Hans Jürgen Korsch

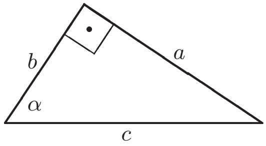
Mathematik-Vorkurs

Mathematisches Handwerkszeug für Studienanfänger

2. Auflage

HANSER

Trigonometrische Funktionen



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

$$\boldsymbol{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

Additionstheoreme

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

doppelter Winkel

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Quadratische Gleichung

$$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ Zerlegung in Linearfakt.

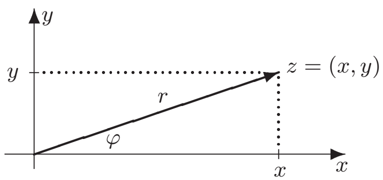
$x_1 + x_2 = -p$ Summe der Nullstellen

$x_1 \cdot x_2 = q$ Produkt der Nullstellen

Polarkoordinaten

$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = r\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$ Quadranten beachten!



Rechnen mit **Potenzen** und **Logarithmen**

a: Basis, mit $0 < a \neq 1$

$a^{r+s} = a^r a^s$	$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$	$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$(a^r)^s = a^{rs}$	$\log_a x^s = s\log_a x$

Logarithmen zu verschiedenen Basen:

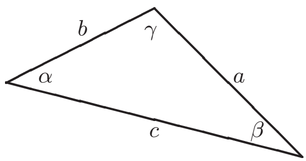
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \text{speziell: } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

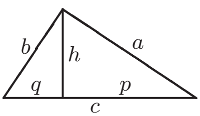
Pythagoras ($\boldsymbol{\gamma = 90^0}$)

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



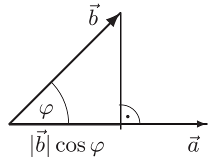
Kathetensatz $a^2 = pc, \quad b^2 = qc$

Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$

Höhensatz $h^2 = pq$

Skalarprodukt

$$\boxed{\vec a \cdot \vec b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot \cos \sphericalangle(\vec a, \vec b) \end{cases}}$$



Länge von $\vec a$: $|\vec a| = \sqrt{\vec a^2} = \sqrt{\vec a \cdot \vec a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
es ist $|\vec a|^2 = \vec a^2$ und $|\lambda \vec a| = |\lambda|\,|\vec a|$

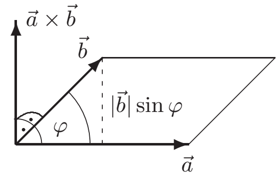
Winkel[1] zwischen $\vec a, \vec b$: $\cos \sphericalangle(\vec a, \vec b) = \dfrac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec a| \cdot |\vec b|} = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

Senkrechtstehen[1]: $\vec a \perp \vec b \iff \vec a \cdot \vec b = 0$

[1] nur sinnvoll für $\vec a, \vec b \neq \vec 0$.

Vektorprodukt

$$\boxed{\vec a \times \vec b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$



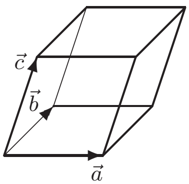
$\vec a \times \vec b$ steht **senkrecht** auf $\vec a$ und $\vec b$.

$|\vec a \times \vec b| = |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot \sin \sphericalangle(\vec a, \vec b) =$ **Flächeninhalt** des von $\vec a$ und $\vec b$ aufgespannten Parallelogramms.

$\vec a,\ \vec b,\ \vec a \times \vec b$ bilden in dieser Reihenfolge ein **Rechtssystem**.

Spatprodukt

$$\langle \vec a, \vec b, \vec c \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det(\vec a, \vec b, \vec c)$$



$$= \vec a \cdot (\vec b \times \vec c) = \vec c \cdot (\vec a \times \vec b) = \vec b \cdot (\vec c \times \vec a)$$

$$= \langle \vec a, \vec b, \vec c \rangle = \langle \vec c, \vec a, \vec b \rangle = \langle \vec b, \vec c, \vec a \rangle$$

zyklische Vertauschungen ändern das Spatprodukt nicht!

Berechnung mit Regel von **Sarrus** siehe Seite 215.

$\langle \vec a, \vec b, \vec c \rangle \begin{cases} > 0 & \iff \vec a, \vec b, \vec c \text{ bilden ein } \textbf{Rechtssystem}. \\ = 0 & \iff \vec a, \vec b, \vec c \text{ sind } \textbf{lin. abhängig} \text{ (liegen in einer Ebene).} \\ < 0 & \iff \vec a, \vec b, \vec c \text{ bilden ein } \textbf{Linkssystem}. \end{cases}$

$|\langle \vec a, \vec b, \vec c \rangle| =$ **Volumen** des von $\vec a, \vec b, \vec c$ aufgespannten **Spats**.

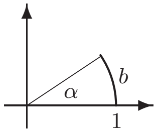
$\frac{1}{6} |\langle \vec a, \vec b, \vec c \rangle| =$ **Volumen** des von $\vec a, \vec b, \vec c$ aufgespannten **Tetraeders**.

$\vec a, \vec b, \vec c$ linear abhängig $\iff \boldsymbol{\langle \vec a, \vec b, \vec c \rangle = 0} \iff \vec a, \vec b, \vec c$ liegen in einer Ebene.

Umrechnung: Gradmaß – Bogenmaß

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen dem

- ⋆ **Winkel $\boldsymbol{\alpha}$** in Grad und der
- ⋆ **Länge $\boldsymbol{b}$** des zugehörigen Kreisbogens am **Einheitskreis**, bzw. **Verhältnis $\boldsymbol{b}$** der Bogenlänge eines Winkels zu seinem Radius.



$$\boxed{\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{b}{\pi}}$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi}\, b \qquad b = \frac{\pi}{180^\circ}\, \alpha$$

lies: $\alpha^\circ = b$ rad

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\,\text{rad} \approx 0.017\,\text{rad}$$

$$1\,\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.296^\circ$$

Benutzt man einen Taschenrechner, vergewissere man sich, ob er auf Winkel im Gradmaß (DEG) oder im Bogenmaß (RAD) eingestellt ist.

$\boldsymbol{n}$–Fakultät, Binomialkoeffizienten

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

$$0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Binomische Formeln

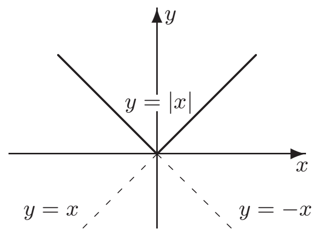
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Allgemeine binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
$$= \binom{n}{0} a^n + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

Betrag

$$\boxed{|x| := \begin{cases} x & \text{, für } x \geq 0 \\ -x & \text{, für } x < 0 \end{cases}}$$



$$|x| = |-x| = \sqrt{x^2}$$

$|xy| = |x| \cdot |y|$ und $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, für $y \neq 0$.

$\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ **Dreiecksungleichung**

Auf der Zahlengeraden ist

$|x|$ der **Abstand** der Zahl x vom Nullpunkt,
$|x-a|$ der **Abstand** der Zahl x von der Zahl a.

Merke
$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Wurzeln $(m, n, q \in \mathbb{N}$ und $a, b > 0)$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{n+m}}$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a^{m-n}}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$
$$\sqrt[nq]{a^{mq}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$$

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

MATHEMATIK–VORKURS

**Mathematisches Handwerkszeug
für Studienanfänger**

Physik

Mathematik

Ingenieurwissenschaften

H.J. Korsch

2. Auflage

Binomi Verlag	**Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen**	
	Telefon	**05105 6624000**
	Telefax	**05105 515798**
	E–Mail	**verlag@binomi.de**
	Internet	**www.binomi.de**
Druck	**BWH GmbH Die Publishing Company**	
	www.bw-h.de	

Zu beziehen beim Verlag oder im Buchhandel

ISBN 978–3–923 923–63–2

Hannover 10/10

Vorwort

Für Anfänger im Studium der Physik (und teilweise auch in den anderen Naturwissenschaften und den Ingenieurwissenschaften) stellt die Mathematik ein großes Problem dar. In den ersten beiden Semestern wird hier ein mathematisches Handwerkzeug benutzt, das vielen Studenten Schwierigkeiten bereitet. Schon in den ersten Wochen des Studiums werden viele neue mathematische Begriffe eingeführt und benutzt. Gute Kenntnisse der Schulmathematik werden dabei stillschweigend vorausgesetzt.
Es ist jedoch bekannt, dass die grundlegenden mathematischen Techniken von der Schule her nicht mehr bei allen Studienanfängern präsent sind. Nicht jeder bringt hier die gleichen Voraussetzungen mit und bei den meisten finden sich deutliche Lücken. Zum Ausgleich unterschiedlicher mathematischer Vorkenntnisse wird an vielen Universitäten den Physikstudenten zu Beginn ihres Studiums ein Vorkurs in Mathematik angeboten. Dieser Vorkurs ist als Brücke zwischen mathematischem Schulwissen und Anforderungen der Vorlesungen gedacht. Der vorliegende Text orientiert sich an dem Stoff des Kompaktkurses in Mathematik, der an der Technischen Universität Kaiserslautern seit vielen Jahren für die Studienanfänger in Physik angeboten wird. Es eignet sich als Begleitliteratur zu einem Universitäts-Vorkurs und zum Selbststudium.

Hinweise zum Umgang mit diesem Buch:

- ▷ Wesentlich für die *Mathematik der Mathematiker* ist eine Schulung im mathematischen Denken, in der Anwendung verschiedener Beweismethoden und mathematischer Grundlagen. Alles das ist sicher auch für den Physikstudenten wichtig, aber vorwiegend in den höheren Semestern. Ein Studienanfänger in der Physik benötigt eine solide Kenntnis der elementaren mathematischen Methoden und die Fähigkeit sie anzuwenden.

- ▷ Die Stoffauswahl entspricht den Anforderungen im ersten Studiensemester der Physik. Dort beginnt man in der Regel mit der Mechanik. Dabei wird die Vektorrechnung (hier Kapitel 1 und 2) benutzt und es werden Bewegungsgleichungen, also Differentialgleichungen, integriert. Hier sollte man die Grundlagen der Infinitesimalrechnung beherrschen (Kapitel 3 bis 7). Oft werden dabei auch frühzeitig komplexe Zahlen (Kapitel 8) benutzt, weil damit viele Rechenoperationen einfacher sind. Die Behandlung der Bewegung im Gravitationsfeld führt auf Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln. Kapitel 9 gibt eine Einführung in die elementaren Eigenschaften dieser Kurven.

- ▷ Vor Studienbeginn sollte man dieses Buch in einem Zeitraum von etwa zwei Wochen durcharbeiten. Dabei bietet sich für die zehn Arbeitstage eine Einteilung in neun Kapitel als Orientierungshilfe an. Empfehlung: Ein Kapitel an einem Tag, also eine Lektüre von etwa 15 Seiten. In jedem Kapitel findet man einige Übungsaufgaben. Man sollte diese Aufgaben bearbeiten, *bevor* man die Lösungen am Ende jedes Kapitels durchliest.

- ▷ Es lohnt sich sicher nicht, viele Formeln *auswendig* zu lernen. Man sollte sie aber *kennen*, also wiedererkennen, und wissen, wo man sie finden kann, wenn man sie braucht. Es gibt natürlich einige Formeln, die man einfach kennen *muss*, aber das sind erstaunlich wenige.

Eine gute **Formelsammlung** ist sehr nützlich, beispielsweise:

G. Merziger, G. Mühlbach, D. Wille, T. Wirth,
"Formeln + Hilfen Höhere Mathematik" (Binomi Verlag)

K. Rottmann,
"Mathematische Formelsammlung" (Spektrum-Akademischer Verlag)

Diese Formelsammlungen enthalten auch Stoff, der teilweise deutlich über den Schulstoff hinausgeht, aber in den ersten Studiensemenstern benötigt wird. Dazu werden zu Beginn des Studiums Hinweise gegeben.

Vier weitere Bücher zu **Mathematik-Vorkursen**:

D. Wille
"Mathematik-Vorkurs für Studienanfänger" (Binomi Verlag), 140 Seiten

G. Merziger, M. Holz, D. Wille
"Repetitorium Elementare Mathematik 1" (Binomi Verlag), 352 Seiten

K. Läuger
"Mathematik kompakt ... und verständlich!" (Oldenburg Verlag), 338 Seiten

W. Schäfer, K. Georgi und G. Tippler
"Mathematik-Vorkurs" (Teubner Verlag), 444 Seiten

Das erste Buch bietet eine knapp gehaltene Wiederholung der Schulmathematik mit der Beschränkung auf elementare Algebra, Mengenlehre, Funktionen, Differential– und Integralrechnung. Vektorrechnung, komplexe Zahlen und analytische Geometrie fehlen ganz. Die anderen drei Übungs- und Arbeitsbücher für Studienanfänger sind wesentlich umfangreicher und enthalten deutlich mehr Material als der vorliegende Band. Sie sind denjenigen zu empfehlen, die ausführlichere Darstellungen mit mehr Beispielen und Übungsaufgaben benötigen.

Weiterführende Literatur:

Der mathematische Apparat zur Einführung in die Physik wird in dem folgenden Buch weiter ausgebaut, das man parallel zu einem Lehrbuch der Experimentalphysik benutzen kann:

H. J. Korsch

Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik

> Vektoren, Vektoranalysis, Grundprobleme der Dynamik, Matrizen und Tensoren, lineare Differentialgleichungen, lineare Schwingungen, nichtlineare Dynamik und Chaos, Delta–Funktion, partielle Differentialgleichungen, orthogonale Funktionen, Wahrscheinlichkeit und Entropie.

ISBN 978–3–923923–61–8 520 Seiten **LP 19,80 €**

Danken möchte ich den Diplomanden und Doktoranden meiner Arbeitsgruppe, Timo Hartmann, Stefan Mossmann, Christian Schumann, Mauro Werder und Dirk Witthaut, für eine kritische Durchsicht des Textes der ersten Auflage. Ganz besonderer Dank gilt meiner Tochter Franziska, die sich trotz ihrer Vorbereitung auf das anstehende Abitur noch die Zeit genommen hat, das erste Manuskript durchzuarbeiten und – auch aus der Sicht des Schülers – durch viele nützliche Vorschläge zu verbessern.

Die vorliegende zweite Auflage dieses Vorkurses wurde – unter Berücksichtigung vieler guter Vorschläge von Korrekturen und Klarstellungen – noch einmal vollständig durchgesehen, überarbeitet und ergänzt. Trotz aller Bemühungen ist auch dieser Text noch verbesserungsbedürftig, deshalb freue ich mich über alle Vorschläge und Hinweise auf sicherlich noch vorhandene Fehler (möglichst an die unten angegebene E-Mail Adresse).

Kaiserslautern,
September 2010

Hans Jürgen Korsch
FB Physik, Technische Universität Kaiserslautern,
67653 Kaiserslautern
E-Mail: korsch@physik.uni-kl.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vektoren

Unter allen Naturwissenschaften zeichnet sich die Physik durch eine starke mathematische Orientierung aus, allerdings ist hier die Grenze zu anderen Naturwissenschaften oder Ingenieurwissenschaften im Fluss und andere Disziplinen ziehen nach. Wesentlich ist hier die Anwendbarkeit mathematischer Strukturen, also Mengen mit bestimmten, wohldefinierten Operationen und daraus folgenden Eigenschaften. Meist sind das mathematische Sätze, Theoreme oder Ähnliches. Uns allen bekannt sind sicher die *Zahlen*, angefangen bei den natürlichen Zahlen, über die ganzen Zahlen bis hin zu den reellen Zahlen. Ein wenig mehr dazu findet man im Anhang auf Seite 127. Darüber hinaus gibt es noch eine ganze Reihe mathematischer Strukturen, die – nach einer Eingewöhnungsphase – die Formulierung komplizierterer Zusammenhänge vereinfachen und das Arbeiten erleichtern. Zu Beginn eines Physikstudiums sind das hauptsächlich die *komplexen Zahlen* (siehe Kapitel 8) und die *Vektoren*, mit denen wir und in diesem und dem folgenden Kapitel beschäftigen.

In der Physik hat man es oft mit Größen zu tun, die eine *Richtung* besitzen. Beispiele solcher Größen sind Geschwindigkeit, Kraft oder die elektrische Feldstärke. Man möchte außerdem mit diesen Größen rechnen können, also sie addieren, sie mit einem Faktor multiplizieren, und so weiter. Hier hilft uns die Beschreibung solcher gerichteter Größen durch *Vektoren*. Wenn man die Grundlagen der Vektorrechnung beherrscht, kann man komplizierte Sachverhalte durch einfache Gleichungen ausdrücken und auch übersichtlich damit rechnen. Es lohnt sich also, in die Vektorrechnung etwas Zeit zu investieren.

Wir wollen uns hier nicht mit einer abstrakten mathematischen Definition von Vektoren oder linearen Räumen befassen, das lernt man in der Linearen Algebra, sondern wollen versuchen, ganz anschaulich zu bleiben.

Der Raum, in dem wir leben, ist dreidimensional. Das heißt, wir können in jedem Punkt des Raumes drei Geraden aufeinander senkrecht stellen. Wir können einen solchen Punkt als Ursprung unseres Koordinatensystems auszeichnen und drei solche Geraden als Koordinatenachsen auswählen, die wir mit den Buchstaben x, y und z bezeichnen. Wir haben also eine x–Achse, eine y-Achse und eine z-Achse, die paarweise aufeinander senkrecht stehen. Jeden Punkt P im Raum können wir jetzt durch die drei Koordinaten x, y und z beschreiben.

Eine einfache gerichtete Größe ist jetzt die *Verschiebung* oder *Translation* des Raumes, bei der beispielsweise der Punkt P_1 mit den Koordinaten x_1, y_1 und z_1 in den Punkt P_2 mit den Koordinaten x_2, y_2 und z_2 verschoben wird. Alle anderen Punkte werden parallel transportiert, und zwar durch die gleiche Verschiebung. Solch eine Translation wird durch einen Vektor beschrieben. Wir kennzeichnen eine vektorielle Größe durch einen Pfeil wie beispielsweise als $\vec{a}$. Der Pfeil drückt die Richtung des Vektors aus, also in unserem Fall die Richtung der Verschiebung. Der *Betrag* dieses Vektors ist dann die Länge der Strecke, um die verschoben wird. Wir bezeichnen den Betrag des Vektors durch $|\vec{a}\,|$ oder einfach nur durch a:

$$a = |\vec{a}\,| = \text{Betrag von } \vec{a}\,.$$

Wenn wir einen Vektor grafisch durch einen Pfeil darstellen, so haben alle parallel verschobenen Pfeile den gleichen Betrag und die gleiche Richtung, stellen also den gleichen Vektor dar!

Wenn wir um eine größere Strecke verschieben wollen, aber in die gleiche Richtung wie $\vec{a}$, dann multiplizieren wir den Vektor mit einem (positiven) Faktor, das heißt, sein Betrag wird um diesen Faktor größer:

$$\vec{b} = \alpha\,\vec{a}\ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad b = |\alpha|\,a\,.$$

(Hier werden reelle Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet; diese griechischen Buchstaben sollte man kennen. Eine Liste findet man auf Seite 128 im Anhang.) Ein negativer Faktor kehrt die Richtung des Vektors um.

Es wird sich herausstellen, dass es zweckmäßig ist, mit *Einheitsvektoren* zu arbeiten. Das sind Vektoren, die den Betrag eins haben. Um Schreibarbeit zu sparen, kennzeichnen wir solche Einheitsvektoren anstelle eines Vektorpfeils durch ein Dach: $\hat{a}$ ist also ein Vektor mit $|\hat{a}| = 1$. Wir können dann einen Vektor als Produkt seines Betrages und eines Einheitsvektors in seine Richtung darstellen: $\vec{a} = a\,\hat{a}\,$.

Wenn man zwei Verschiebungen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ hintereinander schaltet, dann erhält man als Resultat wieder eine Verschiebung, die wir mit dem Vektor $\vec{c}$ be-