

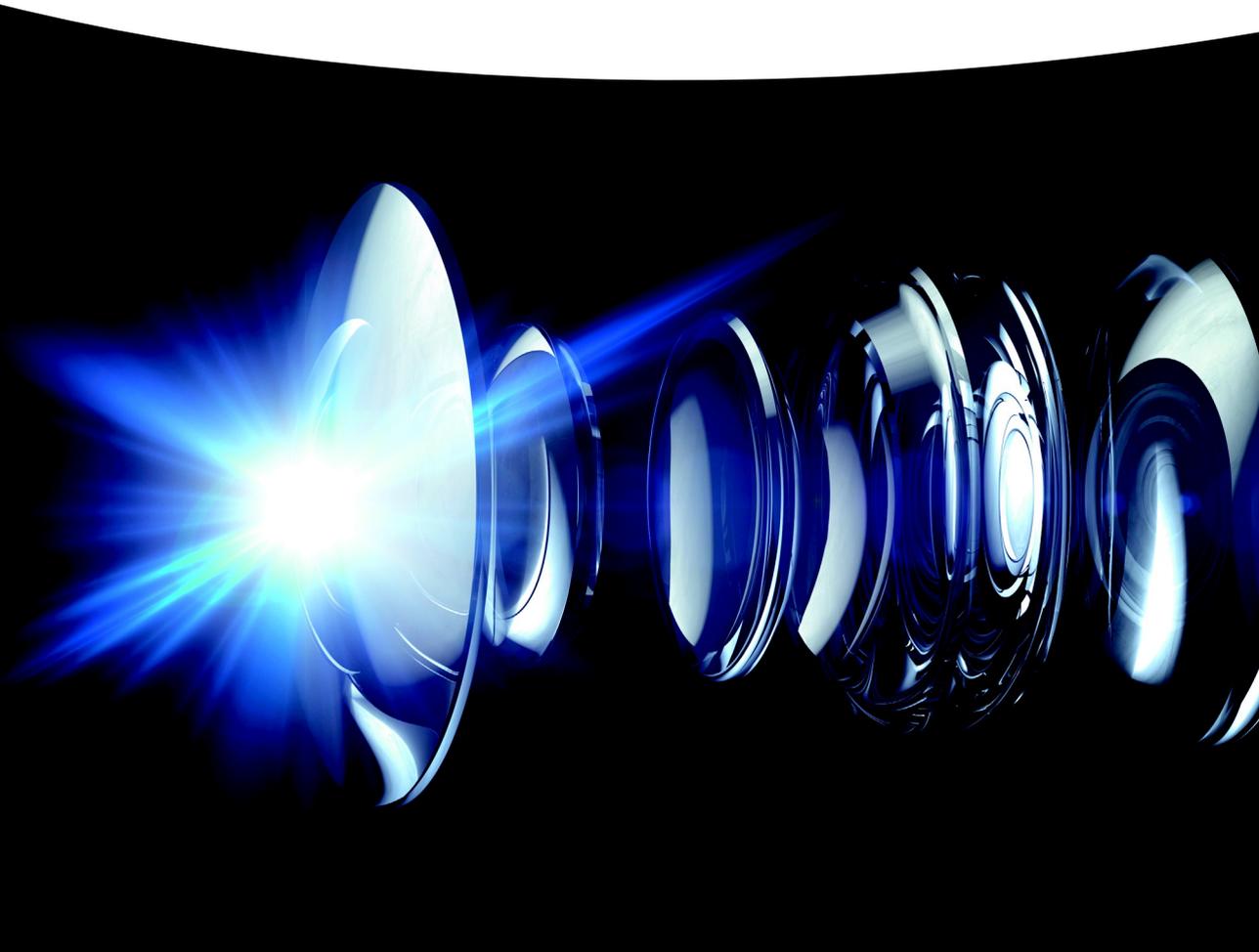
Friedhelm Kuypers



Physik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften

Band 2: Elektrizität, Optik und Wellen

Vierte Auflage



Physik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften

Physik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften

Band 2: Elektrizität, Optik und Wellen

Friedhelm Kuypers

4. Auflage

WILEY-VCH

Autor

Prof. Dr. Friedhelm Kuypers
Hedwig-Dransfeld-Weg 14
93055 Regensburg
Deutschland
Friedhelm.kuypers@oth-regensburg.de

Titelbild

Optisches Linsensystem; GettyImages / fpm

4. Auflage

Alle Bücher von WILEY-VCH werden sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren, Herausgeber und Verlag in keinem Fall, einschließlich des vorliegenden Werkes, für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler irgendeine Haftung.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2023 WILEY-VCH GmbH, Boschstr. 12, 69469 Weinheim, Germany.

Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form – durch Photokopie, Mikroverfilmung oder irgendein anderes Verfahren – reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere von Datenverarbeitungsmaschinen, verwendbare Sprache übertragen oder übersetzt werden. Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen, Handelsnamen oder sonstigen Kennzeichen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, dass diese von jedermann frei benutzt werden dürfen. Vielmehr kann es sich auch dann um eingetragene Warenzeichen oder sonstige gesetzlich geschützte Kennzeichen handeln, wenn sie nicht eigens als solche markiert sind.

Print ISBN 978-3-527-41397-3

ePDF ISBN 978-3-527-82962-0

ePub ISBN 978-3-527-82963-7

Umschlaggestaltung SCHULZ Grafik-Design, Fußgönningheim

Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Druck und Bindung

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

Vorwort

Dieses Buch ist der zweite Band des zweibändigen Werkes „Physik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften“ und beschäftigt sich mit Elektrizität, Optik und Wellen.

Auch der zweite Band der **vierten Auflage** wurde gründlich und **vollständig überarbeitet**. Auch hier wurden weitere Aufgaben – mit Lösungen am Ende des Buches – eingeführt und natürlich Fehler korrigiert.

Ich wiederhole kurz einige Besonderheiten, die bereits im Vorwort des ersten Bandes genannt wurden:

- **96 Beispiele und 169 Aufgaben** werden ausführlich und sorgfältig in den Lehrstoff eingearbeitet. Beispiele und Aufgaben haben eine ganz *zentrale Bedeutung für die Lehre*. Einerseits verdeutlichen sie die Theorie und andererseits zeigen sie, wie sich *Erlern*tes umsetzen und in der Praxis anwenden lässt.
- **Stoffbeschränkung:** Im ganzen Buch soll das *Niveau möglichst einheitlich* sein. Auch der zweite Band beschränkt sich auf den Stoff, der *im Grundstudium beherrscht und erarbeitet werden kann*. Themen, die wegen ihrer Schwierigkeit nicht voll verstanden und daher auch nicht in Klausuren geprüft werden können, meide ich ganz bewusst. Sie treten höchstens in klein geschriebenen Bemerkungen oder Fußnoten kurz auf.

Sachverhalte werden oft von verschiedenen Seiten beleuchtet und Endergebnisse ausführlich diskutiert und interpretiert. Typische Fallen, Fehler und Missverständnisse werden immer wieder angesprochen.

- **Technische Anwendungen** kommen noch häufiger vor als im ersten Band. Kopierer und Laserdrucker, Magnetspeicher, Lichtleiter, CD- und DVD-Spieler, moderne LCD-Bildschirme, Laser werden sogar in eigenen Abschn. vorgestellt.

Der Leser findet ausführliche Antworten z. B. auf folgende Fragen: Warum laufen Schallwellen „um die Ecke“, Lichtwellen aber nicht? Wie entstehen die wundervollen Strukturfarben bei Schmetterlingen, Vögeln und Fischen? Wie wirkt der Strom auf den menschlichen Körper? Was ist Drehstrom und wie arbeiten Drehstrommotoren? Warum sollen Wechselstromkreise unbedingt komplex berechnet werden?

Abschließend möchte ich wieder allen danken, die bei der Fertigstellung des Buches geholfen haben. Prof. Dr. P. Bickel, Prof. Dr. P. Dato und Frau Dr. Lohner haben Teile des Manuskripts kritisch gelesen und Verbesserungsvorschläge gemacht. Für Diskussionen und Anregungen zur Elektrotechnik danke ich Prof. Dr. W. Floßmann. Prof. Dr. W. Scharf hat grundlegende Vorschläge zu Inhalt und Aufbau des Kapitels „33 Akustik“ gemacht. Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. B. Braun und Prof. Dr. A. Deutz für zahllose Gespräche und für ihre ständige Bereitschaft, über Probleme der Didaktik und Physik zu diskutieren. Prof. Dr. B. Braun hat mir eine sehr nützliche Liste mit Fehlern und Verbesserungsvorschlägen geschickt.

Allen Lesern, die durch Anregungen, Bemerkungen oder auch durch Fragen zur Verbesserung des Buches beitragen, bin ich auch weiterhin sehr dankbar. Meine E-Mail-Adresse lautet:

friedhelm.kuypers@oth-regensburg.de

Regensburg, im August 2022

Friedhelm Kuypers

Inhaltsverzeichnis

C Elektrizität

17 Elektrostatische Felder	1
17.1 Elektrische Ladung.....	1
17.2 Die Coulombkraft	2
17.3 Das elektrische Feld.....	4
17.4 Gaußscher Satz.....	10
17.5 Kopierer und Laserdrucker *	19
17.6 Noch einmal in Kürze	22
17.7 Aufgaben	24
18 Potential und Spannung	26
18.1 Elektrostatische Arbeit.....	26
18.2 Potential und Spannung.....	27
18.3 Influenz	33
18.4 Noch einmal in Kürze	34
18.5 Aufgaben	35
19 Kondensatoren	39
19.1 Kapazität der Plattenkondensatoren.....	39
19.2 Energiedichte elektrischer Felder.....	42
19.3 Dielektrika	45
19.4 Piezoelektrizität.....	50
19.5 Noch einmal in Kürze	52
19.6 Aufgaben	53
20 Elektrischer Strom	57
20.1 Der elektrische Strom.....	57
20.2 Ohmsches Gesetz	58
20.3 Elektrische Leistung	63
20.4 RC-Gleichstromkreise	65
20.5 Noch einmal in Kürze	72
20.6 Aufgaben	73
21 Magnetfelder	77
21.1 Einführung.....	77
21.2 Das Biot-Savartsche Gesetz.....	79
21.3 Das Durchflutungsgesetz	86
21.4 Lorentzkraft	89
21.5 Drehmoment auf Leiterschleifen.....	95

21.6 Der Halleffekt	98
21.7 Supraleiter *	100
21.8 Noch einmal in Kürze	103
21.9 Aufgaben	105
22 Induktion	109
22.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz	109
22.2 Lenzsche Regel	114
22.3 Wirbelströme	116
22.4 Induktivität	118
22.5 RL-Gleichstromkreise	122
22.6 Energiedichte magnetischer Felder	126
22.7 Noch einmal in Kürze	127
22.8 Aufgaben	129
23 Magnetismus in Materie	134
23.1 Magnetisierung	134
23.2 Diamagnetismus *	137
23.3 Paramagnetismus *	138
23.4 Ferromagnetismus	139
23.5 Magnetspeicher *	144
23.6 Abschirmung von Feldern *	145
23.7 Noch einmal in Kürze	146
23.8 Aufgaben	148
24 Wechselstromkreise	150
24.1 Wechselspannung an ohmschen Widerständen	150
24.2 Wechselspannung an Spulen	151
24.3 Wechselspannung an Kondensatoren	153
24.4 Reelle Berechnungen *	154
24.5 Komplexe Zahlen *	156
24.6 Komplexe Widerstände	158
24.7 Leistung in Wechselstromkreisen	166
24.8 Transformator	169
24.9 Drehstrom *	171
24.10 Schutzeinrichtungen *	177
24.11 Noch einmal in Kürze	179
24.12 Aufgaben	181

D Optik

25 Reflexion	186
25.1 Einführung	186
25.2 Reflexionsgesetz	186

25.3 Sphärische Spiegel	189
25.4 Noch einmal in Kürze	196
25.5 Aufgaben	198
26 Brechung.....	201
26.1 Brechungsgesetz.....	201
26.2 Totalreflexion und Lichtleiter	205
26.3 Dispersion	208
26.4 Dünne Linsen	211
26.5 Abbildungsfehler.....	220
26.6 Noch einmal in Kürze	221
26.7 Aufgaben	223
27 Optische Geräte	228
27.1 Das Auge	228
27.2 Die Lupe	231
27.3 Das Mikroskop	233
27.4 Das Fernrohr.....	235
27.5 Noch einmal in Kürze	238
27.6 Aufgaben	239

E Wellen

28 Einführung	241
28.1 Wellenfunktionen	242
28.2 Intensität harmonischer Wellen	253
28.3 Noch einmal in Kürze	255
28.4 Aufgaben	256
29 Stehende Wellen.....	258
29.1 Einleitung.....	258
29.2 Interferenz bei gleicher Ausbreitungsrichtung	258
29.3 Stehende Wellen	259
29.4 Schwingungen idealer Saiten	262
29.5 Noch einmal in Kürze	266
29.6 Aufgaben	266
30 Interferenz.....	269
30.1 Zweistrahlint interferenz	270
30.2 Vielstrahlinterferenz.....	276
30.3 Interferenz von Lichtwellen	279
30.4 Optische Weglänge *	285
30.5 Interferenz an dünnen Schichten	289
30.6 CD- und DVD-Spieler *	294

30.7 Laser *	296
30.8 Noch einmal in Kürze	301
30.9 Aufgaben	304
31 Beugung	311
31.1 Huygenssches Prinzip	311
31.2 Beugung am Einzelspalt	312
31.3 Beugung und Interferenz an Mehrfachspalten	318
31.4 Beugung an Lochblende	320
31.5 Noch einmal in Kürze	326
31.6 Aufgaben	327
32 Polarisation	329
32.1 Polarisator und Analysator	329
32.2 Polarisationsverfahren für Licht	332
32.3 Optische Aktivität und LCD-Bildschirme *	335
32.4 Noch einmal in Kürze	337
32.5 Aufgaben	338
33 Akustik	341
33.1 Schallpegel und Lautstärke	341
33.2 Nachhall	348
33.3 Schallschutz	350
33.4 Doppler-Effekt	355
33.5 Noch einmal in Kürze	358
33.6 Aufgaben	360

Lösungen

Lösungen: 17 Elektrostatische Felder	363
Lösungen: 18 Potential und Spannung	367
Lösungen: 19 Kondensatoren	373
Lösungen: 20 Elektrischer Strom	379
Lösungen: 21 Magnetfelder	388
Lösungen: 22 Induktion	393
Lösungen: 23 Magnetismus in Materie	403
Lösungen: 24 Wechselstromkreise	405
Lösungen: 25 Reflexion	415
Lösungen: 26 Brechung	423
Lösungen: 27 Optische Geräte	432
Lösungen: 28 Einführung	435
Lösungen: 29 Stehende Wellen	437
Lösungen: 30 Interferenz	442
Lösungen: 31 Beugung	453

Lösungen: 32 Polarisisation	456
Lösungen: 33 Akustik	458
Stichwortverzeichnis	465

C Elektrizität

17 Elektrostatische Felder

Die Elektrostatik befasst sich mit ruhenden (statischen) Ladungen. Die Kraftwirkung zwischen Ladungen wird durch elektrische Felder beschrieben.

17.1 Elektrische Ladung

*In der Mechanik gibt es die drei unabhängigen Grundgrößen Masse, Länge und Zeit mit den Einheiten Kilogramm, Meter und Sekunde. Alle anderen Größen wie z. B. Geschwindigkeit oder Kraft werden aus diesen Größen abgeleitet (siehe Abschn. 1.2). In der Elektrodynamik wird eine weitere, vierte Grundgröße benötigt: Die elektrische Ladung mit der **Einheit Coulomb** oder aber die Stromstärke mit der **Einheit Ampere**. Die kleinste Ladungsmenge (außerhalb der Elementarteilchenphysik) ist die sog. Elementarladung e_0 . Protonen haben die Ladung $+e_0$, Elektronen die Ladung $-e_0$.¹*

Nach einem Beschluss der 26sten Generalkonferenz für Maß und Gewicht hat die **Elementarladung** (Protonenladung e_0) seit dem 20.Mai.2020 den *fest fixierten und zukünftig unveränderlichen Wert*

$$e_0 = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C (exakt)} \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (17.1-1)$$

Ich betone nochmals: Zukünftig hat die Elementarladung einen exakt vereinbarten Wert und keine Unsicherheit. *Die Festlegung der Elementarladung definiert auch die Ladungseinheit Coulomb universell und unveränderlich.* Eine Ladung der Größe -1C enthält $10^{19}/1,602\,176\,634$ Elektronen.

Fließende Ladungen erzeugen elektrische Ströme. Die mittlere Stromstärke wird definiert als

¹ Freie Elektronen werden in erster Linie durch den Glüheffekt, den Photoeffekt oder die Feldemission erzeugt.

$$I_m := \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Damit ist die Einheit Ampere (abgekürzt 'A') der Stromstärke wie folgt festgelegt:

$$1 \text{ Ampere} := \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Sekunde}} \quad \text{oder abgekürzt} \quad 1 \text{ A} := \frac{1 \text{ C}}{\text{s}}$$

Die momentane Stromstärke ist die mittlere Stromstärke im Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$:

$$I(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \dot{Q}(t) \quad (17.1-2)$$

Dabei ist $Q(t)$ die Ladung, die bis zur Zeit t geflossen ist. Die Stromstärke wird also mit der Elementarladung e_0 definiert. Bei einer Stromstärke von 1 A fließen an einer festen Stelle des Leiters pro Sekunde etwa $1/(1,602 \cdot 10^{-19}) \approx 6,25 \cdot 10^{18}$ Elektronen vorbei.

Bemerkung: Auch in der Mechanik werden die momentanen Größen Geschwindigkeit $v(t)$, Beschleunigung $a(t)$ und Leistung $P(t)$ durch den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ aus mittleren Größen abgeleitet.

Experimentell wurden folgende Aussagen für elektrische Ladungen gefunden:

- Es gibt positive und negative elektrische Ladungen. Willkürlich wurde das Vorzeichen der Elektronenladung als negativ festgesetzt. Ladungen mit gleichem (verschiedenen) Vorzeichen stoßen sich ab (ziehen sich an). Im Gegensatz zur Gravitationskraft, die nur anziehend ist, gibt es hier also anziehende und abstoßende Kräfte.
- Ein Elektron hat die Ladung $-e_0$, ein Proton die Ladung e_0 . Alle Ladungen Q sind stets ganzzahlige Vielfache der Elementarladung:

$$Q = k e_0 \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 3, \dots$$

- In abgeschlossenen Systemen, d. h. in Systemen, denen weder Ladungen zugeführt noch entzogen werden, ist die Summe aller Ladungen konstant:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = \text{const} \quad \text{in abgeschlossenen Systemen}$$

Der **Ladungserhaltungssatz** ist vor allem in der Elementarteilchenphysik wichtig.

17.2 Die Coulombkraft

Die elektrische Ladung eines Körpers wird durch die Kräfte nachgewiesen, die andere geladene Körper auf ihn ausüben.² Wir betrachten in Abb. 17.2-1 zwei Ladungen Q_0, Q_1 mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$. Die Ladungen seien punktförmig, d. h. ihre Ausdehnungen seien viel kleiner als ihr Abstand. In Experimenten ermittelte der französische Physiker

² In gleicher Weise kann die Masse m eines Körpers gemessen werden, indem man die Gravitationskraft der Erde auf ihn misst.

Charles A. Coulomb gegen Ende des 18ten Jahrhunderts, dass die elektrostatische Kraft zwischen ruhenden Ladungen

- proportional zum Produkt $Q_0 Q_1$ der beiden Ladungen ist.
- indirekt proportional zum Quadrat $(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)^2$ des Abstandes ist.
- parallel zur Verbindungslinie der beiden Ladungen ist.

1785 stellte Coulomb das **Coulombsche Gesetz** auf; es beschreibt die **Coulombkraft**, die die Ladung Q_1 auf die Ladung Q_0 ausübt:

$$\mathbf{F}_{01} = k \frac{Q_0 Q_1}{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|}$$

Für spätere Rechnungen ist es vorteilhaft, die Konstante k in der Form $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ zu schreiben. Dann lautet die Coulombkraft der Punktladung Q_1 auf die Punktladung Q_0 ³:

$$\mathbf{F}_{01} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 Q_1}{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} \quad (17.2-1)$$

ϵ_0 heißt **elektrische Feldkonstante** oder **Dielektrizitätskonstante des Vakuums** oder Influenzkonstante und hat nach den Experimenten den Wert⁴

$$\epsilon_0 = 8,854\,187\,812\,8(13) \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad (17.2-2)$$

In der Quantenmechanik beschreiben die Coulombkräfte die Bindung der Elektronen an den Atomkern, die Wechselwirkung zwischen Atomen und Molekülen und schließlich auch die zwischenatomaren Kräfte in Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen.

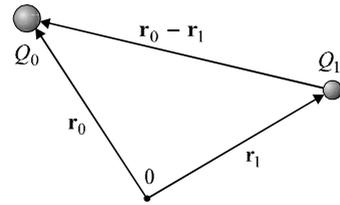


Abb. 17.2-1 Die Coulombkraft zwischen beiden Ladungen ist proportional zum Produkt $Q_0 Q_1$ der Ladungen und indirekt proportional zum Quadrat der Entfernung.

³ Nach Beispiel 17.4-3 gilt die Gl. (17.2-1) auch im Außenraum von allen ausgedehnten, *kugelsymmetrischen* Ladungsverteilungen mit Gesamtladung Q_1 .

⁴ Aus den Maxwell-Gln. ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldkonstante ϵ_0 , der magnetischen Feldkonstante μ_0 (siehe Abschn. 21.2) und der Lichtgeschwindigkeit c :

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad (17.2-3)$$

1948 wurde μ_0 durch die Lorentzkraft zwischen zwei parallelen, stromdurchflossenen Leitern *exakt* festgelegt. (Nähere Erläuterungen stehen in Aufgabe 21-8). 1983 wurde c ebenfalls *exakt* vereinbart. Daher wurde ϵ_0 bis 2019 durch die Gl. $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$ genau bestimmt.

2019 traf die 26ste Generalkonferenz für Maß und Gewicht neue Vereinbarungen, die für alle Zeiten gelten sollen; dabei wurde u. a. die Elementarladung e_0 *exakt* festgelegt. Seitdem sind ϵ_0, μ_0 mit Fehlern behaftete Messgrößen.

Das Coulombgesetz (17.2-1) hat die gleiche Form wie das Gravitationsgesetz, das die Anziehungskraft zwischen zwei Massen beschreibt:

$$\mathbf{F}_{01} = -\gamma \frac{m_0 m_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} \quad \text{mit der Gravitationskonstanten} \quad \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Der einzige Unterschied besteht darin, dass es nur *positive* Massen und *anziehende* Gravitationskräfte gibt.

Da Coulombkräfte und Gravitationskräfte beide indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes sind, hängt ihr Verhältnis nicht vom Abstand ab. Das Verhältnis der beiden Kräfte ist für Protonen mit $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{8,988 \cdot 10^9 \text{ Nm/C}^2 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2} \approx 1,24 \cdot 10^{36}$$

Übrigens: Atomkerne sind trotz der abstoßenden Coulombkräfte zwischen den Protonen stabil, weil Protonen und Neutronen durch die „Starke Wechselwirkung“ zusammengehalten werden, auf die ich nicht weiter eingehe.

Beispiel 17.2-1 Pendel im Gleichgewicht

Zwei kleine Metallkugeln mit Masse m und Ladung Q hängen an Fäden der Länge l im selben Punkt an der Decke (siehe Abb. 17.2-2).

Berechne die Entfernung d der Kugeln im Gleichgewicht für $d \ll l$.

Lösung:

Wir betrachten die rechte Kugel in Abb. 17.2-3. Auf die Kugel wirken die Gewichtskraft $m\mathbf{g}$ und die Coulombkraft \mathbf{F}_C . Das rechte Pendel ist genau dann im Gleichgewicht, wenn sein Faden parallel ist zur resultierenden Kraft $m\mathbf{g} + \mathbf{F}_C$, also für

$$\begin{aligned} \varphi = \alpha &\Rightarrow \sin \varphi = \sin \alpha \approx \tan \alpha \\ \Rightarrow \frac{d}{2l} &\approx \frac{F_C}{mg} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2} \frac{1}{mg} \\ \Rightarrow d &\approx \left(\frac{Q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

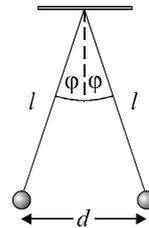


Abb. 17.2-2 Die Coulombkraft drückt die Pendel auseinander.

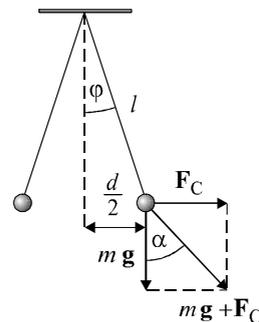


Abb. 17.2-3 Auf die Pendelmasse wirken die Gewichtskraft $m\mathbf{g}$ und die Coulombkraft \mathbf{F}_C .

17.3 Das elektrische Feld

Das Coulombgesetz kann leicht auf mehrere ruhende Ladungen verallgemeinert werden (siehe Abb. 17.3-1): n Punktladungen Q_i mit den Ortsvektoren \mathbf{r}_i (und auch n kugel-

symmetrische Ladungsverteilungen mit den Ortsvektoren \mathbf{r}_i ihrer Ladungsmittelpunkte) üben insgesamt auf eine Punktladung q an der Stelle \mathbf{r} die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q Q_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (17.3-1)$$

aus. Die gesamte Coulombkraft ist also einfach die Vektorsumme der n einzelnen Coulombkräfte; es gilt das **Superpositionsprinzip**.

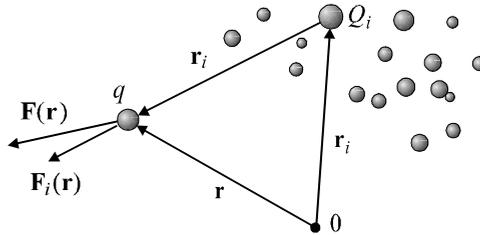


Abb. 17.3-1 Die gesamte Kraft aller Punktladungen Q_i auf die Ladung q ist die Vektorsumme der n Einzelkräfte der i -ten Ladung auf die Ladung q .

Die Kraft \mathbf{F} ist proportional zur Probeladung q und kann wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (17.3-2)$$

Diese Gl. definiert eine neue physikalische Größe, das **elektrische Feld** $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

n Ladungen Q_i mit Ortsvektoren \mathbf{r}_i erzeugen am Ort \mathbf{r} das elektrische Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (17.3-3)$$

Nach dieser Definition ist das elektrische Feld am Ort \mathbf{r} die Kraft auf eine Probeladung q , die sich am Ort \mathbf{r} befindet, dividiert durch q .

Die Einheit des elektrischen Feldes⁵ ist N/C. Mit der später eingeführten Einheit 'Volt' (der Spannung) lautet die Einheit V/m:

$$\text{Einheit des elektrischen Feldes: } \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (17.3-4)$$

⁵ Der Begriff „Feld“ ist ein zentraler Begriff in der Physik. Allgemein ist ein Feld eine physikalische Größe, die vom Ort \mathbf{r} und evtl. auch von der Zeit t abhängt. Es gibt zwei Arten von Feldern:

- **Skalare Felder** $F = F(\mathbf{r}, t)$: Ein Beispiel ist das Temperaturfeld $T(\mathbf{r}, t)$, das die Temperaturverteilung beschreibt, indem es jedem Ort \mathbf{r} zu jeder Zeit t eine Temperatur zuordnet.
- **Vektorfelder** $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$: Beispiele sind das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und das später eingeführte Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

Das elektrische Feld, das die Ladungen Q_i erzeugen, ist unabhängig von der Probeladung q und hängt nur von der Verteilung und der Größe der Ladungen Q_i ab. Nach dem Superpositionsprinzip überlagern sich die elektrischen Felder mehrerer Ladungen linear. Das elektrische Feld einer positiven (negativen) Punktladung zeigt radial nach außen (innen).

Nach Gl. (17.3–5) lassen sich elektrische Felder durch Kräfte auf Probeladungen messen.

Dabei muss die Probeladung q so klein sein, dass sie die Verteilung der Ladungen Q_i , d. h. die Ortsvektoren \mathbf{r}_i durch rückwirkende Kräfte nicht (wesentlich) ändert. Andernfalls würde sich das zu messende Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ bei der Messung ändern.

Beispiel 17.3–1 Feldstärke im Fernfeld eines Dipols

Ein **Dipol** besteht aus zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen mit dem Abstand $2d$. Betrachte einen Dipol, dessen Ladungen übereinander liegen und berechne das elektrische Feld im Punkt P, der im Fernfeld ($r \gg d$) auf einer horizontalen Gerade liegt, die die Verbindungslinie beider Ladungen in der Mitte senkrecht schneidet.

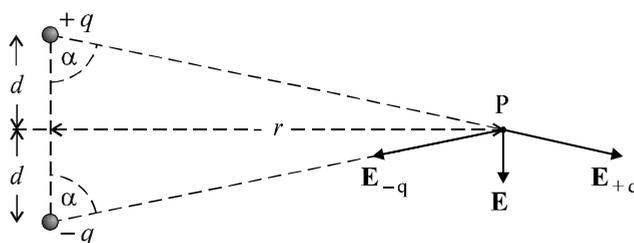


Abb. 17.3–2 Dipol mit elektrischen Feldern im Fernpunkt P. Es gelte: $q > 0$

Lösung:

Im Punkt P sind die Beträge der beiden elektrischen Felder, die von den beiden Ladungen erzeugt werden, gleich groß und lauten

$$E_{+q} = E_{-q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + d^2}$$

Die horizontalen Komponenten der beiden Vektorfelder $\mathbf{E}_{+q}, \mathbf{E}_{-q}$ heben sich nach Abb. 17.3–2 gegenseitig auf; die vertikalen Komponenten haben dieselbe Richtung und addieren sich daher. Die Summe \mathbf{E} der beiden Vektorfelder $\mathbf{E}_{+q}, \mathbf{E}_{-q}$ ist vertikal und hat den Betrag

$$\begin{aligned} E &= 2E_{+q} \cos\alpha = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + d^2} \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} = \\ &= \frac{2dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \quad (\text{exakt auch im Nahfeld}) \quad (17.3-6a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E \underset{\substack{\approx \\ \text{nur für } r \gg d}}{\approx} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2dq}{r^3} \quad (\text{nur im Fernfeld}) \quad (17.3-6b)$$

Der Ladungsabstand $2d$ und die Ladung q treten im Fernfeld nur als Produkt auf. Da dieses Ergebnis für alle Punkte im Fernfeld gilt (also auch für Punkte, die nicht auf der gestrichelten, horizontalen Achse in Abb. 17.3–2 liegen), können die Ladung q und der Abstand $2d$ im Fernfeld nicht einzeln gemessen werden, sondern nur das sog. **elektrische Dipolmoment**

$$p := 2dq \quad (17.3-7)$$

Der rasche Abfall des Feldes mit r^{-3} ist darauf zurückzuführen, dass die zwei Ladungen mit wachsendem Abstand r – relativ gesehen – immer näher „zusammenrücken“, so dass ihre Felder nicht nur immer schwächer werden, sondern sich auch immer mehr gegeneinander aufheben.

Wenn in einem Volumen V nicht einzelne Ladungen Q_i , sondern eine kontinuierliche Ladungsverteilung mit der **Ladungsdichte**

$$\rho(\mathbf{r}) := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad \text{an der Stelle } \mathbf{r} \quad (17.3-8)$$

vorliegt, dann lautet das elektrische Feld an der Stelle \mathbf{r} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (17.3-9)$$

Beispiel 17.3–2 Feldstärke auf der Symmetrieachse einer geladenen Scheibe

a) Berechne das elektrische Feld $\mathbf{E}(x)$ in einem Punkt P auf der Symmetrieachse eines homogen geladenen, dünnen Ringes mit Radius r_{Ring} und positiver Gesamtladung Q (siehe Abb. 17.3–3).

b) Berechne das Feld $\mathbf{E}(x)$ auf der Symmetrieachse einer Scheibe mit Radius r_{Scheibe} , positiver Gesamtladung Q und konstanter Flächenladungsdichte

$$\sigma := Q/(\pi r_{\text{Scheibe}}^2).$$

c) Untersuche die Grenzfälle $x \gg r_{\text{Scheibe}}$ und $x \ll r_{\text{Scheibe}}$.

Lösung:

a) Aus Symmetriegründen ist das elektrische Feld \mathbf{E} auf der x -Achse parallel zur x -Achse.

Das dunkle Volumenelement dV in Abb. 17.3–3 erzeugt auf der Symmetrieachse im Punkt P ein Feld mit dem Betrag

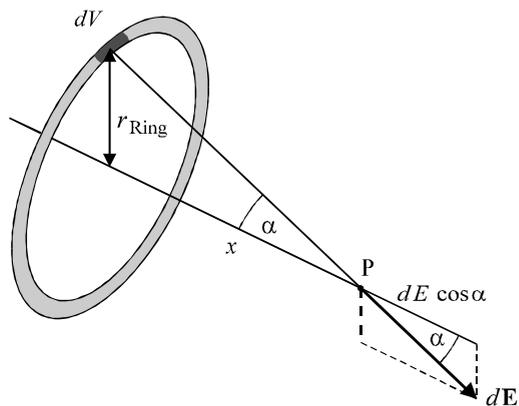


Abb. 17.3–3 Das dunkle Ringelement dV erzeugt auf der Symmetrieachse das Feld dE .

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r_{\text{Ring}}^2 + x^2}$$

Bei der Integration über alle Volumenelemente bleibt aus Symmetriegründen nur die x-Komponente des elektrischen Feldes übrig. Daher interessieren wir uns nur für

$$\begin{aligned} dE_x &= dE \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r_{\text{Ring}}^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{r_{\text{Ring}}^2 + x^2}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dQ}{(r_{\text{Ring}}^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Bei der Integration über alle Volumenelemente ist x konstant, so dass nur das Integral $\int dQ = Q$ zu berechnen ist. Wir erhalten

$$E_{\text{Ring}}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x Q}{(r_{\text{Ring}}^2 + x^2)^{3/2}} \quad (17.3-10)$$

Für $x \gg r_{\text{Ring}}$, also im Fernfeld folgt das plausible Ergebnis: $E_{\text{Ring}}(x) \approx Q/(4\pi\epsilon_0 x^2)$

b) Wir nehmen an, dass die Scheibe aus vielen konzentrischen Ringen besteht – jeweils mit Radius r , infinitesimaler Ringdicke dr und infinitesimaler Fläche $dA = 2\pi r dr$. Nach Gl. (17.3–10) erzeugen diese Ringe auf der Symmetrieachse Felder der Stärke

$$dE_{\text{Ring}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dQ}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad \overset{\uparrow}{dQ = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr} \quad \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Integration über alle Ringe ergibt das gesamte elektrische Feld

$$\begin{aligned} E_{\text{Scheibe}}(x) &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^{r_{\text{Scheibe}}} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[(r^2 + x^2)^{-1/2} \right]_0^{r_{\text{Scheibe}}} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (r_{\text{Scheibe}}/x)^2}} \right] \end{aligned} \quad (17.3-11)$$

c) Für $x \gg r_{\text{Scheibe}}$ erhalten wir mit der Taylorentwicklung $(1 + \epsilon)^{-1/2} \approx 1 - \epsilon/2$ das Feld

$$E_{\text{Scheibe}}(x) \underset{x \gg r_{\text{Scheibe}}}{\approx} \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{r_{\text{Scheibe}}^2}{x^2} \quad \overset{\uparrow}{\sigma = Q/(\pi r_{\text{Scheibe}}^2)} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2}$$

Wie erwartet erhalten wir in großer Entfernung das Feld einer Punktladung Q .

Für $r_{\text{Scheibe}} \rightarrow \infty$, also für unendlich große Scheiben erhalten wir ein konstantes Feld:

$$E_{\text{Scheibe}}(x) \underset{x \ll r_{\text{Scheibe}}}{\approx} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{für homogen geladene, unendlich ausgedehnte Platten} \quad (17.3-12)$$

(Siehe auch Beispiel (17.4–5).)

Das Vektorfeld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ kann (wie auch jedes andere Vektorfeld) auf zwei Arten graphisch dargestellt werden:

- Man zeichnet an einigen ausgewählten Stellen \mathbf{r}_i den Vektor $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i)$ auf (siehe Abb. 17.3–4a). Die Länge der gezeichneten Pfeile ist proportional zur Feldstärke.

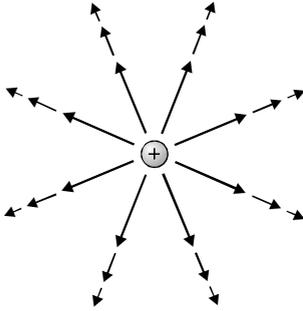


Abb. 17.3–4a Die elektrische Feldstärke einer Punktladung wird an einigen Stellen gezeichnet.

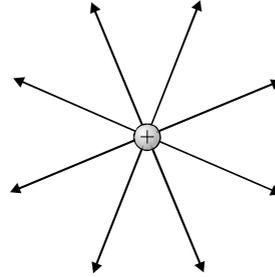


Abb. 17.3–4b Feldlinien einer positiven Punktladung.

- Man zeichnet die sog. **Feldlinien**, die wie folgt definiert sind: *Die Tangenten der Feldlinien haben überall die Richtung der elektrischen Feldstärke. Die Feldlinien zeigen in die Richtung der Kraft auf eine positive Ladung.* Die Dichte der Feldlinien im Raum – nicht in der Ebene – ist proportional zur Feldstärke. *Elektrische Feldlinien beginnen bei einer positiven Ladung und enden bei einer negativen Ladung.* Elektrische Feldlinien schneiden sich nicht.

In gleicher Weise werden in Abschn. „8.1 Grundlagen der Strömungslehre“ die Stromlinien definiert: Die Tangenten der Stromlinien haben die augenblickliche Richtung der Strömungsgeschwindigkeit. Nach der Kontinuitätsgl. wächst die Dichte der Stromlinien mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit.

Bedenke: Feldlinien sind nur *gemalte und gedachte Linien*, die lediglich die Kräfte auf positive Probekörper

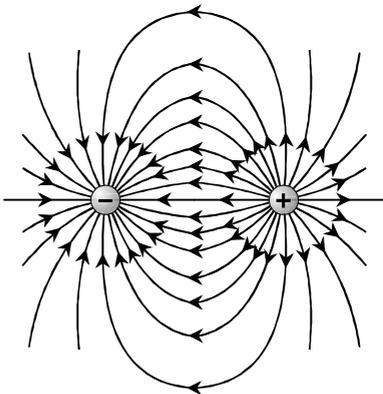


Abb. 17.3–5a Feldlinien eines Dipols. Ihre Tangenten haben überall die Richtung der Feldstärke.

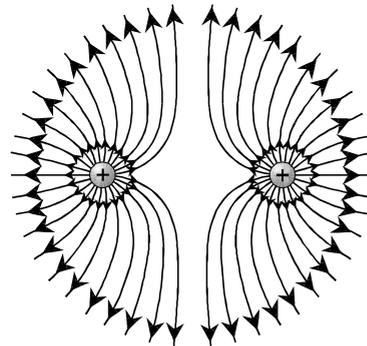


Abb. 17.3–5b Feldlinien von zwei gleich großen Ladungen.

illustrieren sollen. Feldlinien kommt keine direkte physikalische Realität zu.

Feldlinien ergeben übersichtlichere Bilder und werden daher meistens bevorzugt.

Abb. 17.3–5a zeigt die Feldlinien eines **Dipols**, also von zwei entgegengesetzt gleich großen Ladungen. Die Dichte der Feldlinien zeigt, dass die Feldstärke zwischen den Ladungen am größten ist. Abb. 17.3–5b zeigt die Feldlinien von zwei gleich großen Ladungen. In der Mitte zwischen beiden Ladungen ist die Feldstärke exakt null. Wenn keine negativen Ladungen existieren, enden die Feldlinien im Unendlichen.

In Abb. 17.3–6 werden die Feldlinien von zwei verschieden großen Ladungen dargestellt. In großer Entfernung sehen die Feldlinien ähnlich aus wie die Feldlinien einer Ladung $+Q$.

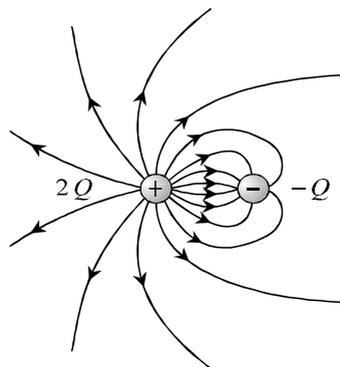


Abb. 17.3–6 Feldlinien von zwei verschieden großen Punktladungen.

17.4 Gaußscher Satz

Elektrische Felder können mit Gl. (17.3–3) oder mit Gl. (17.3–9) oft nur mühsam oder – in den meisten Fällen – nur numerisch berechnet werden. Wir werden nun mit dem Gaußschen Satz eine Berechnungsmethode kennen lernen, die zwar viel einfacher und vor allem viel eleganter ist, die dafür aber nur in sehr wenigen, *symmetrischen Fällen* angewendet werden kann. Der Gaußsche Satz ermöglicht aber nicht nur die Berechnung von symmetrischen elektrischen Feldern, sondern gibt vor allem auch tiefere Einsichten.

Vor der Einführung in den Gaußschen Satz müssen wir den Fluss Φ eines beliebigen Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ durch eine Fläche definieren. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall: Das Vektorfeld \mathbf{F} ist konstant und die Fläche ist eben. Eine ebene Fläche wird durch ihren Normalenvektor \mathbf{A} beschrieben, der laut Definition senkrecht auf der Fläche steht (bei einem Körper zeigt er immer nach außen) und dessen Länge gleich dem Flächeninhalt A ist. Der Fluss durch die ebene Fläche wird als Skalarprodukt definiert:

$$\Phi := \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} \quad \text{für konstante Vektorfelder und ebene Flächen} \quad (17.4-1)$$

Beachte, dass der Fluss ein Skalar ist und daher keine Richtung hat. Das folgende Beispiel aus der Strömungslehre macht deutlich, warum das Skalarprodukt aus einem Vektorfeld und einer Fläche ‘Fluss’ heißt – selbst dann, wenn (wie in der Elektrostatik) nichts strömt.

Beispiel 17.4–1 Der Fluss des Geschwindigkeitsfeldes einer strömenden Flüssigkeit

Eine Flüssigkeit oder ein Gas strömt in horizontaler Richtung stationär und homogen, d. h. die Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{v} hängt weder vom Ort noch von der Zeit ab. Berechne den

Fluss durch eine ebene Fläche \mathbf{A} und interpretiere die Bedeutung des Flusses in der Strömungslehre.

Lösung:

Das Skalarprodukt

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = v A \cos \vartheta$$

ist das Produkt aus der Strecke, die das Fluid pro Sekunde zurücklegt, und der Fläche $\hat{A} = A \cos \vartheta$, die senkrecht durchströmt wird. Der Fluss $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ ist daher der Volumenstrom in m^3/s , d. h. das Volumen, das pro Sekunde durch die Fläche \mathbf{A} strömt.

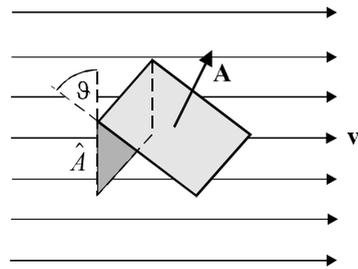


Abb. 17.4-1 Der Fluss eines Fluids durch eine Fläche \mathbf{A} ist gleich v mal die dunkle, projizierte Fläche \hat{A} .

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall: Das Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist nicht konstant oder die Fläche ist nicht eben. In diesem Fall wird die Fläche in n kleine Teilflächen mit Normalenvektoren $d\mathbf{A}_i$ zerlegt (siehe Abb. 17.4-2). Die Teilflächen sind so klein, dass sie näherungsweise eben sind und das Vektorfeld auf jeder Teilfläche ungefähr konstant ist. Nach Gl. (17.4-1) beträgt der Fluss

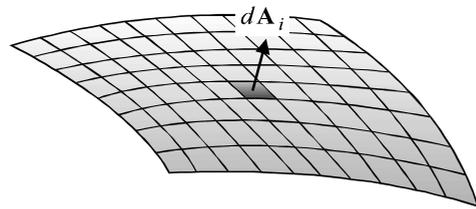


Abb. 17.4-2 Eine gekrümmte Fläche ist aus vielen kleinen, näherungsweise ebenen Flächenelementen zusammengesetzt. Die Normalvektoren $d\mathbf{A}_i$ stehen senkrecht auf den kleinen Flächenelementen.

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{A}_i$$

Wenn die Teilflächen immer kleiner werden, dann geht die Summe in ein Integral über und wir erhalten die allgemeine Definition eines Flusses:

Der Fluss eines beliebigen Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ durch eine Fläche A ist definiert als Flächenintegral

$$\Phi := \int_A \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \tag{17.4-2}$$

Demnach ist der Fluss des elektrischen Feldes

$$\Phi_E = \int_A \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \tag{17.4-3}$$



Beispiel 17.4-2 Fluss des elektrischen Feldes einer Punktladung

Eine positive Punktladung Q ruht im Koordinatenursprung. Berechne den Fluss durch eine Kugel mit Radius r und Kugelmittelpunkt im Koordinatenursprung.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 \Phi_E &= \int_{A_{\text{Kugel}}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_{\text{Kugel}}} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{A} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \mathbf{r} \text{ parallel zu } d\mathbf{A} \end{array} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_{\text{Kugel}}} \frac{r}{r^3} \cdot dA \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ r \text{ ist bei der Inte-} \\ \text{gration konstant} \end{array} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underbrace{4\pi r^2}_{A_{\text{Kugel}}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (17.4-4)
 \end{aligned}$$

Der Fluss des elektrischen Feldes ist die von der Kugel eingeschlossene Ladung Q dividiert durch die elektrische Feldkonstante ϵ_0 . Dieses Ergebnis ist aus zwei Gründen bemerkenswert:

- Der Fluss hängt nicht vom Kugelradius ab, da mit zunehmendem Radius das elektrische Feld mit $1/r^2$ fällt und die Kugeloberfläche mit r^2 wächst.
- Bei der Coulombkraft wurde in Unterkapitel 17.1 die Proportionalitätskonstante k durch $1/(4\pi\epsilon_0)$ ersetzt, um das Ergebnis in Gl. (17.4-4) so einfach zu machen.

Man kann mathematisch beweisen, dass die Gl. (17.4-4) auf beliebige Ladungsverteilungen und beliebige Flächen verallgemeinert werden kann; man erhält so den Gaußschen Satz:⁶

Gaußscher Satz

Der Fluss des elektrischen Feldes durch eine *beliebige, geschlossene* Fläche A ist gleich der Summe der *eingeschlossenen* Ladungen Q_i dividiert durch ϵ_0 :

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i \quad (17.4-5)$$

Ladungen außerhalb der geschlossenen Fläche, über die integriert wird, tragen nicht zum Fluss bei.

Der Gaußsche Satz liefert einen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Fluss durch eine geschlossene Fläche⁷ und der eingeschlossenen Ladung. In vielen Aufgaben mit

⁶ Die Gl. (17.4-5) folgt sehr schnell durch Volumenintegration aus der (zu postulierenden) Maxwell-Gl.

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} dV = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

Nach dem Gaußschen Satz der Vektoranalysis gilt:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \oint_A \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A}$$

Dabei ist A die geschlossene Oberfläche des Volumens V .

symmetrischer Ladungsverteilung kann das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ mit einfachen Flächenintegralen berechnet werden. Dabei muss die Integrationsfläche die Symmetrie der Ladungsverteilung widerspiegeln, so dass das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ entweder parallel oder senkrecht zu allen Flächennormalen $d\mathbf{A}_i$ ist.

Der Gaußsche Satz ist eine der vier Maxwell-Gln., die eine fundamentale Bedeutung für die Elektrodynamik haben – vergleichbar mit der Wichtigkeit der Newtonschen Axiome für die Mechanik. Oben wurde gesagt, dass der Gaußsche Satz mathematisch aus dem Coulombschen Gesetz (17.2–1) abgeleitet werden kann. Umgekehrt kann auch das Coulombsche Gesetz aus dem Gaußschen Satz und einfachen Symmetrieüberlegungen hergeleitet werden (siehe das folgende Beispiel 17.4–3). *Der Gaußsche Satz (17.4–5) ist daher äquivalent zum Coulombschen Gesetz (17.2–1).*

Wir wollen nun untersuchen, wie in der Elektrostatik elektrostatische Felder im Innern und im Außenraum von leitenden Körpern aussehen.

1) Felder und Ladungen im Leiterinneren: Werden Ladungen auf oder in einen beliebig geformten, leitenden Körper gebracht, dann treten sehr kurzzeitig elektrische Felder im Körperinneren auf. Sie *verschieben die Ladungen solange, bis die elektrischen Felder im Körperinneren verschwinden*. (Den mathematischen Beweis dieser Aussage kann ich hier nicht erbringen.) Daher gilt:

Leitende Körper sind in der Elektrostatik im Innern feldfrei: $\mathbf{E}_{\text{innen}} = \mathbf{0}$

Mit dem Gaußschen Satz folgt daraus sofort eine zweite Aussage:

In der Elektrostatik ist das Innere eines leitenden Körpers nicht nur feldfrei, sondern auch ladungsfrei: $Q_{\text{innen}} = 0$

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass es in der Elektrostatik eine Ladung $Q_{\text{innen}} \neq 0$ im Innern eines leitenden Körpers gibt. Dann ist der Fluss Φ_E für alle geschlossenen Flächen A , die nur diese eine Ladung umschließen, einerseits (wegen $\mathbf{E}_{\text{innen}} = \mathbf{0}$) null, andererseits aber (wegen des Gaußschen Satzes und wegen $Q_{\text{innen}} \neq 0$) nicht null. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch ist. ■

Auch Hohlräume mit einer geschlossenen, leitenden Oberfläche sind feldfrei. Daher schirmt eine Metallhülle einen Raum sicher gegen äußere elektrostatische Felder ab. Aber auch ein engmaschiges Metallnetz oder -gitter, ein sog. **Faraday-Käfig** liefert in der Praxis meist eine ausreichende Abschirmung.

2) Felder auf Leiteroberflächen: *Statische elektrische Felder stehen im Außenraum senkrecht auf den Leiteroberflächen.* Hätten die Felder eine Komponente parallel zur Leiteroberfläche, so würden sich die Ladungen unter der Oberfläche solange verschieben, bis die elektrischen Felder überall senkrecht auf den Leiteroberflächen stehen.

⁷ Eine Fläche heißt geschlossen, wenn sie ein Volumen vollständig einschließt. Die Oberflächen aller Körper sind geschlossen; ebene Flächen sind nie geschlossen.

Der Betrag der elektrischen Felder kann mit dem Gaußschen Satz ermittelt werden. Um die Flächenintegration möglichst einfach zu machen, sollte die Integrationsfläche der Richtung des elektrischen Feldes im Außenraum angepasst und daher so gewählt werden, dass die Normalenvektoren der Integrationsfläche entweder parallel oder senkrecht zum elektrischen Feld im Außenraum sind. Das ist der Fall, wenn man (in Gedanken) eine sehr kleine Dose so weit in die Oberfläche hineinschiebt, dass eine Stirnfläche innerhalb und die andere Stirnfläche außerhalb der Leiterfläche liegt (siehe Abb. 17.4-3). Die Dose ist so klein, dass die elektrische Feldstärke auf der äußeren Stirnfläche und die örtliche Flächenladungsdichte

$$\sigma := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad (17.4-6)$$

mit $\Delta Q =$ Ladung unter der Oberfläche ΔA

auf der eingeschlossenen Leiteroberfläche nahezu konstant sind. Der Fluss durch die Dose ist

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint_{A_{\text{Dose}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \\ &= \int_{A_{\text{äußere Stirnfläche}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \\ &= E dA \\ &= \int_{A_{\text{äußere Stirnfläche}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \\ &= \int_{A_{\text{äußere Stirnfläche}}} E \, dA \\ &= E \int_{A_{\text{äußere Stirnfläche}}} dA \\ &= E A_{\text{äußere Stirnfläche}} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{an der Oberfläche eines Leiters} \quad (17.4-7)$$

Die elektrostatische Feldstärke an der Oberfläche eines Leiters ist proportional zur örtlichen Flächenladungsdichte σ unter der Leiteroberfläche.⁸

Die folgenden drei Beispiele berechnen elektrische Felder von Ladungsverteilungen.



Beispiel 17.4-3 Elektrische Felder von geladenen Kugeln

Eine leitende Kugel mit Radius r_{Kugel} wird mit der Ladung Q aufgeladen. Die Elementarladungen sammeln sich dicht unter der Kugeloberfläche, so dass das Innere der Kugel ladungsfrei ist.

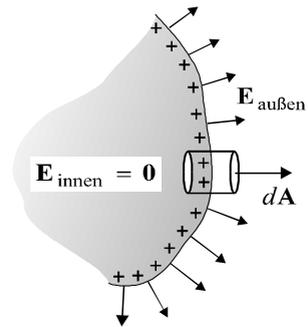


Abb. 17.4-3 Φ_E wird für eine kleine Dose berechnet, deren Stirnflächen parallel zum elektrischen Außenfeld sind. Der Gaußsche Satz liefert $E = \sigma/\epsilon_0$.

⁸ Die elektrischen Felder in Gl. (17.3-11) und (17.4-7) unterscheiden sich um einen Faktor 0,5. Der Grund dafür wird in Aufgabe 17-7 genannt.

Berechne das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ mit dem Gaußschen Satz

a) außerhalb der leitenden Kugel ($r \geq r_{\text{Kugel}}$)

b) innerhalb der leitenden Kugel ($r < r_{\text{Kugel}}$).

c) Jetzt wird eine *nichtleitende*, massive Kugel mit der Ladung Q *homogen* aufgeladen. Die Ladungsträger sind jetzt mit konstanter Ladungsdichte ρ im ganzen Kugelvolumen verteilt.

Berechne auch hier das elektrische Feld außerhalb und innerhalb der nichtleitenden Kugel.

Lösung:

a) Die Ladungen der leitenden Kugel sammeln sich direkt unter der Kugeloberfläche. Ihre Verteilung muss kugelsymmetrisch sein, da andernfalls eine Richtung im Raum ausgezeichnet wäre. Daher muss auch das elektrische Feld kugelsymmetrisch sein:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \cdot \mathbf{e}_r$$

mit \mathbf{e}_r = Einheitsvektor in radiale Richtung.

Die Integration zur Berechnung des Flusses Φ_E ist nur dann *einfach* durchzuführen, wenn die Integrationsfläche die Symmetrie des elektrischen Feldes wiedergibt. Daher muss eine konzentrische Kugel als Integrationsfläche A_{Int} gewählt werden.

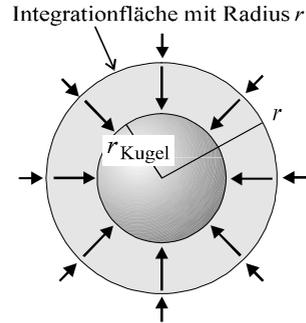


Abb. 17.4-4 Um die Metallkugel wird eine konzentrische, kugelförmige Integrationsfläche gelegt.

$$\oint_{A_{\text{Int}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{A_{\text{Int}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} \stackrel{E = \text{const auf der Integrationsfläche}}{=} E(r) \underbrace{4\pi r^2}_{\text{Kugelförmige Integrationsfläche}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{im Außenraum einer leitenden Kugel} \quad (17.4-8)$$

Beachte: Das elektrische Feld außerhalb der leitenden Kugel ist genauso groß wie das elektrische Feld einer Punktladung Q im Kugelmittelpunkt. Allgemein gilt: Alle kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen haben im Außenraum das elektrische Feld nach Gl. (17.4-8), wobei Q die Gesamtladung ist. Der Beweis dieser Aussage sieht wegen $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \cdot \mathbf{e}_r$ genauso aus wie der Beweis von Gl. (17.4-8).

b) Als Integrationsfläche wählen wir erneut eine konzentrische Kugel; der Radius r ist jetzt aber kleiner als r_{Kugel} .

$$\oint_{A_{\text{Int}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{A_{\text{Int}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} \stackrel{E = \text{const auf der Integrationsfläche}}{=} E(r) \cdot 4\pi r^2 \stackrel{\text{Die Integrationsfläche enthält keine Ladung.}}{=} 0$$

$$\Rightarrow E(r) = 0 \quad \text{im Innern einer leitenden Kugel} \quad (17.4-9)$$

Das Innere einer leitenden Kugel ist also nicht nur ladungsfrei, sondern auch stets feldfrei – in Übereinstimmung mit allgemeinen, früheren Überlegungen.

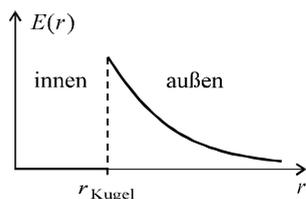


Abb. 17.4-5 Elektrisches Feld einer leitenden Kugel im Abstand r vom Kugelmittelpunkt.

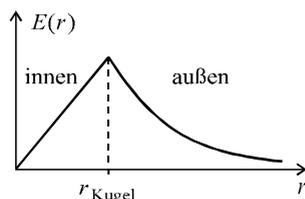


Abb. 17.4-6 Elektrisches Feld einer homogen geladenen, nichtleitenden Kugel.

c) Das Außenfeld der homogen geladenen, *nicht leitenden* Kugel wird ebenfalls durch Gl. (17.4-8) beschrieben. Das Innenfeld wird ebenfalls mit einer konzentrischen Kugel berechnet:

$$\oint_{A_{\text{Int}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{A_{\text{Int}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ E = \text{const auf der} \\ \text{Integrationsfläche} \end{matrix} \quad E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{r_{\text{Kugel}}^3}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{Kugel}}^3} r \quad \text{im Innern einer homogen geladenen Kugel} \quad (17.4-10)$$

Im Innern einer homogen geladenen Kugel steigt das elektrische Feld linear an. Nur die Ladungen, deren Abstand zum Kugelmittelpunkt kleiner als r ist, tragen zum Feld $E(r)$ bei.

Bemerkung: Coulombkraft und Gravitationskraft haben die gleiche Form. Daher ist die Erdanziehungskraft im Erdinnern proportional zur Entfernung vom Erdmittelpunkt, wenn man – in Gedanken – einen Tunnel zum Erdmittelpunkt gräbt. (Dabei wird eine homogene Massendichte im Erdinnern vorausgesetzt.) Diese Aussage haben wir in der Mechanik in Aufgabe „7-21 Schwingung nach Australien und zurück“ benötigt.

Beispiel 17.4-4 Elektrisches Feld eines langen, geladenen Leiters oder Zylinders

Berechne das elektrische Feld eines langen, geraden Leiters oder eines langen Zylinders, der auf der z -Achse liegt und homogen mit konstanter Längenladungsdichte $\lambda := Q/l$ geladen ist.

Hinweis: Der Leiter bzw. der Zylinder soll sehr lang sein, damit die Inhomogenitäten des elektrischen Feldes an den zwei Enden vernachlässigt werden können.

Lösung:

Aus Symmetriegründen muss das elektrische Feld rotationssymmetrisch um den Leiter sein:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \cdot \mathbf{e}_r \quad \text{mit } \mathbf{e}_r = \text{Einheitsvektor in radiale Richtung.}$$

Daher ist es sinnvoll, die Oberfläche eines Zylinders mit Radius r und Länge l , dessen Symmetrieachse auf dem Leiter liegt, als Integrationsfläche zu wählen.

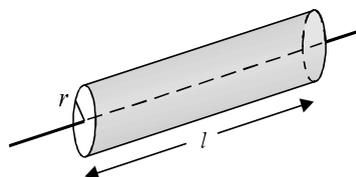


Abb. 17.4-7 Wir integrieren über einen konzentrischen Zylindermantel mit Länge l und Radius r .

$$\oint_{A_{\text{Zylinder}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{A_{\text{Zylinder}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{E steht senkrecht auf den Normalen-} \\ \text{vektoren der zwei Grundflächen}}}{=} \int_{A_{\text{Mantel}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} =$$

$$= \int_{A_{\text{Mantel}}} E(r) dA = E(r) \underbrace{2\pi r l}_{\text{Mantelfläche}} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{im Außenraum eines langen, homogen geladenen Zylinders (17.4-11)}$$

Beispiel 17.4-5 Feld einer homogen geladenen, sehr großen, ebenen, dünnen Platte

Eine ebene, sehr großflächige, dünne Platte ist homogen mit konstanter Flächenladungsdichte $\sigma := Q/A$ geladen. Berechne das elektrische Feld mit dem Gaußschen Satz.

Hinweis: Die Platte soll sehr großflächig sein bzw. das Feld soll in einer Entfernung von der Platte berechnet werden, die wesentlich kleiner ist als Breite und Höhe der Platte. Dann können die Inhomogenitäten des elektrischen Feldes an den Plattenrändern vernachlässigt werden.

Lösung:

Nach früheren Überlegungen in diesem Abschn. 17.4 muss das elektrische Feld senkrecht zur Platte stehen.

Wegen der homogenen Flächenladung und der (theoretisch) unendlichen Ausdehnung der Platte ist kein Punkt auf der Platte ausgezeichnet. Daher darf sich das elektrische Feld nicht ändern, wenn wir uns parallel zur Platte bewegen – mit konstantem Abstand zur Platte. Das Feld kann also nur von der Entfernung r zur Platte abhängen – wenn überhaupt.

Wir wählen als Integrationsfläche die Oberfläche eines Quaders mit den Maßen $a, b, 2r$. Die beiden Stirnflächen der Größe $a b$ haben denselben Abstand r von der geladenen Platte, damit der Betrag $E(r)$ auf beiden Flächen mit Sicherheit gleich groß ist. Ein Fluss tritt nur in den beiden Stirnflächen $a b$ auf.

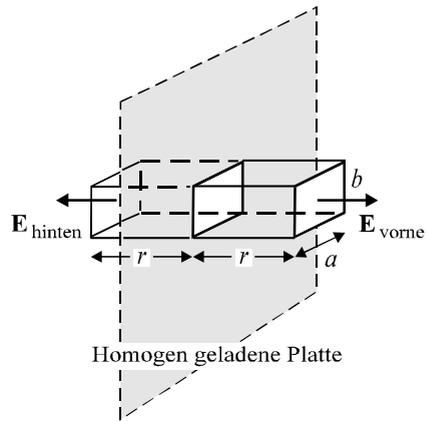


Abb. 17.4-8 Homogen geladene, große, ebene Platte.

$$\oint_{A_{\text{Quader}}} \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{A} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{E steht senkrecht} \\ \text{auf den Seitenflächen}}}{=} \int_{A_{\text{Stirnflächen}}} \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{A} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{E ist parallel zu den} \\ \text{Flächennormalen der Stirnflächen}}}{=} \int_{A_{\text{Stirnflächen}}} E(r) dA \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ E_{\text{vorne}} = E_{\text{hinten}}}}{=} E(r) 2ab = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma ab}{\epsilon_0}$$