WILEY-VCH

Friedhelm Kuypers

Physik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften

Band 1: Mechanik und Thermodynamik

Vierte Auflage

Physik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften

Physik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften

Band 1: Mechanik und Thermodynamik

Friedhelm Kuypers

4. Auflage

WILEY-VCH

Autor

Prof. Dr. Friedhelm Kuypers
Hedwig-Dransfeld-Weg 14
93055 Regensburg
Deutschland
Friedhelm.kuypers@oth-regensburg.de

Titelbild
Heißluft Stirlingmotor; istock / the-lightwriter

4. Auflage

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Print ISBN 978-3-527-41398-0
ePDF ISBN 978-3-527-82964-4
ePub ISBN 978-3-527-82965-1

Umschlaggestaltung SCHULZ Grafik-Design, Fußgönnheim
Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck und Bindung

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

Vorwort

Dieses Buch ist der erste Band eines zweibändigen Werkes der Physik und beschäftigt sich mit Mechanik und Thermodynamik. Der zweite Band enthält die Elektrizität, Optik und Wellenlehre. Für das Verständnis werden nur elementare Grundkenntnisse der Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt.

Das Buch wurde geschrieben sowohl für Studierende der Naturwissenschaften Physik, Chemie, Mathematik als auch für Studierende mehrerer Ingenieurwissenschaften wie Elektrotechnik, Maschinenbau, …

Die **vierte Auflage** wurde gründlich und **vollständig überarbeitet**. Die Zahl der Aufgaben mit Lösungen wurde erhöht und Fehler wurden korrigiert. Vor allem der Abschn. „4.4 Erneuerbare Energien" wurde auf den neuesten Stand gebracht. Neu ist ein zehnseitiger, einführender Abschn. über die Entropie.

Abschn., deren Überschrift mit einem Stern * markiert sind, können beim ersten Lesen übergangen werden.

Das Buch unterscheidet sich in den inhaltlichen Schwerpunkten und vor allem im didaktischen Konzept von anderen Büchern. Ich zähle die Besonderheiten, die mir wichtig sind, kurz auf:

- **119 Beispiele und 207 Aufgaben mit Lösungen:** Beispiele und Aufgaben haben eine *ganz zentrale Bedeutung* in der Lehre: Sie ermöglichen ein besseres, vertieftes Verständnis und zeigen, wie sich die *Theorie umsetzen und auf die Praxis anwenden* lässt. Daher habe ich die Beispiele und Lösungen der Aufgaben mit gleicher Sorgfalt und gleicher Ausführlichkeit ausgearbeitet wie den Haupttext. In vielen Aufgaben werden parallel mehrere, alternative Lösungen vorgestellt.

  Bei der Auswahl waren drei Kriterien maßgebend:

  1: Entscheidend ist: *Beispiele und Aufgaben müssen die Theorie verdeutlichen und veranschaulichen. Sie sollen die Studierenden in die Lage versetzen, Probleme in der beruflichen Praxis mit den erlernten Methoden zu lösen.*

  2: Am liebsten lösen Studierende *Aufgaben aus dem Alltagsleben und aus der industriellen Praxis*. Warum können Sportler auf dem Mond zehnmal höher springen als auf der Erde? Was ist eine Resonanzkatastrophe? Wie regelt der Körper die Blutzufuhr? Warum bildet sich beim Öffnen einer Bierflasche Nebel über der Flüssigkeit? Wie groß sind die maximalen Wirkungsgrade von Windrädern, Verbrennungsmotoren und Wärmepumpen?

  3: Die meisten Beispiele und Aufgaben sind ehemalige Klausuraufgaben.

- **Stoffbeschränkung:** Grundsätzlich meide ich allzu schwierige Inhalte und behandele bewusst nur den Stoff, den die Studierenden in den ersten beiden Semestern *verstehen* und daher auch *in Klausuren bearbeiten* können. Themen, die zu schwierig für Klausuren sind, meide ich konsequent.

- **Kontrolle und Veranschaulichung:** Nicht selten übernehmen Studierende Rechnungen und Ergebnisse ungeprüft und kritiklos. Aber jeder sollte sich angewöhnen – vor allem auch in der beruflichen Praxis –, Resultate immer zu überprüfen und kritisch zu hinterfragen. In diesem Buch werden Lösungen regelmäßig kontrolliert und zugleich veranschaulicht, indem sie auf bereits bekannte *Spezialfälle* angewendet, Einheiten angeschaut, *Abhängigkeiten von Parametern und Anfangsbedingungen* untersucht und Zahlen eingesetzt werden.
- **Hinweise auf typische Fehler:** Fehler, die in Übungen und Klausuren immer wieder gemacht werden, Fallen und häufige Missverständnisse werden ausdrücklich genannt. So kann der Leser nicht nur aus den eigenen Fehlern, sondern auch *aus den „klassischen" Fehlern anderer Studenten lernen.*
- **Erneuerbare Energien:** Auf zehn Seiten werden wichtige Daten und der momentane Stand der erneuerbaren Energieproduktion besprochen. In den Unterkapiteln 8.8 und 15.6 werden Windkraftanlagen und Wärmepumpen ausführlich behandelt und ihre maximalen Wirkungsgrade berechnet.
- **Zusammenfassung:** Am Ende jedes Kapitels werden die wichtigsten Gleichungen, Sätze und Aussagen nochmals in Kürze zusammengefasst.

Abschließend möchte ich allen danken, die beim Schreiben dieses Buches geholfen haben. Prof. Dr. B. Braun hat mir eine ausführliche Liste mit Fehlern und Verbesserungsvorschlägen geschickt und war gerne bereit, fachliche Fragen zu diskutieren. Zudem haben wir hilfreiche Gespräche über Verbesserungsmöglichkeiten des Physikunterrichts geführt. Danken möchte ich auch Prof. Dr. A. Deutz für die Besprechung vieler physikalischer und didaktischer Probleme. Sein Interesse und seine ständige Bereitschaft, mit mir über Fragen und „Rätsel" der Physik zu diskutieren, haben mir sehr beim Schreiben dieses Buches geholfen.

Allen Lesern, die durch Anregungen, Bemerkungen oder auch durch Fragen zur Verbesserung des Buches beitragen, bin ich auch weiterhin sehr dankbar. Meine E-Mail-Adresse lautet:

friedhelm.kuypers@oth-regensburg.de

Regensburg, im August 2022 Friedhelm Kuypers

Inhaltsverzeichnis

A Mechanik

Lösungen

A Mechanik

1. Einführung

1.1 Einleitung

Die Physik beschäftigt sich mit der Natur und versucht ihre Gesetze zu enträtseln. Sie hat die Aufgabe, Eigenschaften und Aufbau der Materie und die Wechselwirkungen der Grundbausteine zu verstehen und daraus alle natürlichen Phänomene und Beobachtungen der unbelebten (und teilweise auch belebten) Natur abzuleiten. Die Physik ist daher die grundlegendste aller Naturwissenschaften. Sie hat starke Verbindungen zu den anderen Naturwissenschaften und den Ingenieurwissenschaften.

Die Physik stellt den anderen Wissenschaften aber nicht nur grundlegende theoretische Erkenntnisse zur Verfügung; sie entwickelt auch Methoden und Arbeitsgeräte, die auf fast allen Gebieten der angewandten und reinen Forschung benutzt werden. Erinnert sei hier nur an die Geräte in der Medizin (vom Röntgengerät bis zum Computertomographen) oder an die Archäologie (Luftbildaufnahmen im nicht-sichtbaren Bereich und Altersbestimmungen mit der Radio-Carbon-Methode).

Der physikalische Fortschritt vollzieht sich durch eine *wechselseitige Befruchtung von Theorie und Experiment.* Am Anfang stehen in der Regel Beobachtungen und Messungen der Experimentalphysiker. Der theoretische Physiker schlägt daraufhin ein *Modell* vor, *das auf Axiomen* (*Postulaten*) *beruht*, *die nicht bewiesen, also nicht mathematisch aus anderen Gesetzen abgeleitet werden können*, *sondern nur von der Erfahrung ausgehen* (*Induktive Methode*). Wenn das Modell die bereits bekannten experimentellen Befunde richtig beschreibt, werden weitere, evtl. noch nicht bekannte Vorhersagen mathematisch aus dem Modell hergeleitet und experimentell überprüft (*Deduktive Methode*). Unter Umständen muss man das Modell dann modifizieren oder erweitern oder bestimmte Gültigkeitsgrenzen stecken; evtl. ist das Modell auch völlig zu verwerfen.

Die gegenseitige Verknüpfung von Theorie und Experiment ist für den ungeheuren Fortschritt der modernen Wissenschaft verantwortlich. Die erst zu Beginn der Neuzeit von Galileo Galilei eingeführte 'Experimentelle Naturwissenschaft' verlangt die Überprüfung jeder neuen Theorie an der Wirklichkeit, am Experiment. Neben der Forderung nach der inneren Widerspruchsfreiheit und dem Wunsch, dass die Modelle und Gesetze möglichst

Physik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften – Band 1: Mechanik und Thermodynamik, 4. Auflage. Friedhelm Kuypers.

einfach und ‘schön’ aussehen sollen, ist die Übereinstimmung mit der Realität das entscheidende Kriterium, das über Annahme oder Ablehnung einer Theorie entscheidet.

Mehr als jeder andere Wissenschaftler arbeitet der Physiker quantitativ, also mit Zahlen und Gleichungen. Man kann durchaus sagen, dass der Physiker eine Beobachtung oder eine Information erst dann richtig verstanden hat, wenn er sie in eine Gleichung gefasst hat. *Die Mathematik ist die Sprache der Physik*; ohne sie sind physikalische Theorien nur sehr unvollständig zu beschreiben.

1.2 Messung und Maßeinheit

Physikalische Erkenntnisse und Zusammenhänge werden durch *physikalische Größen* dargestellt. Darunter versteht man messbare Eigenschaften physikalischer Objekte, Zustände oder Vorgänge wie z. B.

Die Länge eines Stabes	⇔	Objekt
Die Stärke eines elektrischen Feldes	⇔	Zustand
Die Dauer einer Schwingung	⇔	Vorgang

In der Mechanik gibt es drei unabhängige Grundgrößen: Länge, Zeit, Masse. Alle anderen Größen der Mechanik werden aus diesen drei fundamentalen Größen abgeleitet. Z. B.

$$\text{Geschwindigkeit} = \text{Länge}\big/\text{Zeit}$$

$$\text{Beschleunigung} = \text{Geschwindigkeit}\big/\text{Zeit}$$

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$

Neben den drei Grundgrößen der Mechanik gibt es vier weitere unabhängige Grundgrößen, die in den anderen Gebieten der Physik gebraucht werden:

- *In der Elektrizitätslehre wird eine weitere unabhängige Grundgröße benötigt*: *Die Ladung mit der Einheit* ‘*Coulomb*’.
- *In der Thermodynamik sind die Temperatur mit der Einheit* ‘*Kelvin*’ *oder* ‘*Grad Celsius*’ *und die Stoffmenge mit der Einheit* ‘*Mol*’ *zwei weitere Grundgrößen.*
- In der Optik kommt schließlich die Lichtstärke mit der Einheit ‘Candela’ hinzu. Da die Lichtstärke in meinen zwei Büchern nicht vorkommt, gehe ich auf die Einheit Candela nicht weiter ein.

Nur für die Grundgrößen müssen Einheiten – sog. **Basiseinheiten** – *festgelegt werden*. Die Einheiten der abgeleiteten Größen erhält man dann mit den Definitionsgleichungen dieser (abgeleiteten) Größen.

Die Einheit, in der eine physikalische Größe ausgedrückt wird, muss oft gewechselt werden. Dabei *multiplizieren wir die ursprüngliche Größe mit einem Umrechnungsfaktor*, *der* ein Quotienten aus zwei Maßeinheiten ist und *den Wert eins hat*. Ich nenne zwei Beispiele:

$$5{,}5\,\text{min} = 5{,}5\,\text{min} \cdot \frac{60\,\text{s}}{1\,\text{min}} = 330\,\text{s} \qquad 1{,}2\,\text{PS} = 1{,}2\,\text{PS} \cdot \frac{735\,\text{W}}{1\,\text{PS}} = 882\,\text{W}$$

Die Basiseinheiten sind international festgelegte, reproduzierbare Größen. Vor dem 20sten Jahrhundert wurden die Basiseinheiten nie durch Naturkonstanten festgelegt. Vielmehr wurden sie definiert durch einen Prototyp (wie der Pariser Platin-Iridium-Zylinder und das Pariser Urkilogramm), durch natürliche Größen (wie die mittlere Dauer eines Tages oder die Länge eines Meridians auf der Erde) oder aber durch Mess- oder Zählvorschriften.

Im Jahre 1900 hatte Max Planck die Idee, alle Basiseinheiten mit Hilfe sog. „definierender Naturkonstanten" festzulegen. Er sah nach eigenen Worten "... die Möglichkeit, Einheiten für Länge, Masse, Zeit und Temperatur aufzustellen, welche ihre Bedeutung für *alle Zeiten und für alle Kulturen* behalten: auch für außerirdische und außermenschliche." Die Idee wurde erst 120 Jahre später vollständig umgesetzt.

Seit dem 20.Mai.2020 werden die sieben Basiseinheiten

Sekunde, Meter, Kilogramm	(für die Mechanik)
Mol, Kelvin	(für die Thermodynamik)
Coulomb	(für die Elektrizität)
Candela	(für die Optik)

mit Hilfe von sieben Naturkonstanten definiert. Diese Naturkonstanten haben seit dem 20.Mai.2020 folgende **exakte**, **international festgelegte, zukünftig unveränderliche Werte**:

$\Delta f_{\text{Cs}} = 9{,}192\,631\,770 \cdot 10^{9}\ \text{Hz}$ (siehe Abschn. 1.3)

$c = 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}$ (siehe Abschn. 1.4)

$h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{kg}\,\text{m}^{2}/\text{s}$ (siehe Abschn. 1.5)

$N_{\text{A}} = 6{,}022\,140\,76 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$ (siehe Abschn. 11.1)

$k = 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}\ \text{J/K}$ (siehe Abschn. 11.2)

$e_0 = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$ (siehe Abschn. 17.1)

$K_{\text{cd}} = 683\,\text{lm/W}$ (wird nicht behandelt)

Die Basiseinheiten sind an diese Naturkonstanten fest gekoppelt und hängen nicht von Materialeigenschaften ab. Die sieben genannten Naturkonstanten haben fortan exakt vereinbarte Werte und *keine Unsicherheiten.*

Die internationalen, für alle Zeiten unverändert gültigen Vereinbarungen für die drei mechanischen Basiseinheiten Sekunde, Meter und Kilogramm werden in den folgenden Abschn. 1.3 bis 1.5 beschrieben. Die drei weiteren Basiseinheiten Mol, Kelvin und Coulomb (bzw. Ampere) werden in den Abschn. 11.1, 11.2 und 17.1 eingeführt. Die Konstante K_{cd} und die Basiseinheit Candela für die Optik kommen in meinen zwei Büchern nicht vor.

1.3 Die Einheit Sekunde

Bis 1956 war die Sekunde der 86.400ste Teil eines mittleren Tages ($3600 \cdot 24 = 86.400$). Da die Dauer eines Tages aufgrund der Meeresströmungen, der Winde, der Bewegungen im Erdinneren, ... schwankt und wegen der Gezeitenkräfte im Laufe der Zeit sogar zunimmt[1], ist diese Festlegung nicht genau. 1956 wurde die Sekunde als der 31.556.925,9747ste Teil des tropischen Jahres definiert.

1967 definierte man international die Basiseinheit Sekunde *für alle Zeiten* mit Cäsium-Atomuhren.

Der Strahlung, die beim Übergang zwischen den zwei Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von $^{133}\mathrm{Cs}$ auftritt, hat man **exakt** und für alle Zeiten die damals gemessene Frequenz zugeteilt

$$\Delta f_{\mathrm{Cs}} = 9{,}192\,631\,770 \cdot 10^9\ \mathrm{Hz} \tag{1.3–1}$$

Diese Frequenz ist laut Definition eine unveränderliche Naturkonstante und definiert die Basiseinheit Sekunde für alle Zeiten: Die Sekunde ist die Dauer von $9{,}192631770 \cdot 10^9$ Schwingungsperioden T_{Cs} der genannten Cäsiumstrahlung

$$1\,\mathrm{s} = 9{,}192631770 \cdot 10^9 \cdot 10^9\ T_{\mathrm{Cs}} = \frac{9{,}192631770 \cdot 10^9}{\Delta f_{\mathrm{Cs}}} \tag{1.3–2}$$

Sollte man in zukünftigen Messungen des Cäsium-Spektrums winzige Verschiebungen feststellen, so wird man nicht $T_{\mathrm{Cs}} = 1/\Delta f_{\mathrm{Cs}}$ ändern (wie man es vor 1967 gemacht hat), sondern die Länge einer Sekunde wird so abgewandelt, dass die Gl. (1.3–2) weiterhin gilt.

1.4 Die Einheit Meter

Längenmaße wurden früher in erster Linie an Körpermaße angepasst. Die Elle und das Fuß wurden bereits von den alten Ägyptern eingeführt und entsprachen der Länge des Unterarmes und der Länge des Fußes des Pharaos. Die Griechen führten zusätzlich das Stadion, die Römer die Meile ein. Im Mittelalter hatten die meisten Herzogtümer ihre eigenen Längenmaße, die sich erheblich voneinander unterschieden und oft an der Außenmauer des Rathauses oder der Kirche dargestellt wurden. 1101 führte König Heinrich I. in England den Abstand von seiner Nasenspitze bis zum Daumen seines ausgestreckten Armes als 1 Yard und die Breite seines Daumens als 1 Zoll oder ein Inch ein. Zoll wird heute noch in den USA, Kanada und England verwendet mit $1\,\mathrm{in} = 2{,}54\,\mathrm{cm}$. Die Größe von Bildschirmen wird üblicherweise in Zoll angegeben.

1791 verordnete die Pariser Nationalversammlung die Einführung einer universellen Längeneinheit. Danach ist ein Meter der zehnmillionste Teil der Entfernung vom Nordpol zum Äquator entlang des Meridians, der durch Paris verläuft. (Der Vorschlag, die Länge $l = T^2 g/(2\pi)^2$ eines Sekundenpendels ($T = 1\,\mathrm{s}$) als Längeneinheit zu definieren, wurde u. a. deshalb verworfen, weil die Gravitationskonstante g an verschiedenen Orten verschieden groß ist.) 1799 wurde ein Urmeter aus Platin hergestellt und 1889 durch einen Platin-Iridium-Stab ersetzt, der bei $0\,°\mathrm{C}$ einen Meter lang sein sollte. Kopien wurden weltweit an Eichinstitute versandt. Mit

[1] In 50.000 Jahren nimmt die Tagesdauer wegen der reibenden Gezeitenkräfte etwa um 1 s zu.

fortschreitender Messtechnik wurden aber die Nachteile des Urmeters immer deutlicher: Ein Gegenstand kann – z. B. durch Ausgasen oder Reinigungen – Atome verlieren und bei Messungen beschädigt werden. Zudem können Messungen nur am Ort des Urmeters oder einer Kopie stattfinden.

Zu Beginn des 20sten Jahrhunderts schlug Albert A. Michelson vor, eine universell verfügbare und unveränderliche Längeneinheit mit einer Wellenlänge von Licht einzuführen. 1960 wurde das Meter über die Wellenlänge des Lichts eines Kryptonlasers definiert. Natürlich wurde auch diese neue Einheit so gewählt, dass sie im Rahmen der Messgenauigkeit mit der alten Einheit, dem Urmeter übereinstimmte. Das Urmeter selbst ist seit 1960 nur noch von historischem Interesse.

1983 erfolgte die endgültige Festlegung des Meters, die sich künftig nicht mehr ändern soll. Der Meter wurde an die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit und an die Sekunde angelehnt:

$1\,\mathrm{m}$ ist die Strecke, die das Licht im Vakuum in $1/299.792.458$ Sekunden zurücklegt. Daran soll sich künftig nichts mehr ändern.

Zugleich wurde die Lichtgeschwindigkeit exakt und für alle Zeiten festgelegt:[2]

$$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{1.4–1}$$

Früher wurden zuerst die Basiseinheiten definiert und erst danach die Naturkonstanten gemessen. So wurden beispielsweise zuerst die Basiseinheiten Sekunde und Meter definiert. Damit war auch die abgeleitete Einheit $\mathrm{Meter/Sekunde}$ bestimmt. Anschließend wurde die Lichtgeschwindigkeit gemessen. Bei späteren Abweichungen in den Messungen der Lichtgeschwindigkeit wurde die Lichtgeschwindigkeit geändert und nicht die Einheit.

Die neuen Vereinbarungen (die letzten im Jahre 2020) *drehen diese alten Reihenfolgen um*: *Seit dem Jahr* 1983 *wird die Längeneinheit* $1\,\mathrm{m}$ *durch die fixierte Lichtgeschwindigkeit* $c = 2{,}99792458 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ **exakt** *definiert*. Bei kleinsten, zukünftigen Abweichungen in den Messungen von c wird man diese bis ans Ende aller Tage festgelegte Lichtgeschwindigkeit nicht ändern, sondern die Längeneinheit selber ein wenig verschieben, so die Lichtgeschwindigkeit weiterhin den in Gl. (1.4–1) festgelegten Wert beibehält.

Ein Beispiel: Wenn man in Zukunft aufgrund genauerer Messungen feststellen sollte, dass das Licht in einer Sekunde etwas weiter kommt als $299792458\,\mathrm{m}$, so wird man nicht die Zahl $c = 2{,}99792458 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ erhöhen (wie man es vor 1983 getan hätte), sondern die Längeneinheit $1\,\mathrm{Meter}$ wird etwas vergrößert , so dass die Lichtgeschwindigkeit weiterhin den exakten Wert $2{,}99792458 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ beibehält.

[2] Natürlich hätte man der „neuen" Lichtgeschwindigkeit im Jahre 1983 den einfacheren Wert $3{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ oder sogar $1{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ zuweisen können. In diesem Fall würden sich die Einheiten Newton, Joule, Watt, Pascal, Volt, ... und damit auch die meisten Materialkonstanten ändern. Zur Vermeidung unzähliger Umrechnungen wurde der Lichtgeschwindigkeit der damals aktuelle Wert gegeben; denn dieser Wert hatte keine Änderungen der Längen sowie der Material- und Naturkonstanten zur Folge. In der Praxis bemerkte Niemand die neue, verbindliche Festlegung der Lichtgeschwindigkeit.

1.5 Die Einheit Kilogramm

1790 beschloss die französische Nationalversammlung, dass ein Gramm die Masse von $1\,\text{cm}^3$ reinem Wasser bei $4°\text{C}$ sein soll. 1889 wurde ein korrosionsbeständiger Platin-Iridium-Zylinder hergestellt und seitdem in einem Tresor bei Paris unter drei Glocken aus Panzerglas aufbewahrt. Dieser Zylinder definiert das Urkilogramm. 80 Kopien wurden im Laufe der Zeit weltweit an Institute verteilt. Leider zeigten regelmäßige Überprüfungen, dass der Pariser Zylinder in 100 Jahren um etwa $50\,\mu\text{g}$ leichter wurde als die vielen Kopien.[3] Die Ursache ist bis heute unbekannt.

Daher wurde beschlossen, das Kilogramm (und die drei anderen Basiseinheiten Kelvin, Mol sowie Ampere bzw. Coulomb) mit Naturkonstanten neu zu definieren. Die Änderungen traten am 20.Mai.2020 in Kraft. Bis dahin war das Kilogramm die letzte der sieben Basiseinheiten, die noch ein natürliches Objekt als Bezugsgröße hatte.

Die neue, unveränderliche Definition koppelt die Masseneinheit Kilogramm an die Definitionen von Sekunde und Meter und an den ebenfalls *fixierten*, also *unveränderlich festgelegten Wert des Planckschen Wirkungsquantums*

$$h = 6{,}62607015 \cdot 10^{-34}\,\text{J}\,\text{s} = 6{,}62607015 \cdot 10^{-34}\,\text{kg}\,\text{m}^2/\text{s} \tag{1.5–1}$$

Das Plancksche Wirkungsquantum ist die zentrale Naturkonstante in der Quantentheorie. Da sie nur kurz in Abschn. „16.3 Wärmestrahlung“ vorkommt, will ich hier nicht weiter ausholen.

[3] Laut Definition konnte sich der Zahlenwert der Masse des Platin-Iridium-Zylinders eigentlich nicht ändern. Denn der Pariser Zylinder hatte laut Festlegung immer die Masse $m = 1\,\text{kg}$, auch wenn er in der Realität Atome verliert. Egal, was mit ihm passiert, der Zylinder hat laut Definition immer die Masse $1\,\text{kg}$.

2 Kinematik der Massenpunkte

Die Kinematik ist die Lehre von den Bewegungen der Körper (Griechisch: Kinema = Bewegung). Die physikalischen Ursachen der Bewegungen, d.h. die Kräfte werden nicht untersucht. Die Kinematik ist eine mathematische Disziplin und berechnet den Zusammenhang zwischen Bahnkurven, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Ruhe und Bewegung sind relative Begriffe. Für einen im Zug reisenden Beobachter ist eine neben ihm sitzende Person in Ruhe, für einen draußen am Bahnsteig stehenden Beobachter hingegen ist diese Person in Bewegung. Deshalb haben die Begriffe 'Ruhe' und 'Bewegung' nur dann einen eindeutigen Sinn, wenn das Bezugssystem angegeben wird, auf das sie sich beziehen. *Wenn nichts anderes vereinbart wird, dann wird in der Physik und in der Technik meistens ein mit der Erde verbundenes Bezugssystem zugrunde gelegt.*

2.1 Idealisierungen

Bei der Berechnung von Bewegungen ist es oft zulässig und sinnvoll, von der Ausdehnung des Körpers abzusehen und den Körper als *Punktmasse* – auch *Massenpunkt genannt* – zu idealisieren. Dies hat den Vorteil, dass

- der Körper sich nicht drehen kann.
- alle auf den Körper einwirkenden Kräfte in einem Punkt angreifen.

Obwohl es in Wirklichkeit keine Massenpunkte gibt, ist die Näherung verschwindender Ausdehnung in der Theorie oft zweckmäßig und erlaubt, wenn die Bahnabmessung wesentlich größer ist als die Ausdehnung des Körpers (siehe z. B. die Bewegungen der Planeten im Sonnensystem). Darüber hinaus werden wir in Abschn. 6.1 sehen, dass sich *Punktmassen wie die Schwerpunkte ausgedehnter Körper bewegen*. Danach stimmen die für Massenpunkte berechneten Bewegungen mit den Schwerpunktbewegungen ausgedehnter Körper überein, falls die Massen und die Summe aller Kräfte in beiden Fällen gleich groß sind.

Ganz allgemein werden Idealisierungen, die die Wirklichkeit nicht exakt beschreiben, sondern bestimmte Eigenschaften und Sachverhalte bewusst und gezielt außer acht lassen, sehr häufig in der Physik mit großem Erfolg vorgenommen. Die Vernachlässigung unerwünschter Nebeneffekte und die Konzentration auf das Wesentliche sind so typisch für die Arbeitsweise des Physikers, dass wir kurz über Zulässigkeit und Nutzen von Idealisierungen bzw. Vernachlässigungen sprechen müssen.

- *Die Zulässigkeit von Idealisierungen hängt von dem untersuchten Objekt und der Aufgabenstellung ab.* Dazu drei Beispiele:

  1) Bei einer fallenden Stahlkugel kann die Luftreibung vernachlässigt werden, bei einer fallenden Feder nicht.

Physik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften – Band 1: Mechanik und Thermodynamik, 4. Auflage. Friedhelm Kuypers.

2) Bei der Berechnung der Planetenbahnen können die Planeten als punktförmig angesehen werden, in der Wetterkunde nicht.

3) Im Maschinenbau dürfen die Corioliskräfte der Erdrotation vernachlässigt werden, in der Wetterkunde aber spielen sie eine ganz entscheidende Rolle.

In jedem einzelnen Fall ist zu entscheiden, ob die vorgesehenen Idealisierungen zu tolerierbaren Ungenauigkeiten führen oder nicht.

- Eine *exakte* Beschreibung der Vorgänge in Natur und Technik ist in keinem Fall möglich. Deshalb müssen Randeffekte außer acht gelassen und dafür kleine – evtl. sogar vernachlässigbare – Ungenauigkeiten in Kauf genommen werden. Viele Vernachlässigungen sind sehr gebräuchlich und weit verbreitet. Kein Maschinenbauer käme auf die Idee, relativistische Massenänderungen zu berücksichtigen. Auch Reibungskräfte werden oft nicht beachtet.

  Zulässige Idealisierungen sind sinnvoll, wenn man dadurch den Rechen- oder Arbeitsaufwand gering halten oder den Blick auf das Wesentliche richten kann.

Es kommt nicht darauf an, ob Idealisierungen auch in der Wirklichkeit realisiert werden können. Seit Galileo Galilei arbeitet die Wissenschaft oft mit *fiktiven Modellen*, die wenig Bezug zur Wirklichkeit haben, aber *leicht überschaubar sind und sich auf das Wesentliche, auf die zu untersuchende Frage konzentrieren.*

Wir nehmen im Folgenden an, dass die betrachteten Körper punktförmig sind. Ihre zeitabhängige Position wird durch den sog. Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ beschrieben, *der vom Ursprung des Koordinatensystems zum Ort der Punktmasse reicht*.

2.2 Geschwindigkeit

Wir definieren die Geschwindigkeit und betrachten zuerst den einfachsten Fall, die *gleichförmige Bewegung*. Eine geradlinige Bewegung heißt **gleichförmig**, wenn der Quotient aus zurück gelegter Strecke Δx und benötigter Zeit Δt für alle Δt gleich groß ist. Der konstante Quotient $\Delta x / \Delta t$ wird **Geschwindigkeit** v der gleichförmigen Bewegung genannt:

$$v := \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{für gleichförmige Bewegungen} \qquad (2.2\text{–}1)$$

Die Einheit der Geschwindigkeit ist nach dieser Gl. m/s. Häufig wird auch die Einheit km/h verwendet. Zwischen diesen beiden Einheiten gibt es die Umrechnung

$$3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (2.2\text{–}2)$$

Wenn eine gleichförmige Bewegung zur Zeit $t=0$ im Punkt $x(0) =: x_0$ beginnt, so gilt

$$v = \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} = \frac{x(t) - x_0}{t}$$

$$\Rightarrow \qquad x(t) = x_0 + v\,t \qquad \text{nur für gleichförmige Bewegungen mit } v = \text{const} \qquad (2.2\text{–}3)$$

Das Orts-Zeit-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung ist eine Gerade (siehe Abb. 2.2–1) mit der Steigung v.

Als nächstes betrachten wir geradlinige, *ungleichförmige Bewegungen*. Jetzt werden in gleich großen Zeitintervallen nicht mehr gleich große Strecken zurückgelegt, so dass das Orts-Zeit-Diagramm in Abb. 2.2–2 eine gekrümmte Kurve ist. Man nennt den Quotienten

$$v_\mathrm{m} := \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.2–4}$$

mittlere Geschwindigkeit oder Durchschnittsgeschwindigkeit in dem Intervall $[t_1, t_2]$.

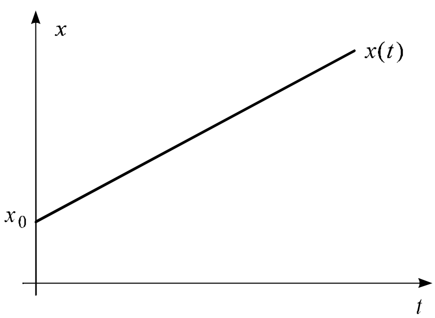

Abb. 2.2–1 Orts-Zeit-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung

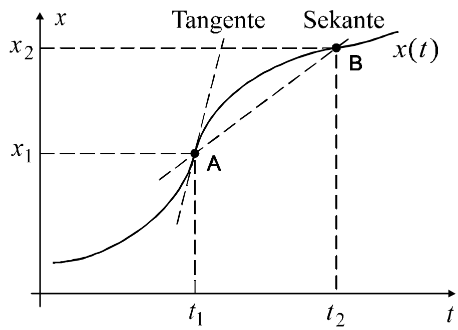

Abb. 2.2–2 Für $t_2 \to t_1$ geht die Steigung der Sekante über in die Steigung der Tangente. Die Steigung der Tangente ist laut Definition die momentane Geschwindigkeit $v(t_1)$.

In Physik und Technik und beim Autofahren interessiert man sich aber gewöhnlich nicht für die mittlere, sondern für die momentane Geschwindigkeit $v(t)$. Vor der Einführung der Radartechnik wurden momentane Geschwindigkeiten im Verkehr mit zwei Lichtschranken ermittelt. Lichtschranken messen – genau genommen – die mittlere Geschwindigkeit v_m. Wenn aber der Abstand der Lichtschranken so klein ist, dass ein Fahrzeug seine Geschwindigkeit auf der kurzen Messstrecke kaum ändern kann, dann sagt man: Die gemessene Geschwindigkeit ist – in genügend guter Näherung – die momentane Geschwindigkeit. Diese Aussage ist umso genauer, je kleiner der Abstand der beiden Lichtschranken ist. Daraus ergibt sich die Definition der momentanen Geschwindigkeit wie folgt:

Die **momentane Geschwindigkeit**

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.2–5}$$

oder genauer – wenn wir die Zeit deutlich in die Definition einbeziehen –

$$v(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \tag{2.2–6}$$

ist *die zeitliche Ableitung des Ortes* $x(t)$. Es ist allgemein üblich, die zeitliche Ableitung nicht durch einen Strich, sondern durch einen Punkt zu kennzeichnen.

Bisher waren alle Bewegungen geradlinig. Nun wollen wir auch *krummlinige Bahnen* betrachten. Die zeitabhängige Lage des Massenpunktes wird durch den sog. **Ortsvektor** $\mathbf{r}(t)$ beschrieben, der vom Ursprung des Koordinatensystems zum Ort des Teilchens zeigt (siehe weiter unten Abb. 2.5–2). Der Ortsvektor lässt sich mit seinen drei kartesischen Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ und den Basisvektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, die die Länge Eins haben und auf den drei Koordinatenachsen liegen, als Linearkombination schreiben:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{2.2–7}$$

Bemerkung: Die Ortsvektoren dürfen im Gegensatz zu den Vektoren in der Mathematik nicht parallel verschoben werden; ihr Anfang liegt immer im Koordinatenursprung. (Nach einer Parallelverschiebung würde das Ende der Ortsvektoren nicht mehr auf den Ort der Teilchen zeigen.)

Vektoren werden immer komponentenweise differenziert und integriert. Daher ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t)$ durch die zeitliche Ableitung der drei Koordinaten:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} x(t+\Delta t) - x(t) \\ y(t+\Delta t) - y(t) \\ z(t+\Delta t) - z(t) \end{pmatrix} \tag{2.2–8}$$

2.3 Einführung in die Integralrechnung

In Abschn. 2.2 war der Ort $x(t)$ gegeben und die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ wurde gesucht. Wir sahen, dass $v(t)$ die Ableitung des Ortes $x(t)$ nach der Zeit ist. Wir wollen nun die umgekehrte Aufgabe lösen: $v(t)$ ist gegeben – z. B. durch den Fahrtenschreiber eines LKWs – und die Stammfunktion $x(t)$ ist gesucht.

Wir fangen wie üblich mit dem einfachsten Fall an, mit der gleichförmigen Bewegung, für die $v(t) = \text{const} =: v_0$ gilt. Im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist $v(t)$ eine Gerade parallel zur Abszisse. Die Integration ist hier besonders einfach: Nach Gl. (2.2–3) wird in dem Zeitintervall $[t_1, t]$, dessen untere Grenze t_1 fest und dessen obere Grenze t variabel ist, folgender Weg zurückgelegt:

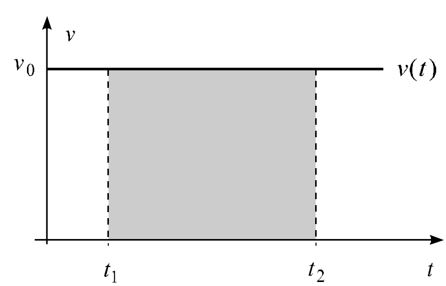

Abb. 2.3–1 Die graue Fläche im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist gleich dem zurückgelegten Weg.

$$x(t) - x(t_1) = v_0 \cdot (t - t_1)$$

Der Zuwachs $x(t)-x(t_1)$ der Stammfunktionen ist gleich der Fläche unter der Kurve $v(t)=v_0$ im Intervall $[t_1,t]$. Hier deutet sich schon der Zusammenhang zwischen Fläche und Integral an. Der Zuwachs ist die graue Fläche in Abb. 2.3–1. Mit $c := x(t_1)-v_0 \cdot t_1$ folgt:

$$x(t)=v_0\,t+c \qquad \text{für } v(t)=v_0=\text{const} \tag{2.3–1}$$

Damit ist die Stammfunktion $x(t)$ einer konstanten Geschwindigkeit $v(t)=v_0$ bestimmt.

Als nächstes untersuchen wir *un*gleichförmige Bewegungen auf der x-Achse. Da die Geschwindigkeit $v(t)$ nicht konstant ist, kann der in dem Zeitintervall $[t_1,t]$ zurückgelegte Weg nicht so ohne weiteres als Produkt $v(t')\cdot(t-t_1)$ geschrieben werden. Wir müssen deshalb anders vorgehen und von folgender Aussage ausgehen:

Die *Geschwindigkeit ist in genügend kleinen Zeitintervallen* Δt *nahezu konstant.*

Der in dem kleinen Zeitintervall $[\hat{t},\hat{t}+\Delta t]$ zurückgelegte Weg ist daher näherungsweise

$$\Delta x = x(\hat{t}+\Delta t)-x(\hat{t}) \approx v(t')\,\Delta t$$

mit t' = *beliebige* Zeit aus $\left[\hat{t},\hat{t}+\Delta t\right]$.

Welche Zeit t' aus dem Zeitintervall gewählt wird, ist belanglos, da sich $v(t')$ in dem sehr kleinen Zeitbereich Δt kaum ändert.

Mit dieser Überlegung können wir nun den endlich, in der Zeit $[t_1,t]$ zurückgelegten Weg berechnen: Wir unterteilen das Zeitintervall $[t_1,t]$ in n gleich große Teilintervalle

$$\Delta t = \frac{t-t_1}{n} \tag{2.3–2}$$

Dann ist der im gesamten Zeitintervall zurückgelegte Weg gleich der Summe der in den n Teilintervallen zurückgelegten Wege:

$$x(t)-x(t_1) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\, x\Big(t_1+i\Delta t\Big)-x\Big(t_1+(i-1)\Delta t\Big)\right]}_{i\text{–ter Teilweg}} \underset{\text{für genügend kleines }\Delta t}{\overset{\uparrow}{\approx}}$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} v\big(t_i'\big)\,\Delta t$$

mit t_i' = *beliebige* Zeit aus dem i–ten Teilintervall $\Big[t_1+(i-1)\Delta t,\, t_1+i\Delta t\Big]$.

Der Leser kann sich am besten von der Richtigkeit des ersten Gleichheitszeichens überzeugen, indem er den ersten Summanden mit $i=1$, danach den zweiten Summanden mit $i=2$ usw. einzeln betrachtet.

Für die folgende graphische Interpretation und für die Abb. 2.3–2 setzen wir für t_i' die Anfangszeit des i–ten Teilintervalls ein, also $t_i' = t_1+(i-1)\Delta t$. Wir erhalten eine Summe über die n Teilintervalle:

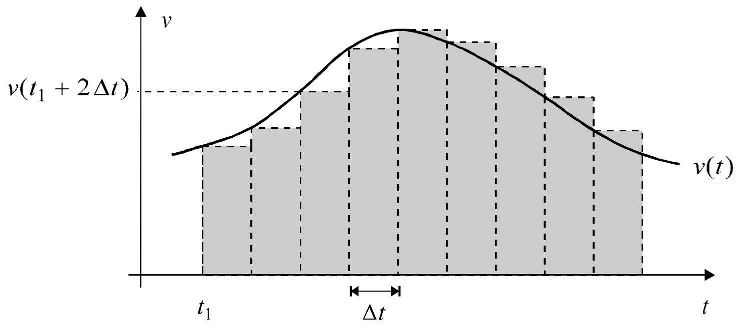

Abb. 2.3–2 Der gesamte Weg ist die Summe der Teilwege. Für kleine Δt ist jeder Teilweg ungefähr gleich der Geschwindigkeit am Anfang des Teilweges mal Δt .

$$x(t)-x(t_1)\approx\sum_{i=1}^{n} v\Big(t_1+(i-1)\Delta t\Big)\,\Delta t \tag{2.3–3}$$

mit $\Delta t=(t-t_1)/n$. *Die Summe* in Gl. (2.3–3), die allgemein Zwischensumme genannt wird, *ist gleich der grauen Fläche unter der Stufenfunktion in Abb.* 2.3–2.[1]

Wir lassen nun die Zahl n der Teilintervalle größer und größer werden. Dabei wird die Breite $\Delta t=(t-t_1)/n$ der Teilintervalle immer kleiner. Je schmaler Δt wird, desto weniger ändert sich die Geschwindigkeit $v(t)$ innerhalb der Teilstrecken und desto genauer beschreibt die Zwischensumme den zurückgelegten Weg $\Delta x=x(t)-x(t_1)$. Für $n\to\infty$ strebt die Zwischensumme gegen einen Grenzwert, den man das **Integral** der Funktion $v(t)$ nennt:

$$x(t)-x(t_1)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v\left(t_1+(i-1)\frac{t-t_1}{n}\right)\cdot\frac{t-t_1}{n}=:\int_{t_1}^{t} v(t')\,dt' \tag{2.3–4}$$

Das Integral ist einerseits die Fläche zwischen der Funktion $v(t)$ und der Abszisse im Intervall $[t_1,t]$ und andererseits der Zuwachs $x(t)-x(t_1)$ der Stammfunktion.[2]

[1] Genauso gut hätte man die Geschwindigkeiten am Ende der Teilintervalle oder irgendwo innerhalb der Teilintervalle berechnen können, weil die n Teilintervalle sehr klein sind und sich die Geschwindigkeit daher innerhalb eines Teilintervalls kaum ändert.

[2] Die hier vorgeführte „Einführung“ in die Integralrechnung ist sehr kurz und hoffentlich auch einsichtig. Sie ist korrekt und reicht für die Praxis völlig aus, da wir stillschweigend von der Integrierbarkeit aller Funktionen ausgehen, die in der Physik und in der Technik vorkommen.

Die Untersuchungen der Mathematiker sind – wen wundert's? – umfangreicher, weil zuerst einmal geklärt werden muss, wann eine Funktion überhaupt integrierbar ist. Zur Beantwortung dieser Frage gehen die Mathematiker wie folgt vor: Das Intervall $[t_1,t]$ wird ebenfalls in n kleine Teilintervalle unterteilt, die aber nicht unbedingt gleich groß sein müssen. In jedem Teilintervall gibt es einen kleinsten und einen größten Wert von $v(t)$. Mit diesen n kleinsten und n größten Funktionswerten wird eine Unter- und eine

Wenn wir $x(t_1)$ in Gl. (2.3–4) auf die rechte Seite bringen, erhalten wir den Ort des Teilchens zur Zeit t bei gegebener Geschwindigkeit $v(t)$:

$$x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(t')\,dt' \tag{2.3–5}$$

$x(t)$ ist die Stammfunktion von $v(t)$. In *Verallgemeinerung* dieser Aussagen auf andere (integrierbare) Funktionen erhalten wir die folgenden Integraleigenschaften, die von zentraler Bedeutung für die Mathematik und Physik sind:

- *Das Integral*

  $$\int_{t_1}^{t} f(t')\,dt' := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(t_1 + (i-1)\frac{t-t_1}{n}\right)\cdot\frac{t-t_1}{n}$$

  ist gleich der Fläche, die von der Funktion $f(t)$ und der Abszisse im Intervall $[t_1, t]$ eingeschlossen wird.
- *Das Integral über eine Funktion $f(t)$ ist gleich der Änderung*

  $$F(t) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t} f(t')\,dt' \tag{2.3–6}$$

  der Stammfunktion des Integranden. Dies ist der **Hauptsatz der Analysis**. Er zeigt, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist.

2.4 Beschleunigung

Im Gegensatz zum alltäglichen Sprachgebrauch werden in Physik und Technik nicht nur Bewegungen mit zunehmendem Geschwindigkeitsbetrag $|\mathbf{v}|$, sondern auch solche mit abnehmendem Geschwindigkeitsbetrag beschleunigt genannt. Darüber hinaus werden sogar Bewegungen mit konstantem Betrag $|\mathbf{v}|$, aber veränderlicher Richtung von $\mathbf{v}$ beschleunigt genannt. Ein Beispiel dafür ist die gleichmäßige Kreisbewegung: Nach dem zweiten Newtonschen Axiom $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ist die Beschleunigung bei der gleichförmigen Kreisbewegung gleich der Zentripetalkraft $\mathbf{F}$ dividiert durch die Masse.

Auch jetzt betrachten wir zuerst wieder den einfachsten Fall, die *geradlinige Bewegung*, bei der wir skalar rechnen dürfen. *Im Folgenden werden fast dieselben Überlegungen angestellt wie bei der Definition der Geschwindigkeit.* Der wesentliche Unterschied ist nur der, dass wir jetzt nicht mehr im Orts-Zeit-Diagramm arbeiten, sondern im Geschwindig-

Obersumme berechnet. Anschließend wird die Unterteilung fortlaufend verkleinert $(n \to \infty)$, wobei auch das längste Teilintervall gegen null geht. Wenn die Unter- und die Obersumme gegen eine gemeinsame Zahl I, die nicht von der Unterteilung abhängt, konvergieren, dann heißt die Funktion $v(t)$ im Intervall $[t_1, t]$ integrierbar und I ist das Integral.

keits-Zeit-Diagramm. Die Beschleunigung ist die Geschwindigkeitsänderung pro Zeit. Daher *definieren* wir

$$a_m := \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.4–1}$$

als **mittlere Beschleunigung** oder Durchschnittsbeschleunigung im Intervall $[t_2, t_1]$. Die Einheit der Beschleunigung ist danach $\mathrm{m/s}^2$.

Bei der Definition der momentanen Beschleunigung $a(t)$ zur Zeit t gehen wir genauso vor wie bei der Definition der momentanen Geschwindigkeit: Danach ist die *momentane Beschleunigung die mittlere Beschleunigung im Grenzübergang* $\Delta t \to 0$:

$$a(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \tag{2.4–2}$$

Die Beschleunigung ist die einmalige Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit oder die zweimalige Ableitung des Ortes nach der Zeit.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) \tag{2.4–3}$$

Ein besonders wichtiger Spezialfall ist die *gleichförmig* oder **gleichmäßig beschleunigte Bewegung**; hier ist die Beschleunigung konstant. Der reibungsfreie Fall im homogenen Schwerefeld ist die bekannteste gleichförmig beschleunigte Bewegung. Wegen $a(t) = \dot{v}(t)$ ist die Geschwindigkeit die Stammfunktion der Beschleunigung. Die Geschwindigkeit ergibt sich nach Gl. (2.3–6) durch Integration über die konstante Beschleunigung:

$$v(t) - v_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{HA}}}{=} \int_0^t a\,dt' = a\,t$$

Dabei ist HA die Abkürzung für „**H**auptsatz der **A**nalysis“. Daraus folgt

$$v(t) = v_0 + a\,t \qquad \text{nur für gleichförmig beschleunigte Bewegungen} \tag{2.4–4}$$

Eine weitere Integration liefert den Ort des Teilchens

$$x(t) - x_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{HA}}}{=} \int_0^t v(t')\,dt' = v_0\,t + \frac{a}{2}t^2$$

Daraus folgt

$$x(t) = x_0 + v_0\,t + \frac{a}{2}t^2 \qquad \text{nur für gleichförmig beschleunigte Bewegungen} \tag{2.4–5}$$

Bemerkung: Häufig schreiben Studenten für die Beschleunigung die Gl. $a = v/t$ auf. Nach Gl. (2.4–4) gilt diese einfache Beziehung nur für gleichförmig beschleunigte Bewegungen mit $v_0 = 0$. Für $a(t) \neq \mathrm{const}$ gilt nach Gl. (2.4–3) $a(t) = \dot{v}(t)$ und *nicht* $a = v/t$.

Tabelle 2.4–1 Die für den Menschen maximal erträgliche Beschleunigung hängt von der Körperhaltung und von der Dauer der Beschleunigung ab und ist wichtig für die bemannte Raumfahrt, Militärjets und Kraftfahrzeuge. Bei Crash-Versuchen mit Dummies darf die kurzzeitige Kopfbeschleunigung höchstens 80 g und die Brustbeschleunigung höchstens 60 g betragen.

Haltung	Erträgliche Beschleunigung für 5 sec.
Kopf nach unten	4 g
sitzende Haltung	7 g
Bauchlage	13 g
Rückenlage	15 g

Dauer	Erträgliche Beschleunigung in sitzender Haltung
1 sec	13 g
5 sec	7 g
10 sec	6 g
60 sec	4 g

Schnellkäfer erreichen im Tierreich die größte Beschleunigung: Beim Hochspringen können sie mit $a \approx 400\,g$ beschleunigen. Die größten Beschleunigungen in der Natur erreichen einige Pilzarten, die ihre Sporen mit einer Beschleunigung von bis zu $1{,}8 \cdot 10^5\,g$ (!) abschießen.

Jetpiloten müssen nach der Auslösung des Schleudersitzes sehr kurzfristig eine Beschleunigung von $27\,g$ aushalten. Dabei wird die Wirbelsäule so stark gestaucht, dass die Piloten etwa 0,5 cm kleiner werden. Nach zwei Notausstiegen im Schleudersitz werden Bundeswehrpiloten in den vorzeitigen Ruhestand versetzt.

Beispiel 2.4–1 Bremsweg.

Ein Auto fährt mit der Geschwindigkeit v_0 und macht dann eine Vollbremsung mit konstanter Beschleunigung $a = -1{,}1 \cdot g$ bis zum Stillstand. Berechne den Bremsweg *s*.

Lösung:

Die Gln. (2.4–4) und (2.4–5) lauten für $x_0 = 0$:

$$v(t) = v_0 + a\,t \qquad x(t) = v_0\,t + \frac{a}{2}\,t^2$$

Wir müssen hier mit der Bremszeit T eine zusätzliche Variable einführen, die nicht gefragt ist und nicht im Endergebnis auftritt. Am Ende des Bremsvorganges ist $v(T) = 0$ und $x(T) = s$.

$$v(T) = 0 = v_0 + aT \qquad x(T) = s = v_0\,T + \frac{a}{2}\,T^2 \tag{2.4–6/7}$$

Wir lösen die Gl. (2.4–6) nach T auf und setzen T in Gl. (2.4–7) ein und erhalten die **Fahrschulformel**:

$$a = -\frac{v_0^2}{2\,s} \quad \Leftrightarrow \quad s = -\frac{v_0^2}{2\,a} \quad \text{für } a = \text{const} < 0 \quad \text{und} \quad v_{\text{Ende}} = 0 \tag{2.4–8/9}$$

Kontrolle und Veranschaulichung:

- Die Einheiten sind richtig.
- Für $v_0 = 100\,\text{km/h} \approx 27{,}8\,\text{m/s}$ ergibt sich der realistische Bremsweg $s \approx 35{,}8\,\text{m}$.
- $s \sim v_0^2$. In der Fahrschule lernt man, dass der Bremsweg proportional ist zum Geschwindigkeitsquadrat: Doppelte Geschwindigkeit, vierfacher Bremsweg.

Beispiel 2.4–2 Konstante Verzögerung.

Ein PKW verringert durch gleichmäßiges Bremsen seine Geschwindigkeit von $v_0 = 72\,\text{km/h}$ auf $v_1 = 36\,\text{km/h}$ und legt dabei die Strecke $s = 100$ m zurück.

a) Wie groß ist die (negative) Beschleunigung a ?

b) Wie groß ist die Bremszeit T ?

Lösung:

a) Mit $x_0 = 0$ lauten die Gln. (2.4–4) und (2.4–5) für alle Zeiten $t \leq T$:

$$v(t) = v_0 + a\,t \qquad\qquad x(t) = v_0\,t + \frac{a}{2}t^2$$

Wir lösen die erste Gl. nach t auf und setzen t in die zweite Gl. ein:

$$x(t) = v_0 \frac{v(t) - v_0}{a} + \frac{\left[v(t) - v_0\right]^2}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{2a}\left[v^2(t) - v_0^2\right] \qquad \text{nur für } a = \text{const}} \qquad (2.4\text{–}10\text{a})$$

Gleichförmig beschleunigte Bewegungen haben den Beschleunigungs- bzw. Bremsweg

$$s = \frac{1}{2a}\left[v_{\text{End}}^2 - v_0^2\right] \qquad \text{nur für } a = \text{const} \qquad (2.4\text{–}10\text{b})$$

Für $t = T$ erhalten wir mit $x(T) = s = 100$ m $\quad v(T) = v_1 = 10$ m/s $\quad v_0 = 20$ m/s

$$a = \frac{1}{2s}\left(v_1^2 - v_0^2\right) = -1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) $$T = \frac{v_1 - v_0}{a} = \frac{10\text{ m/s} - 20\text{ m/s}}{-1{,}5\text{ m/s}^2} = 6{,}\overline{6}\text{ s}$$

Bemerkung: Man kann die ganze Aufgabe einfacher und schneller rechnen: Die mittlere Geschwindigkeit während des Abbremsens beträgt $v_m = 15\text{ m/s}$. Die Bremszeit ist daher

$$T = \frac{x(T)}{v_m} = \frac{100\text{m}}{15\text{m/s}} = 6{,}\overline{6}\text{ s} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{v(T) - v_0}{T} = -\,1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx -\,0{,}153g$$

Beispiel 2.4–3 Gefährliche Geschwindigkeitsüberschreitung

Ein Auto fährt in der Stadt mit $v_1 = 50\text{ km/h}$. Plötzlich läuft ein Kind in der Entfernung s auf die Straße. Nach der Reaktionszeit $T_R = 1\text{s}$ macht der Fahrer eine Vollbremsung mit $a = -g$ und kommt im letzten Augenblick unmittelbar vor dem Kind zum Stehen.

Mit welcher Endgeschwindigkeit v_{End} hätte er das Kind angefahren, wenn er mit der überhöhten Geschwindigkeit $v_2 = 60\text{ km/h}$ gefahren wäre und wenn das Kind in gleicher Entfernung s wie oben auf die Straße gelaufen wäre?

Lösung:

Die unbekannte Strecke s, die das Auto anfangs bis zum Kind hat, besteht in beiden Fällen aus zwei Teilstrecken: Auf der ersten Teilstrecke fährt das Auto die Zeit $T_R = 1\text{s}$ unbeschleunigt.

Auf der zweiten Teilstrecke bremst das Auto mit $a = -g$. Daher lautet die anfängliche Entfernung s zum Kind im ersten Fall

$$s = v_1 T_R - \frac{v_1^2}{2a} \qquad \text{mit} \qquad a = -g < 0$$

und im zweiten Fall

$$s \underset{\text{Gl. (2.4–10b)}}{\overset{\uparrow}{=}} v_2 T_R + \frac{v_{End}^2 - v_2^2}{2a} \qquad \text{mit} \qquad a = -g < 0$$

Gleichsetzen dieser beiden Gln. liefert

$$v_{End} = \sqrt{2a(v_1 - v_2) T_R + v_2^2 - v_1^2} \approx 42{,}5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Diese überraschend hohe Geschwindigkeit zeigt sehr deutlich, wie gefährlich sogar kleine Geschwindigkeitsüberschreitungen sein können.

2.5 Kreisbewegung

Die Kreisbewegung ist eine besonders wichtige Bewegung: Maschinenteile, die um raumfeste Achsen rotieren, führen Kreisbewegungen aus.

Ein Massenpunkt m läuft in der x, y-Ebene auf einer Kreisbahn mit Radius r im Gegenuhrzeigersinn. Wir betrachten zuerst wieder den einfachsten Fall, eine gleichförmige Kreisbewegung: In gleichen Zeiten Δt werden gleiche Winkel $\Delta\varphi$ überstrichen. Der konstante Quotient $\Delta\varphi/\Delta t$ wird – in Analogie zur Geschwindigkeit $v = \Delta x/\Delta t$ – als **Winkelgeschwindigkeit** ω bezeichnet:

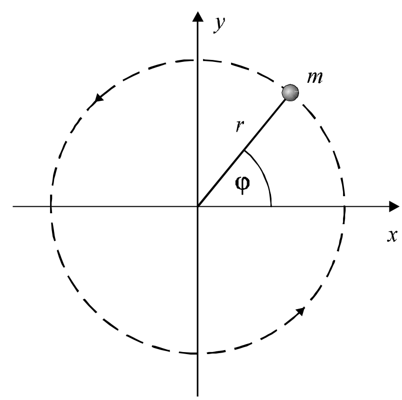

Abb. 2.5–1 Kreisbewegung in der x,y-Ebene.

$$\omega := \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{für gleichförmige Kreisbewegungen} \tag{2.5–1}$$

ω hat die Einheit s^{-1} und ist gleich 2π mal die Drehzahl. Mit $\varphi(t=0) =: \varphi_0$ gilt

$$\omega = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \frac{\varphi(t) - \varphi_0}{t}$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega t \qquad \text{für gleichförmige Kreisbewegungen} \tag{2.5–2}$$

(Beachte die Übereinstimmung mit Gl. (2.2–3).) Der vom Fahrstrahl überstrichene Winkel $\varphi(t)$ wächst linear in der Zeit.

Für *un*gleichförmige Kreisbewegungen $(\Delta\varphi/\Delta t \neq \text{const})$ gibt die Gl.

$$\omega_\mathrm{m} := \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{2.5–3}$$

die mittlere Winkelgeschwindigkeit im Intervall Δt an. Die momentane Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ zur Zeit t ist definiert als

$$\omega(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t} = \dot{\varphi}(t) \tag{2.5–4}$$

Bemerkenswert und wichtig ist die Feststellung, dass die mittlere und die momentane Winkelgeschwindigkeit genauso definiert werden wie die mittlere Geschwindigkeit v_m und die momentane Geschwindigkeit $v(t)$. (Vergleiche die Gln. (2.2–4) und (2.2–6) mit den Gln. (2.5–3) und (2.5–4).) Dies zeigt sehr deutlich, dass es in der Physik Gedanken, Überlegungen und Rechnungen gibt, die immer wieder in ähnlicher Form auftreten.

Die zweite Ableitung von $\varphi(t)$ ergibt die Winkelbeschleunigung $\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t)$.

Die momentane **Bahn**- oder **Umfangsgeschwindigkeit** des Teilchens beträgt

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreisatz}:\ \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi r}{2\pi}}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\,\omega(t) \tag{2.5–5}$$

Nach Gl. (2.5–5) muss ω unbedingt *im Bogenmaß* und nicht im Gradmaß angegeben werden; denn nur im Bogenmaß ist $\Delta s = r\Delta\varphi$. [3]

Für gleichförmige und auch für ungleichförmige Kreisbewegungen gilt also:

$$v(t) = r\,\omega(t) \tag{2.5–6}$$

Nachdem die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und Bahngeschwindigkeit $v(t)$ als *Skalare* definiert bzw. berechnet wurden, müssen beide Größen noch zu *Vektoren* erweitert werden. Der Betrag von $\boldsymbol{\omega}(t)$ wird durch die Gl. (2.5–4) gegeben. Die Richtung von $\boldsymbol{\omega}(t)$ wird wie folgt *definiert*: $\boldsymbol{\omega}(t)$ steht senkrecht auf der Bahnebene und weist in die Richtung, in die sich ein Korkenzieher bewegt, der im Umlaufsinn der Masse gedreht wird. *$\boldsymbol{\omega}(t)$ ist also laut Definition parallel zur Drehachse.*

[3] Nachweislich haben bereits die alten Griechen den Vollwinkel in 360 Teile eingeteilt. Wahrscheinlich haben sie die 360-Grad-Einteilung von den Babyloniern übernommen. Die Einteilung geht wohl darauf zurück, dass ein Jahr ungefähr 360 Tage hat und dass die Zahl 360 durch viele Zahlen geteilt werden kann. Aus diesem Grund ist das Gradmaß – anders als das Bogenmaß – *willkürlich*. Aliens haben höchstwahrscheinlich andere Gradmaße.

Generell gilt: Alle Rechnungen müssen im Bogenmaß gemacht werden – mit einer Ausnahme: Nur die Winkel in den trigonometrischen Funktionen dürfen im Winkelmaß eingesetzt werden, wenn der Rechner auf das Winkelmaß umgestellt ist. Nur im Bogenmaß gilt $\tan\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$ für kleine Winkel $\alpha << 1$.

Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t)$ ist nach Gl. (2.2–8) die Zeitableitung des Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$. Der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ geht vom Koordinatenursprung zum Ort des Teilchens und lautet nach Abb. 2.5–2:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi(t) \\ r\sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.5\text{–}7)$$

Die Bahngeschwindigkeit ist die Zeitableitung des Ortsvektors:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} r\,\dot\varphi(t) \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= r\,\omega(t) \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.5\text{–}8)$$

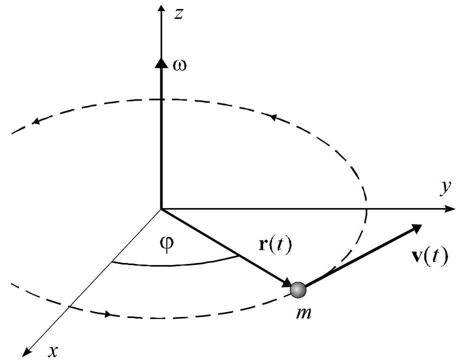

Abb. 2.5–2 Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ steht senkrecht auf der Kreisbahn, ist also parallel zur Drehachse.

Die Kettenregel liefert die innere Ableitung $\dot\varphi(t) = \omega(t)$.

Kontrolle und Veranschaulichung:

- Die Einheiten sind richtig.
- $\mathbf{v}(t)$ hat in Übereinstimmung mit Gl. (2.5–6) die Länge

  $$\left|\mathbf{v}(t)\right| = r\,\omega(t)\sqrt{\sin^2\varphi(t) + \cos^2\varphi(t)} = r\,\omega(t)$$

- $\mathbf{v}(t)$ liegt in der x, y-Ebene und steht senkrecht auf $\mathbf{r}(t)$, da das Skalarprodukt $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = 0$ ist.

Behauptung: $\mathbf{v}(t)$ lässt sich als Vektorprodukt schreiben

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(\mathrm{t}) \qquad (2.5\text{–}9)$$

Beweis: In Koordinatendarstellung lautet das Vektorprodukt von $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y\,b_z - a_z\,b_y \\ a_z\,b_x - a_x\,b_z \\ a_x\,b_y - a_y\,b_x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\cos\varphi(t) \\ r\sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega(t)\,r\sin\varphi(t) \\ \omega(t)\,r\cos\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gl. (2.5–8)}}}{=} \mathbf{v}(t) \qquad \blacksquare$$

Die zweite Ableitung des Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$ nach der Zeit liefert die Beschleunigung