}essentials{

Walter Strampp

# Die eindimensionale Wellengleichung

## Mathematische Aspekte im Überblick

Springer Spektrum

# essentials

*essentials* liefern aktuelles Wissen in konzentrierter Form. Die Essenz dessen, worauf es als „State-of-the-Art" in der gegenwärtigen Fachdiskussion oder in der Praxis ankommt. *essentials* informieren schnell, unkompliziert und verständlich

- als Einführung in ein aktuelles Thema aus Ihrem Fachgebiet
- als Einstieg in ein für Sie noch unbekanntes Themenfeld
- als Einblick, um zum Thema mitreden zu können

Die Bücher in elektronischer und gedruckter Form bringen das Fachwissen von Springerautor*innen kompakt zur Darstellung. Sie sind besonders für die Nutzung als eBook auf Tablet-PCs, eBook-Readern und Smartphones geeignet. *essentials* sind Wissensbausteine aus den Wirtschafts-, Sozial- und Geisteswissenschaften, aus Technik und Naturwissenschaften sowie aus Medizin, Psychologie und Gesundheitsberufen. Von renommierten Autor*innen aller Springer-Verlagsmarken.

Walter Strampp

# Die eindimensionale Wellengleichung

## Mathematische Aspekte im Überblick

Springer Spektrum

Walter Strampp
Universität Kassel
Kassel, Deutschland

ISSN 2197-6708 ISSN 2197-6716 (electronic)
essentials
ISBN 978-3-662-66427-8 ISBN 978-3-662-66428-5 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-66428-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer-Verlag GmbH, DE, ein Teil von Springer Nature 2023
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.
Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.
Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

# Was Sie in diesem *essential* finden können

- Einen Überblick über Anfangs- und Randwertprobleme der Wellengleichung.
- Die Methode von Fourier. Separation und Superposition mit einer Zusammenstellung der Grundlagen der Fourierreihen.
- Charakteristiken und die Methode von d' Alembert.
- Die inhomogene Gleichung und das Prinzip von Duhamel.
- Das charakteristische Parallelogramm und Differenzengleichungen. Ausführliche Lösung des Randwertproblems.

# Vorwort

Die Wellengleichung ist ein Thema mit großer Präsenz in technisch-physikalischen Anwendungen. Umso erstaunlicher ist es, dass man kaum eine Darstellung findet, in der auf alle Aspekte der mathematischen Behandlung eingegangen wird. Findet man einmal die Methode von Fourier ausführlich behandelt, so wird ein anderes Mal der Fokus auf die Methode von d'Alembert gelegt oder der Zugang über die Charakteristiken bevorzugt. Was die inhomogene Gleichung betrifft, so wird das Prinzip von Duhamel oft aus physikalischen Überlegungen motiviert und nicht stringent aus den Charakteristiken hergeleitet.

In diesem Beitrag sollen alle mathematischen Aspekte erfasst und alle Lösungsmethoden im Überblick besprochen werden, [1–9]. Wir betrachten die mit der Wellengleichung verbundenen Anfangs- und Randwertprobleme mit den typischen Modellen der schwingenden Seite und dem Kundtschen Rohr. Alle klassischen Werkzeuge für die Lösung wie Separation, Fourierreihen, Methode von d'Alembert und Prinzip von Duhamel werden diskutiert. Die algorithmische Methode der charakteristischen Parallelogramme wird ausgebaut mithilfe von Differenzengleichungen. Dadurch wird eine geschlossene Formulierung der Lösung möglich. Außerdem können wir damit fundierter auf die in den Anwendungen beliebte Ansatzmethode eingehen. Diese Methode versucht, durch einen geschickten Ansatz die besondere Gestalt der Randwerte auszunutzen.

Ich danke Herrn Professor Dr. Anton Matzenmiller, Institut für Mechanik der Universität Kassel, für die Einladung, in seiner Arbeitsgruppe über die Wellengleichung vorzutragen. Dabei aufgekommene Fragen haben diese Abhandlung angeregt.

Walter Strampp

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Anfangs- und Randwertprobleme

Wir fassen die Probleme, die im Folgenden behandelt werden sollen, in einer kurzen Übersicht zum einfachen Nachschlagen zusammen. Wir beginnen mit der eindimensionalen Wellengleichung für eine Funktion $u$ vom Ort $x \in \mathbb{R}$ und von der Zeit $t \geq 0$.

**Definition: IWG**
Die inhomogene Wellengleichung besitzt folgende Gestalt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t).$$

Wenn die Inhomogenität $F$ verschwindet, heißt die Gleichung homogen. Die homogene Gleichung wird oft der Kürze halber als Wellengleichung bezeichnet.

**Definition: HWG**
Die homogene Wellengleichung besitzt folgende Gestalt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Die Linearität der Gleichungen IWG und HWG hat bedeutende Konsequenzen. Die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung IWG liefert eine Lösung der homogenen Gleichung HWG. Andererseits ergibt eine Lösung der homogenen

© Der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer-Verlag GmbH, DE, ein Teil von Springer Nature 2023

W. Strampp, *Die eindimensionale Wellengleichung*, essentials,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-66428-5_1

Gleichung, die zu einer Lösung der inhomogenen Gleichung addiert wird, eine neue Lösung der inhomogenen Gleichung. In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wird gezeigt, dass das Anfangswertproblem auf der unbeschränkten reellen Achse sachgerecht gestellt ist. Das bedeutet, dass das Anfangswertproblem lokal eine eindeutige Lösung besitzt.

**Definition: IWG-AWP**
Das Anfangswertproblem für die inhomogene Gleichung lautet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t),$$

$$u(x,0) = f(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x).$$

Das Cauchy-Kovalevskaya-Theorem besagt, dass lokal eine eindeutige Lösung existiert, wenn alle Daten analytisch sind. Die Lösung selbst ist dann auch analytisch. Dieser Satz ist jedoch sehr allgemein und geht nicht auf die besonderen Eigenschaften der Wellengleichung ein. In der Tat kann man das Problem auch unter viel schwächeren Bedingungen global lösen und die Eindeutigkeit der Lösung garantieren. Aufgrund der Linearität wird das Anfangswertproblem für die inhomogene Gleichung aufgespalten in zwei Probleme. Das erste ist das Anfangswertproblem mit homogenen Anfangsbedingungen für die inhomogene Gleichung.

**Definition: IWG-HAWP**
Das Anfangswertproblem für die inhomogene Gleichung mit homogenen Anfangsbedingungen lautet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t),$$

$$u(x,0) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$