right)^{\frac{1}{2}} =: c\ .\end{aligned}$$

Die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{n=0}^{k} |x_ny_n|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist daher beschränkt.
Da sie auch monoton wachsend ist, konvergiert sie nach dem bekannten Satz, daß jede monotone, beschränkte Folge konvergent ist.
Insgesamt folgt $X + Y \in U$.

b) Jeder Vektor $X \in W$ ist Linearkombination von (endlich vielen) Vektoren $E_{i_1}, \ldots, E_{i_k} \in \{E_j \mid j \in \mathbb{N}\}$. Insbesondere sind alle Komponenten x_n von X mit $n \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ Null.
Die Folge $X_0 := (\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Element von U, da $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ bekanntlich konvergiert. Aber $X_0 \notin W$, denn keine Komponente von X_0 ist Null.

c) Nach Abschnitt 1.1 ist $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$.
Sicher gilt wegen $U \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $\dim U \leq |U| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$.
Wenn wir eine linear unabhängige Teilmenge S von U der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ angeben, so läßt sich diese zu einer Basis B von U ergänzen, und daher folgt

$$2^{\aleph_0} = |S| \leq |B| = \dim U \leq |U| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| \leq 2^{\aleph_0}.$$

Dies liefert die Behauptung.

Nach dem Hinweis wissen wir, daß die Menge

$$S := \{(a^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid 0 < a < 1\}$$

in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ linear unabhängig ist. Für $0 < a < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty}(a^n)^2 = \frac{1}{1-a^2}$ nach der Summenformel für die geometrische Reihe, also ist $(a^n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$.
Es gilt somit $S \subseteq U$.
Da nach Aufgabe 1.1.3 $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$ gilt, ist $|S| = 2^{\aleph_0}$.

1.3.2
Man zeige: Hat der Vektorraum V über K die Dimension $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, so ist V isomorph zum Vektorraum K^n (über K). Insbesondere sind je zwei Vektorräume über K derselben Dimension n isomorph.
Warum gilt dies für zwei beliebige Vektorräume über K gleicher Dimension?

Sei $B = (B_1, \ldots, B_n)$ eine geordnete Basis von V und sei $k_B : V \longrightarrow K^n$ diejenige Abbildung, die jedem $X \in V$ seinen Koordinatenvektor $k_B(X)$ bzgl. B zuordnet.
k_B ist ein Isomorphismus: Die Linearität von k_B rechnet man schnell nach. Die Wohldefiniertheit folgt daraus, daß sich bekanntlich jedes $X \in V$ eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren $B_1, \ldots, B_n$ darstellen läßt. Die Injektivität ist klar. Ist schließlich $Y = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in K^n$, so ist $k_B(\sum_{i=1}^{n} \mu_i B_i) = Y$.
k_B ist somit surjektiv und insgesamt ein Isomorphismus.

2. Lösungsmöglichkeit:
Seien $B = (B_1, \ldots, B_n)$ und $C = (C_1, \ldots, C_n)$ Basen der Vektorräume V und W über K. Durch $g(B_i) := C_i$ ist eine Funktion von $\{B_1, \ldots, B_n\}$ nach W gegeben.
Nach Aufgabe 1.4.5 gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ mit $g(B_i) = \varphi(B_i)$ für $i = 1, \ldots, n$, nämlich dasjenige φ mit

$$\varphi(X) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i \ ,$$

falls $X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i$. Da C eine Basis ist, ist φ injektiv und, wegen $\varphi(\sum_{i=1}^{n} \mu_i B_i) = Y$ für $Y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i C_i$, auch surjektiv.

Diese Argumentation läßt sich sofort auf beliebige Vektorräume verallgemeinern. Sind B bzw. C (ungeordnete) Basen von V bzw. W, so gibt es wegen $|B| = |C|$ eine Bijektion g von B auf C. Nun argumentiert man wie oben: