

Mathematik

# Einführung in partielle Differential- gleichungen

für die Studiengänge  
der Ingenieur- und  
Naturwissenschaften

3. Auflage

Norbert Hungerbühler

Weitere aktuelle vdf-Publikationen  
finden Sie in unserem **Webshop:**

**vdf.ch**

- › Bauwesen
- › Naturwissenschaften,  
Umwelt und Technik
- › Informatik, Wirtschafts-  
informatik und Mathematik
- › Wirtschaft
- › Geistes- und Sozialwissen-  
schaften, Interdisziplinäres,  
Militärwissenschaft,  
Politik, Recht

Gerne informieren wir Sie regelmässig per  
E-Mail über unsere Neuerscheinungen.

**Newsletter abonnieren**

[Anmeldung auf vdf.ch](#)



# **Einführung in partielle Differential- gleichungen**



**3. Auflage**



**v/d/f**

vdf Hochschulverlag AG  
an der ETH Zürich

Norbert Hungerbühler

# **Einführung in partielle Differential- gleichungen**

**für die Studiengänge  
der Ingenieur- und  
Naturwissenschaften**



**3. Auflage**

Departement Mathematik  
Eidgenössische Technische Hochschule  
Zürich

### **Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese  
Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;  
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet  
über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.



Das Werk einschliesslich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ausserhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen System

ISBN 978-3-7281-4131-6 (Printausgabe)  
ISBN 978-3-7281-4132-3 (E-Book)  
DOI-Nr. 10.3218/4132-3

1. Auflage 1997  
2., durchgesehene Auflage 2011  
**3., überarbeitete Auflage 2022**

© vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich

[www.vdf.ethz.ch](http://www.vdf.ethz.ch)  
[verlag@vdf.ethz.ch](mailto:verlag@vdf.ethz.ch)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort zur dritten Auflage</b>	<b>VII</b>
<b>1 Einführung in partielle Differentialgleichungen</b>	<b>1</b>
1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	1
1.2 Partielle Differentialgleichungen . . . . .	2
1.3 Klassifizierungen von PDEs . . . . .	4
1.3.1 Klassifizierung nach der Ordnung . . . . .	4
1.3.2 Klassifizierung nach Typen . . . . .	4
1.4 Quasilineare PDEs erster Ordnung in zwei Variablen . . . . .	5
1.5 Verfeinerte Klassifikation linearer PDEs zweiter Ordnung . . . . .	9
1.6 Das Superpositionsprinzip . . . . .	11
Übungsaufgaben zum Kapitel 1 . . . . .	12
<b>2 Fourier-Reihen</b>	<b>13</b>
2.1 Orthogonalitätsrelationen trigonometrischer Funktionen . . . . .	15
2.2 Fourier-Reihe $2\pi$ -periodischer Funktionen . . . . .	16
2.3 Fourier-Reihen gerader und ungerader Funktionen . . . . .	17
2.4 Fourier-Reihe von Funktionen allgemeiner Periode . . . . .	19
2.5 Entwicklung in reine Sinus- oder Cosinus-Reihen . . . . .	21
2.6 Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihen . . . . .	22
2.7 Distributionen . . . . .	24
2.8 Diskrete Fourier-Transformation (DFT) . . . . .	32

2.8.1	Die Trapezregel . . . . .	32
2.8.2	Approximation der Fourier-Koeffizienten . . . . .	35
2.8.3	Trigonometrische Interpolation . . . . .	36
2.8.4	Schnelle Fourier-Transformation (FFT) . . . . .	37
2.9	Ergänzung: Das Gibbs-Phänomen . . . . .	39
	Übungsaufgaben zum Kapitel 2 . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Die Wärmeleitungsgleichung</b>	<b>47</b>
3.1	Herleitung der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	47
3.2	Wärmeleitung im geschlossenen Draht . . . . .	50
3.2.1	A priori Abschätzungen . . . . .	53
3.3	Wärmeleitung in einer Wand . . . . .	55
3.4	Wärmeleitung in einer Kugel . . . . .	57
	Übungsaufgaben zum Kapitel 3 . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Das Fourier-Integral</b>	<b>63</b>
4.1	Definition der Fourier-Transformation . . . . .	63
4.2	Der Fouriersche Integralsatz . . . . .	64
4.3	Fourier-Transformation und PDEs . . . . .	66
4.3.1	Lösung der Wellengleichung . . . . .	66
4.3.2	Rechenregeln für die Fourier-Transformation . . . . .	68
4.4	Das Sampling-Theorem von Shannon . . . . .	73
	Übungsaufgaben zum Kapitel 4 . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Die Laplace-Transformation</b>	<b>79</b>
5.1	Definition und Rechenregeln . . . . .	79
5.2	Anwendungen . . . . .	91
5.2.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	91
5.2.2	Partielle Differentialgleichungen . . . . .	94
5.3	Die Übertragungsfunktion . . . . .	95
5.3.1	Rechnen mit Übertragungsfunktionen . . . . .	98



---

5.3.2	Die Stossantwort . . . . .	100
5.3.3	Stabilität . . . . .	101
5.3.4	Die Faltung . . . . .	102
5.3.5	Rechenregeln für die Faltung . . . . .	104
5.4	Rücktransformation . . . . .	105
5.5	Die Gamma-Funktion . . . . .	107
	Übungsaufgaben zum Kapitel 5 . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Die Potentialgleichung</b> . . . . .	<b>111</b>
6.1	Randbedingungen . . . . .	111
6.2	Lösbarkeit von Dirichlet- und Neumann-Problemen . . . . .	112
6.3	Beispiele für Dirichlet-Probleme . . . . .	113
6.3.1	Potentialproblem für zwei konzentrische Kreiszyylinder . . . . .	113
6.3.2	Der Kugelkondensator . . . . .	115
6.3.3	Das Dirichlet-Problem auf der Kreisscheibe . . . . .	116
6.4	Mittelwertsatz und Maximumprinzip . . . . .	120
	Übungsaufgaben zum Kapitel 6 . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Einführung in die Variationsrechnung</b> . . . . .	<b>125</b>
7.1	Der Variationssatz . . . . .	125
7.2	Die Euler-Lagrange-Gleichung . . . . .	126
7.3	Dynamik: Das Prinzip der kleinsten Wirkung . . . . .	129
	Übungsaufgaben zum Kapitel 7 . . . . .	132
<b>8</b>	<b>Numerik der PDEs</b> . . . . .	<b>135</b>
8.1	Differenzenverfahren . . . . .	135
8.1.1	Das Verfahren von Richardson . . . . .	136
8.1.2	Das Gauss-Seidel-Relaxationsverfahren . . . . .	138
8.2	Die Methode der finiten Elemente . . . . .	141
8.2.1	Das Verfahren von Ritz . . . . .	141
8.2.2	Das Verfahren von Galerkin . . . . .	144

8.3	Taylor-Methoden . . . . .	144
	Übungsaufgaben zum Kapitel 8 . . . . .	145
<b>9</b>	<b>Die Poisson-Gleichung</b>	<b>147</b>
9.1	Allgemeine Lösungsstrategie . . . . .	147
9.2	Potential auf einer rechteckigen Platte . . . . .	148
9.3	Die Greensche Funktion des Poisson-Problems . . . . .	152
	Übungsaufgaben zum Kapitel 9 . . . . .	156
<b>10</b>	<b>Die Wellengleichung</b>	<b>159</b>
10.1	Die Methode von d'Alembert . . . . .	159
10.2	Die Charakteristiken hyperbolischer PDEs . . . . .	165
10.3	Beispiel einer hyperbolischen Gleichung . . . . .	166
10.4	Das Richardson-Verfahren für die Wellengleichung . . . . .	170
10.5	Die Charakteristikenmethode (Numerik) . . . . .	172
	Übungsaufgaben zum Kapitel 10 . . . . .	174
<b>11</b>	<b>Die Schwingungsgleichung</b>	<b>179</b>
11.1	Die eingespannte Saite . . . . .	180
11.2	Schwingungen einer rechteckigen Membran . . . . .	183
11.3	Fundamentalsatz über Schwingungsprobleme . . . . .	187
11.4	Diffusionsprobleme . . . . .	189
	Übungsaufgaben zum Kapitel 11 . . . . .	192
	<b>Lösungen der Übungsaufgaben</b>	<b>197</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>215</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>219</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>221</b>

# Vorwort zur dritten Auflage

Die vorliegende dritte Auflage des Buches orientiert sich an den aktuellen Syllabi der Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen in den Studiengängen der Natur- und Ingenieurwissenschaften. Zu den klassischen Themen gehören

1. Theorie der Fourier-Reihen und des Fourier-Integrals.
2. Partielle Differentialgleichungen als Modell von Zuständen und Vorgängen in kontinuierlichen Medien, Rand- und Anfangswertprobleme. Verschiedene Lösungsansätze, insbesondere Separation der Variablen.
3. Laplace-Transformation: Grundbegriffe, Rechenregeln sowie Anwendungen. Berücksichtigung numerischer Aspekte.

Daneben wurden moderne Teile aus der Theorie und den Anwendungen der partiellen Differentialgleichungen in den Stoff aufgenommen, die den Bedürfnissen einer zeitgemässen, fundierten Ausbildung entsprechen. Dazu gehören namentlich eine Einführung in die Theorie der Distributionen, Variationsrechnung, Greensche Funktionen und a priori Aussagen über Lösungen. Daneben hat auch der Begriff der Charakteristik einer partiellen Differentialgleichung seinen Platz in der Vorlesung erhalten. Die Theorie wird durch ein Kapitel über die Numerik der partiellen Differentialgleichungen komplettiert. Unter anderem wird auch die schnelle Fourier-Transformation besprochen.

Für die dritte Auflage wurden sämtliche Figuren neu erstellt und Tippfehler entfernt. Das Layout wurde modernisiert, der Text überarbeitet und zahlreiche Ergänzungen wurden angebracht. Farbe erleichtert jetzt die Orientierung und das Nachverfolgen der Argumente und Rechnungen.

Hinweise: Das Ende eines Beweises wird mit  $\square$  markiert. Sätze, Lemmata, Definitionen und Beispiele sind innerhalb jedes Kapitels durchgehend nummeriert, Figuren, Rechenregeln und Gleichungen sind separat nummeriert. Am Schluss jedes Kapitels befinden sich Aufgaben zum behandelten Stoff. Die Lösungen sind am Schluss des Buches gesammelt. Vektoren werden nicht besonders bezeichnet, weder durch Fettdruck noch durch einen Pfeil oder Unterstreichung.

## Dank

Ich möchte mich bei Jörg Waldvogel herzlich bedanken. Auf seiner Vorlage basiert der Abschnitt über die diskrete Fourier-Transformation. Weitere Teile des Buches stützen sich auf Manuskripte von Alfred Huber und Christian Blatter. An dieser Stelle möchte ich auch Norbert Bollow, Lutz Wilhelmy und Paolo Vanini erwähnen, denen ich zahlreiche inhaltliche Verbesserungen verdanke. Danke auch an Sébastien Garmier und Patrick Bütler, die einige Figuren beigesteuert haben. Die Assistenten der Gruppe 8 am Mathematikdepartement der ETH haben als Korrekturteam wesentlich dazu beigetragen, Tippfehler zu beseitigen. Auch meiner Frau, Ulrike, sei an dieser Stelle für den sprachlichen Feinschliff gedankt.

# Kapitel 1

## Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Warum betrachtet man partielle Differentialgleichungen (PDEs<sup>1</sup>) und wo kommen sie vor? Wir stellen zunächst in den Abschnitten 1.1 und 1.2 einen ersten Vergleich zwischen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen an.

### 1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Betrachten wir ein physikalisches System mit einer endlichen Zahl  $n$  von Freiheitsgraden. Der Momentanzustand des Systems zur Zeit  $t$  wird durch  $n$  Koordinaten

$$(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

beschrieben. Die Bewegungsgleichungen sind dann ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen.

#### Beispiel 1: Federpendel

Eine Masse  $m$  hängt an einer Feder mit Federkonstante  $f$  wie in Abbildung 1. Das zweite Newtonsche Gesetz (Kraft = Masse mal Beschleunigung) beschreibt dann die Dynamik des Systems. Die Auslenkung  $x(t)$  der Masse aus der Ruhelage gehorcht folgender Bewegungsgleichung:

$$\text{Differentialgleichung: } -fx = m\ddot{x}$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$$

Die Federkraft  $fx$  ist nach dem Hookeschen Gesetz proportional zur Auslenkung, und da die Kraft rücktreibend ist, wird sie mit dem Minuszeichen versehen. Die Anfangsposition der Masse zur Zeit  $t = 0$  ist  $x_0$ , die Anfangsgeschwindigkeit ist  $v_0$ .

<sup>1</sup>Spricht “pidi-iis”, vom englischen “Partial Differential Equations”.

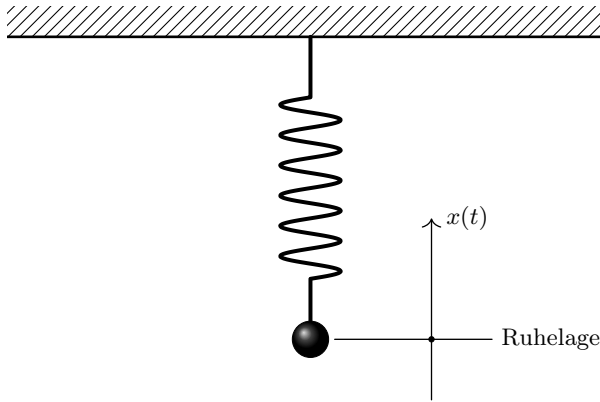


Abbildung 1: Federpendel

## 1.2 Partielle Differentialgleichungen

Schauen wir nun auf ein kontinuierliches physikalisches System, zum Beispiel eine schwingende Saite. Der Momentanzustand eines kontinuierlichen Systems wird durch Funktionen beschrieben, in diesem Fall durch die Auslenkung  $u(x, t)$  der Saite am Ort  $x$  zur Zeit  $t$  (siehe Abbildung 2).

### Beispiel 2: Schwingende Saite

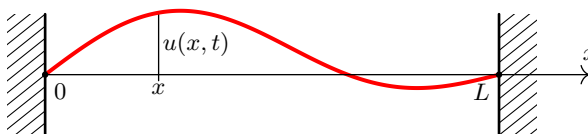
Die Bewegungsgleichungen der schwingenden Saite sind partielle Differentialgleichungen mit Anfangs- und Randbedingungen.

$$\text{PDE:} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\text{Anfangsbedingungen:} \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x).$$

$$\text{Randbedingungen:} \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$

Diese PDE heisst Wellengleichung. Wir werden sie im Kapitel 10 untersuchen. Die PDE ist 2. Ordnung in  $t$ , daher braucht man zwei Anfangsbedingungen. Die PDE ist 2. Ordnung in  $x$ , daher braucht man zwei Randbedingungen.

Abbildung 2: Schwingende Saite zur Zeit  $t$

Beispiel 3: Wärmeleitung in einer Platte  $P$ 

Die rechteckige Platte  $P$  mit Rand  $\partial P$  ist in Abbildung 3 dargestellt. Zur Zeit  $t = 0$  ist die Temperatur  $u$  der Platte im Punkt  $(x, y)$  beschrieben durch eine Funktion  $u_0(x, y)$ . Der Rand der Platte wird während des Experiments geheizt oder gekühlt und zwar so, dass in einem Randpunkt  $(x, y)$  zur Zeit  $t$  die Temperatur  $f(x, y, t)$  herrscht. Die Frage ist dann, wie sich die Temperatur in der Platte im Laufe der Zeit entwickelt. Mathematisch wird die Wärmeleitung in  $P$  beschrieben durch:

$$\text{PDE:} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) =: a^2 \Delta u$$

$$\text{Anfangsbedingung:} \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in P$$

$$\text{Randbedingung:} \quad u(x, y, t) = f(x, y, t) \quad \text{für } (x, y) \in \partial P$$

Hierbei bezeichnet  $u(x, y, t)$  die Temperatur im Punkt  $(x, y)$  zur Zeit  $t$ . Die Zahl  $a$  ist eine Materialkonstante. Wir werden die Wärmeleitungsgleichung im Kapitel 3 behandeln. Die PDE ist von 1. Ordnung in  $t$ , daher braucht man eine Anfangsbedingung, von 2. Ordnung in  $x$ , daher braucht man zwei Randbedingungen für jedes  $(y_0, t)$  und von 2. Ordnung in  $y$ , daher braucht man zwei Randbedingungen für jedes  $(x_0, t)$ .

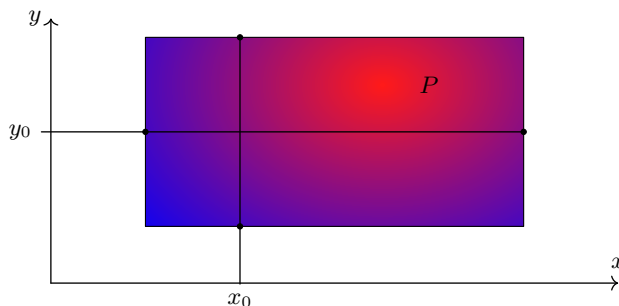


Abbildung 3: Wärmeleitung in einer Platte. Die Temperatur  $u(x, y, t)$  zur Zeit  $t$  ist hier durch einen Farbcode dargestellt: blau bedeutet kalt, rot bedeutet heiss.

Beispiel 4: Potentialgleichung im Gebiet  $G$ 

Das elektrostatische Potential in einem Gebiet  $G$ , an dessen Rand  $\partial G \subset \mathbb{R}^2$  die elektrische Spannung  $\varphi$  angelegt ist, wird beschrieben durch:

$$\text{PDE:} \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } G$$

$$\text{Randbedingung:} \quad u(x, y) = \varphi(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \partial G$$

Die beschriebene Situation entspricht einem elektrischen Kondensator. Den Laplace-Operator  $\Delta$  werden wir später kennenlernen. Die Potentialgleichung wird im Kapitel 6 untersucht.

Wie viele und welche Rand- oder Anfangsbedingungen an eine PDE gestellt werden müssen, um eine eindeutige Lösung zu erhalten, ist nicht immer offensichtlich. Heuristische (wie in den obigen Beispielen) oder physikalische Überlegungen helfen jedoch meistens, diese Frage zu entscheiden.

## 1.3 Klassifizierungen von PDEs

PDEs können nach verschiedenen Kriterien klassifiziert werden.

### 1.3.1 Klassifizierung nach der Ordnung

Die **Ordnung einer PDE** ist (wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen) als die höchste auftretende Ableitung definiert. So ist etwa die Wärmeleitungsgleichung im Beispiel 3 von 2. Ordnung.

### 1.3.2 Klassifizierung nach Typen

Man unterscheidet:

**Homogene lineare PDEs:** zum Beispiel

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad au_t + bu_x = 0, \dots$$

Jeder Summand enthält  $u$  oder partielle Ableitungen von  $u$  in der 1. Potenz.

**Inhomogene lineare PDEs:** zum Beispiel

$$\Delta u = f \quad (f \text{ eine gegebene Funktion}), \dots$$

Ein Summand ist frei von  $u$  und partiellen Ableitungen von  $u$ ; wenn man diesen Summanden entfernt respektive null setzt, bleibt eine homogene lineare PDE übrig. Der betreffende Summand kann beispielsweise eine Wärmequelle, ein externes Feld oder Ähnliches beschreiben.

**Nichtlineare PDEs:** Das sind alle übrigen PDEs. Sie stellen ein mathematisch anspruchsvolles Gebiet dar. Es gibt keine „geschlossene“ Theorie dieser PDEs, aber über viele der wichtigen Gleichungen existiert eine umfangreiche Literatur.

Ganz analog unterscheidet man homogene lineare, inhomogene lineare und nichtlineare Anfangs- und Randbedingungen:

#### Beispiel 5: Randbedingungen

Eine PDE (etwa die Potentialgleichung  $\Delta u = 0$ ) soll in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  mit Rand  $\partial\Omega$  gelöst werden (siehe Abbildung 4). Auf dem Rand kann man zum Beispiel verlangen:



- (i)  $u(x, y, z) = 0$  (homogen, linear) oder
- (ii)  $u(x, y, z) = f(x, y, z)$  (inhomogen, linear) oder
- (iii)  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  (homogen linear) oder
- (iv)  $\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = f$  (inhomogen linear) usw.

Bei Vorgabe der Werte auf dem Rand (wie etwa in (i) und (ii) oben) spricht man von **Dirichlet-Randdaten**, bei Vorgabe der Normalenableitung wie in (iii) von **Neumann-Randdaten**. Auch **gemischte Randdaten** wie etwa in (iv) treten auf. Bei anderen Beispielen kommen auch Randbedingungen der Form

- (v)  $u(x, t) = u(x + L, t)$  (homogen, linear) oder
- (vi)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0$  (homogen, linear)

usw. vor.

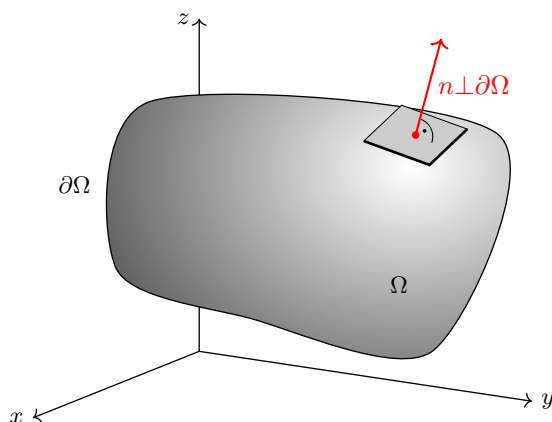


Abbildung 4: Neumann Randbedingung

## 1.4 Quasilineare PDEs erster Ordnung in zwei Variablen

Diese Gleichungen sind von der Form

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u). \quad (1)$$

Dabei ist  $u(x, y)$  die gesuchte Funktion und wir verwenden die Kurzschreibweise

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y := \frac{\partial u}{\partial y}$$

für die partiellen Ableitungen. Die Funktionen  $a, b$  und  $c$  sind gegeben. Eine Lösung  $u(x, y)$  von (1) kann als Fläche  $z = u(x, y)$  (die sogenannte **Integralfläche**) in  $\mathbb{R}^3$  aufgefasst werden (siehe Abbildung 5).

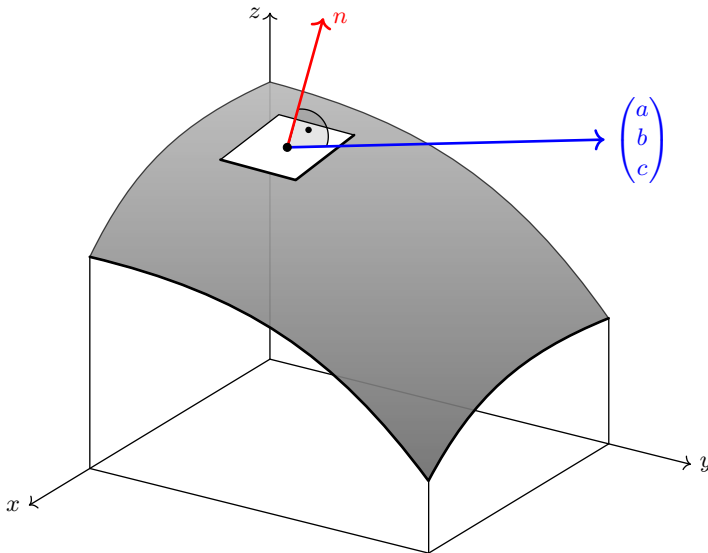


Abbildung 5: Dargestellt ist die graue Integralfläche  $z = u(x, y)$  und ein Stücklein der Tangentialebene in einem Punkt der Fläche, zusammen mit dem Normalenvektor  $n$  und dem Tangentialvektor  $(a, b, c)^\top$ .

Die Gleichung der Integralfläche lautet

$$\varphi(x, y, z) := u(x, y) - z = 0.$$

Die Normale  $n$  auf die Integralfläche können wir demnach schreiben als

$$n = \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wegen Gleichung (1) gilt in jedem Punkt der Integralfläche für das Skalarprodukt

$$n \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = au_x + bu_y - c = 0,$$

das heisst, der Vektor  $(a, b, c)^\top$  ist in jedem Punkt der Integralfläche ein Tangentialvektor der Fläche. Oder anders gesagt, die Vektoren  $(a, b, c)^\top$  bilden ein tangentiales Vektorfeld auf der Integralfläche. Interessant sind nun die Kurven auf der Integralfläche, welche tangential an dieses Vektorfeld verlaufen:

**Definition 6: Charakteristische Kurve**

Eine Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto \gamma(t)$  heisst **charakteristische Kurve** (oder **Charakteristik**) der Gleichung (1), wenn sie Integralkurve des Vektorfeldes

$$\begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix}$$

ist, das heisst, wenn gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} a(\gamma(t)) \\ b(\gamma(t)) \\ c(\gamma(t)) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Aufgrund unserer Betrachtungen vermuten wir das folgende Lemma:

**Lemma 7: Charakteristik auf einer Integralfäche**

Falls eine Charakteristik einen Punkt mit der Integralfäche gemeinsam hat, so liegt sie ganz in der Integralfäche.

*Beweis.* Sei  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  die charakteristische Kurve. Man betrachte die Funktion  $\varphi(\gamma(t)) = u(x(t), y(t)) - z(t)$ . Dann gilt für ihre Ableitung nach  $t$

$$\dot{\varphi} = u_x \dot{x} + u_y \dot{y} - \dot{z} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \dot{\gamma} = 0.$$

Wenn also  $\varphi(\gamma(t_0)) = 0$  ist, so gilt  $\varphi(\gamma(t)) = 0$  für alle  $t$ . □

Nun wird klar, wie man die Nebenbedingung zur Gleichung (1) zu stellen hat: Auf jeder Charakteristik darf (und muss) man genau einen Punkt vorgeben. Wir erhalten daher den folgenden Satz:

**Satz 8: Parameterdarstellung der Integralfäche**

Sei  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $s \mapsto \Gamma(s)$ , eine vorgegebene Kurve auf der Integralfäche, welche die Charakteristiken transversal schneidet (das heisst, der Winkel zwischen den Kurven ist in den Schnittpunkten nie null). Ferner sei für jedes  $s$  die Kurve  $\gamma_s(t)$  eine Charakteristik mit  $\gamma_s(0) = \Gamma(s)$ . Dann ist

$$(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$$

eine Parameterdarstellung der Integralfäche in der Umgebung von  $\Gamma$  (siehe Abbildung 6).

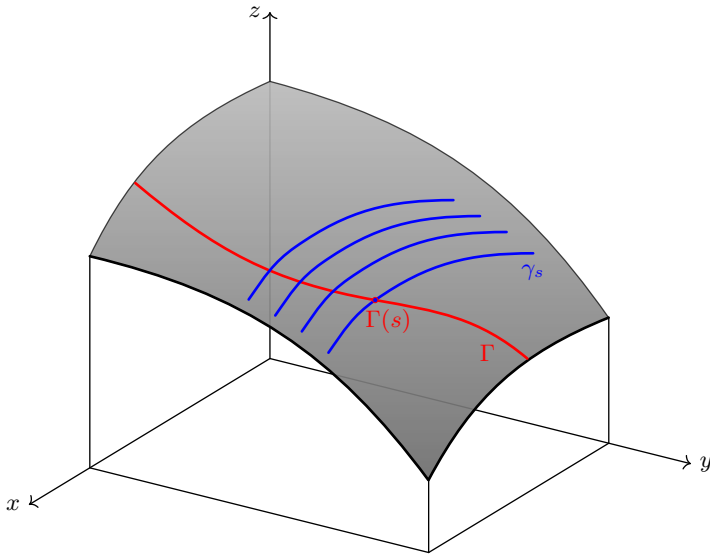


Abbildung 6: Die blaue Charakteristik  $\gamma_s$  auf der Integralfäche schneidet die vorgegebene rote Kurve  $\Gamma$  im Punkt  $\Gamma(s)$ .

### Beispiel 9: Charakteristikenmethode zur Lösung einer PDE 1. Ordnung

Man löse die PDE

$$\begin{cases} xu_x - yu_y = xyu \\ u(1, y) = y^2 \quad \text{für } 1 \leq y \leq 2. \end{cases} \quad (3)$$

Die Charakteristiken  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  sind einfach zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \dot{x} = x & \Rightarrow x = c_1 e^t \\ \dot{y} = -y & \Rightarrow y = c_2 e^{-t} \\ \dot{z} = xyz = c_1 c_2 z & \Rightarrow z = c_3 e^{c_1 c_2 t} \end{aligned}$$

Die Nebenbedingung schreiben wir so:

$$\Gamma: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s \mapsto (1, s, s^2)$$

ist die durch die Nebenbedingung gegebene Kurve auf der Integralfäche. Es muss also gelten

$$\gamma_s(0) = (c_1, c_2, c_3) \stackrel{!}{=} (1, s, s^2) = \Gamma(s).$$

Somit erhalten wir

$$\gamma_s(t) = (e^t, s e^{-t}, s^2 e^{st}) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)).$$

Wir eliminieren aus dieser Parameterdarstellung noch  $s$  und  $t$  und erhalten

$$z = u(x, y) = x^2 y^2 x^{xy}.$$

Man beachte, dass diese Lösung nicht für alle  $(x, y)$  einen Sinn hat, sondern nur für diejenigen  $(x, y)$ , welche durch die Charakteristiken erreicht werden. In unserem Beispiel ist also die Lösung nur in dem Gebiet zwischen den Kurven

$$\gamma_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \left(x, \frac{1}{x}\right), \text{ und } \gamma_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \left(x, \frac{2}{x}\right),$$

festgelegt (siehe Abbildung 7).

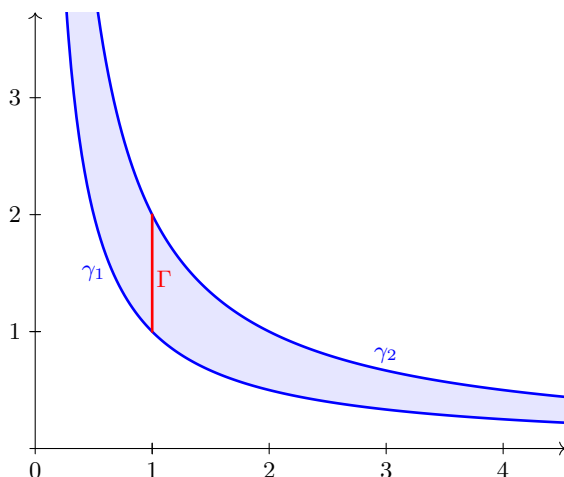


Abbildung 7: Nur das blaue Lösungsgebiet wird von den Charakteristiken erreicht. Nur dort ist somit die Lösung durch die Nebenbedingung festgelegt.

Das Verfahren der Charakteristiken reduziert also die quasilineare PDE auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (eben die Gleichung der Charakteristiken (2)). Es lässt sich erweitern auf allgemeine PDEs 1. Ordnung, das heisst auf Gleichungen vom Typ

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0,$$

jedoch nicht auf PDEs höherer Ordnung.

## 1.5 Verfeinerte Klassifikation von linearen PDEs zweiter Ordnung

Die allgemeine Form einer linearen homogenen PDE 2. Ordnung ist

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u = 0 \quad (4)$$

mit symmetrischen<sup>2</sup> Koeffizienten  $a_{ij} = a_{ij}(x_1, \dots, x_n) = a_{ji}$  sowie Koeffizienten  $b_i = b_i(x_1, \dots, x_n)$  und  $c = c(x_1, \dots, x_n)$ . Die Gleichung (4) heisst dann

- (a) **elliptisch**, wenn die Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $(a_{ij})$  entweder alle positiv oder alle negativ sind, das heisst alle  $\lambda_i > 0$  oder alle  $\lambda_i < 0$ ,
- (b) **hyperbolisch**, wenn die Matrix  $(a_{ij})$  sowohl positive als auch negative Eigenwerte  $\lambda_i$  hat (jedoch kein  $\lambda_i = 0$ ), das heisst  $\lambda_i > 0$  für  $i = 1, \dots, k$  und  $\lambda_i < 0$  für  $i = k + 1, \dots, n$  für ein  $k$  mit  $1 \leq k < n$ , oder
- (c) **parabolisch**: Parabolische Gleichungen erkennt man daran, dass eine der Variablen (normalerweise die Zeit  $t$ ) dadurch ausgezeichnet ist, dass nach dieser Variable nur einmal abgeleitet wird, nach den andern Variablen jedoch zweimal. Eine solche Gleichung der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u$$

heisst dann parabolisch, falls alle Eigenwerte der Matrix  $(a_{ij})$  positiv sind.

Da die  $a_{ij}$  im allgemeinen von  $x_1, \dots, x_n$  abhängen, ist auch der Typ vom Punkt  $(x_1, \dots, x_n)$  abhängig: So ist z.B. die Tricomische Gleichung  $yu_{xx} + u_{yy} = 0$  elliptisch in der Halbebene  $y > 0$  und hyperbolisch für  $y < 0$ .

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass der Typ durch eine Variablentransformation (etwa der Übergang von kartesischen in Polarkoordinaten) nicht verändert wird (deshalb hat die Einteilung überhaupt einen Sinn).

Als Faustregel kann man sich Folgendes merken:

- Elliptische PDEs brauchen Randbedingungen.
- Parabolische PDEs brauchen Anfangsbedingungen für die Werte sowie Randbedingungen.
- Hyperbolische PDEs brauchen Anfangsbedingungen für die Werte und für die Ableitungen sowie Randbedingungen.

Die typischen Beispiele sind:

- (a) elliptische PDE:

$$\Delta u = 0 \quad (\text{Laplace-Gleichung})$$

$$\Delta u = f \quad (\text{Poisson-Gleichung})$$

- (b) hyperbolische PDE:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad (\text{Wellengleichung})$$

---

<sup>2</sup>Falls die Koeffizienten  $a_{ij}$  noch nicht symmetrisch sind, kann man sie symmetrisch machen, indem man sie durch  $\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$  ersetzt.

(c) parabolische PDE:

$$u_t = a^2 \Delta u \quad (\text{Wärmeleitungsgleichung})$$

Man beachte, dass im parabolischen und im hyperbolischen Fall das  $(x, t)$ -Gebiet, in dem die Lösung gesucht wird, in  $t$ -Richtung unbeschränkt ist. Das heisst, man sucht die Lösung für alle Zeiten  $t > 0$ .

Nach dieser ermüdenden Klassifikation wollen wir uns nun schleunigst nach Lösungsmethoden für lineare PDEs umschaun!

## 1.6 Das Superpositionsprinzip

Als Erstes lernen wir das **Superpositionsprinzip** kennen.

### Satz 10: Superpositionsprinzip

Genügen  $u_0, u_1, \dots$  derselben homogenen linearen PDE sowie denselben homogenen linearen Nebenbedingungen, so besitzt auch die Reihe

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i u_i \quad (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

(sofern sie konvergiert) diese Eigenschaft.

Für inhomogene Probleme gilt dieser Satz natürlich nicht!

### Beispiel 11: zum Superpositionsprinzip Satz 10

Für  $n \in \mathbb{N}$  genügen die Funktionen

$$u_n(x, t) := \sin(nx)e^{-nt} \quad (0 \leq x \leq \pi, t > 0)$$

der homogenen linearen PDE

$$u_{xx} + u_{tt} = 0$$

und den homogenen Randbedingungen

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0 & (t > 0) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0. \end{cases}$$

Folglich hat auch die Funktion

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} u_n(x, t)$$

diese Eigenschaft. Schauen wir nach, welche Anfangsbedingung durch  $u$  erfüllt wird:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx) = \frac{1}{12}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x).$$