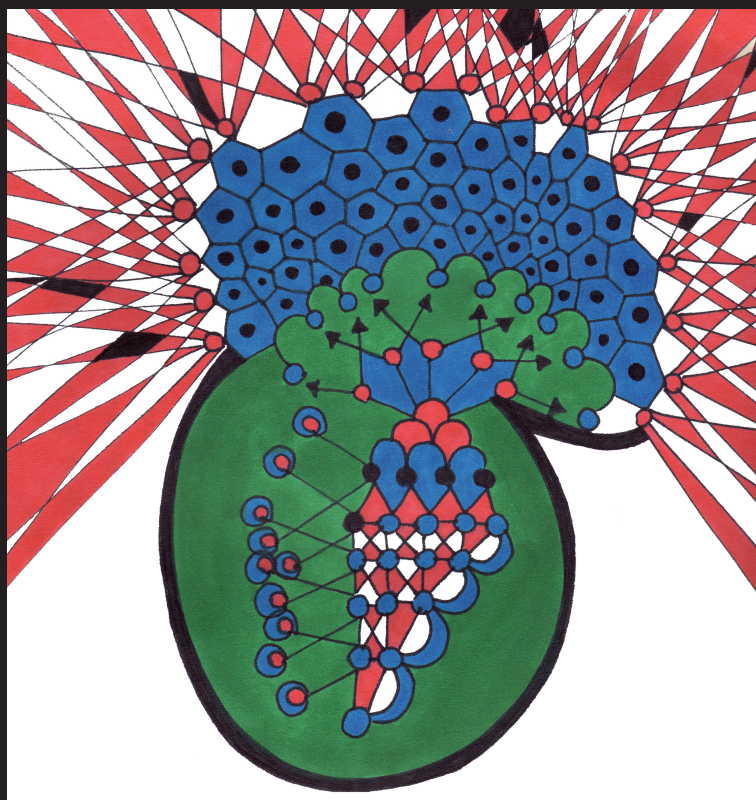


MATEMÁTICA ESTRUCTURAL



ANDRÉS FORERO CUERVO

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes

MATEMÁTICA ESTRUCTURAL

ANDRÉS FORERO CUERVO

MATEMÁTICA ESTRUCTURAL

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
BOGOTÁ, DC
2009

Forero Cuervo, Andrés

Matemática estructural / Andrés Forero Cuervo. – Bogotá: Universidad de los Andes, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Ediciones Uniandes, 2009.
p. 344; 170 x 240 cm.

ISBN 978-958-695-452-5

1. Matemáticas - Fundamentos 2. Matemáticas – Enseñanza superior 3. Lógica simbólica y matemática – Enseñanza superior I. Universidad de los Andes (Colombia). Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas II. Tít.

CDD 510.711

SBUA

© Andrés Forero Cuervo
aforeroc@uci.edu

© Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Dirección: Carrera 1ª No. 18A-10
Teléfono: 3 32 43 40
Bogotá DC, Colombia

Ediciones Uniandes
Carrera 1ª No. 19-27, edificio AU 6
Bogotá DC, Colombia
Teléfono: 3 39 49 49 – 3 39 49 99, ext. 2133. Fax: ext. 2158
<http://libreria.uniandes.edu.co>
infeduni@uniandes.edu.co

ISBN: 978-958-695-452-5

Edición, diseño gráfico, diagramación y tipografía: Nicolás Vaughan

Ilustraciones de carátula e interiores: Andrea Solano
andresoli3@yahoo.com

Diseño de la carátula: Juan David Martín

Impresión y acabados: Editorial Kimpres Ltda.
Dirección: Calle 16 sur No. 69C-17
Bogotá DC, Colombia
Teléfono: 4 13 68 84. Fax: 2 90 75 39

Impreso en Colombia – Printed in Colombia

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida ni en su todo ni en sus partes, ni registrada ni o transmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electro-óptico, por fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo por escrito de la editorial.

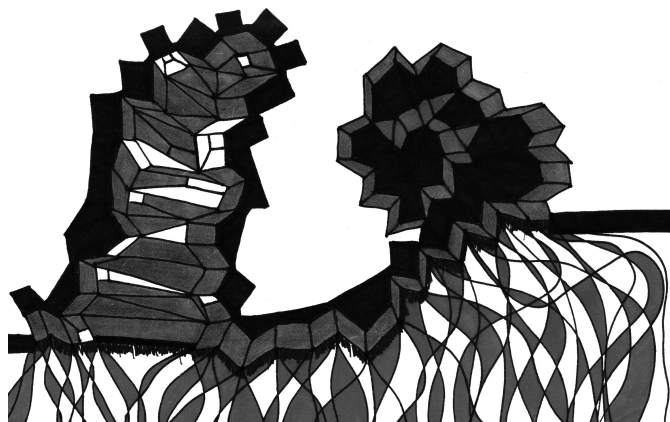
A Alejandro

Índice

Introducción	xi
Agradecimientos	xvii
1 Conjuntos	1
1.1. Conceptos fundamentales	2
1.2. Propiedades de la relación $\subseteq$ y el conjunto potencia	15
1.3. Operaciones básicas entre conjuntos	23
1.4. Álgebra de conjuntos: pruebas sin doble inclusión	41
1.5. Unión e intersección generalizadas	48
1.6. Producto cartesiano	55
Proyecto	61
Lecturas adicionales	63
2 Inducción: los números naturales	65
2.1. El Principio del Buen Orden	66
2.2. Demostraciones por inducción	71
2.3. Definiciones por recursión	83
2.4. Isomorfismos entre estructuras ordenadas	90
2.5. Conteo mediante inducción	95
Proyecto	103
Lecturas adicionales	108
3 Divisibilidad: los números enteros	109
3.1. Conceptos fundamentales y el Algoritmo de la División	110
3.2. El máximo común divisor	115
3.3. El Teorema Fundamental de la Aritmética	124
3.4. Sucesiones finalmente nulas y el TFA	132
3.5. Congruencias y el Pequeño Teorema de Fermat	138
3.6. El Teorema Chino del Residuo	151
Proyecto	161
Lecturas adicionales	164
4 Relaciones y funciones	165
4.1. Relaciones	166
4.2. Clausura de una relación	179
4.3. Funciones	186

4.4.	Relaciones de equivalencia	205
4.5.	Construcción de los números enteros y los racionales	222
4.6.	Conteo mediante relaciones de equivalencia	234
	Proyecto	240
	Lecturas adicionales	242
5	Cardinales	243
5.1.	Conceptos fundamentales	243
5.2.	El Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein	248
5.3.	Conjuntos finitos	252
5.4.	Conjuntos enumerables	255
5.5.	Conjuntos infinitos no enumerables	264
	Proyecto	270
	Lecturas adicionales	272
6	Estructuras matemáticas	275
6.1.	Conceptos fundamentales	276
6.2.	Grupos	283
6.3.	Isomorfismos entre estructuras	288
	Proyecto	293
	Lecturas adicionales	295
A	Lógica	297
A.1.	Lógica proposicional	297
A.2.	La implicación	301
A.3.	Demostraciones	302
A.4.	Lógica de predicados	306
	Bibliografía	313
	Índice analítico	315
	Índice de símbolos	321

INTRODUCCIÓN



Este libro constituye una introducción rigurosa a las matemáticas, partiendo del estudio de los conjuntos como pilar fundamental. Se cubren diversos temas como la teoría intuitiva de conjuntos, la inducción matemática, el conteo, la divisibilidad y las congruencias, las relaciones y funciones, los órdenes, las relaciones de equivalencia y la relación de equipotencia entre conjuntos. Además, se introduce el concepto de isomorfismo, noción que formaliza la idea de similitud estructural.

Este libro está dirigido a aquellos estudiantes universitarios que comienzan su carrera de matemática pura, y desean aprender a demostrar de manera rigurosa proposiciones matemáticas y entender los conceptos básicos que fundamentan el desarrollo de la matemática moderna. Sin embargo, el texto también puede ser utilizado en otros contextos como, por ejemplo, en cursos de matemáticas discretas para estudiantes de economía, física o ingenierías, o en los últimos cursos de aquellos colegios que prioricen la enseñanza significativa y rigurosa de las matemáticas.

Además de esto, el autor ofrece el libro a aquellos “matemáticos frustrados” que siempre quisieron profundizar más en la reina de las ciencias y que por diversas razones no han podido hacerlo. Este libro pretende ser para ellos la puerta de entrada definitiva al universo de los patrones y las estructuras.

PRERREQUISITOS

Esperamos que el lector esté familiarizado con temas matemáticos básicos de la escuela secundaria como, por ejemplo, aritmética, fracciones, valor absoluto, álgebra y factorización. No se necesitan nociones de geometría, trigonometría, álgebra lineal ni cálculo infinitesimal para leer este libro. Tampoco se requiere que el lector sepa hacer demostraciones matemáticas; precisamente uno de los objetivos del texto es enseñar ello al estudiante. Sin embargo, para facilitar esta tarea, se espera que el lector tenga un dominio de ciertas nociones básicas de lógica como, por ejemplo, tablas de verdad, conectivos proposicionales, cuantificadores —existencial y universal—, propiedades lógicas, teorema, hipótesis, conclusión, equivalencias y simbolización lógica. Por ello hemos incluido un apéndice al final del texto, el cual incluye varios ejercicios con los cuales el lector podrá familiarizarse en dichos temas.

LÓGICA

Se espera que el lector tenga un dominio de algunas nociones básicas de lógica proposicional para comprender este texto. Para asegurarse de que este sea el caso, recomendamos fuertemente que el lector estudie el Apéndice A que se incluye al final, antes de comenzar la lectura de los capítulos.

Vale aclarar que este libro *no* consiste en un estudio sobre lógica formal o lógica matemática; la lógica será utilizada a lo largo de él como una herramienta básica para entender y deducir proposiciones matemáticas.¹

LECTURA DEL TEXTO

Es recomendable una lectura ordenada y completa de todos los capítulos del texto. Sin embargo, según las necesidades o intereses del estudiante, o del instructor que diseñe un curso de matemáticas que utilice este texto como guía, es posible prescindir del estudio de algunas de las partes de este texto. En particular, el autor considera que las siguientes secciones *no* son estrictamente esenciales para un entendimiento básico del tema: 1.5, 1.7, 2.5, 2.6, 3.4, 3.6, 3.7, 4.2, 4.5, 4.6, 4.7, 5.6 y 6.2.

A continuación se describirán brevemente los temas tratados en los diferentes capítulos de este texto:

¹A quien esté interesado en un estudio de la lógica matemática, le recomendamos consultar [1]. (La bibliografía la encontrará el lector al final de este libro.)

CAPÍTULO 1: CONJUNTOS

Estudiaremos las nociones de pertenencia ($\in$) y continencia ($\subseteq$) de conjuntos, estableciendo el método de doble inclusión para demostrar la igualdad entre conjuntos. Además, estudiaremos el conjunto vacío ($\emptyset$) y el conjunto potencia para cualquier conjunto A ($\mathcal{P}(A)$), y analizaremos la Paradoja de Russell. Después introduciremos las operaciones básicas entre conjuntos (unión, intersección, diferencia y complemento) y estableceremos propiedades importantes como la distributividad y las Leyes de De Morgan. También introduciremos el álgebra de conjuntos, método poderoso para demostrar igualdades entre conjuntos sin utilizar doble inclusión. Después estudiaremos otras operaciones entre conjuntos: la unión e intersección generalizada, las cuales están íntimamente ligadas a los cuantificadores lógicos, y el producto cartesiano, el cual servirá como base para el estudio de las relaciones y funciones en el capítulo 4.

CAPÍTULO 2: INDUCCIÓN: LOS NÚMEROS NATURALES

Estudiaremos la estructura ordenada de los números naturales ($\mathbb{N}$), estableciendo el llamado Principio del Buen Orden. Demostraremos que este principio es equivalente al Principio de Inducción Matemática, el cual nos servirá como método de demostración para muchas afirmaciones matemáticas asociadas a los números naturales. Después introduciremos la noción de isomorfismo entre estructuras ordenadas, la cual será retomada en el capítulo 6 desde una perspectiva más general. Finalmente, utilizando los métodos previamente establecidos de inducción y recursión, estudiaremos varios ejemplos de *conteo* —área de las matemáticas encargada de determinar cuántos objetos matemáticos poseen cierta propiedad— y calcularemos el tamaño de ciertos conjuntos finitos que son recurrentes en las matemáticas como, por ejemplo, el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto que tienen un tamaño dado.

CAPÍTULO 3: DIVISIBILIDAD: LOS NÚMEROS ENTEROS

Estudiaremos la relación de divisibilidad sobre los números enteros ($\mathbb{Z}$) —conjunto que será construido de forma rigurosa en el capítulo 4—, la cual nos permitirá definir las nociones de residuo, máximo común divisor, primos relativos y números primos. Estableceremos el Teorema Fundamental de la Aritmética, el cual permite descomponer de forma única a cada número natural positivo en factores primos. Después estudiaremos las congruencias módulo n y definiremos una estructura

llamada los “enteros módulo n ” ($\mathbb{Z}_n$), la cual ejemplifica los conceptos de relación de equivalencia y grupo, que serán estudiados en detalle en los capítulos 4 y 6, respectivamente. Además, demostraremos dos teoremas clásicos de divisibilidad: el Pequeño Teorema de Fermat y el Teorema Chino del Residuo, el cual garantiza la solución de sistemas de congruencias lineales que cumplen con ciertas propiedades.

CAPÍTULO 4: RELACIONES Y FUNCIONES

Introduciremos el concepto de relación como conjunto de pares ordenados y definiremos las nociones de dominio, imagen, inversa y composición. Estudiaremos la clausura reflexiva, simétrica y transitiva de una relación, en términos de las operaciones de unión e intersección generalizada estudiadas en el capítulo 1. Después nos enfocaremos en la noción de función como un caso especial de relación, definiendo además los conceptos de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad; esta última será el pilar fundamental en la definición de que dos conjuntos tengan el mismo tamaño, la cual será estudiada en detalle en el capítulo 5. Después estudiaremos las relaciones de equivalencia, los conceptos de partición de un conjunto y de conjunto de representantes. Las relaciones de equivalencia permitirán la construcción de la estructura de los números enteros a partir de los números naturales, y la estructura de los números racionales ($\mathbb{Q}$) a partir de los números enteros, todo lo cual permite responder a ciertas preguntas cotidianas de conteo.

CAPÍTULO 5: CARDINALES

Definiremos la relación de equipotencia entre conjuntos, la cual formaliza la idea de que dos conjuntos tengan el mismo tamaño o cardinal. Demostraremos que ésta es una relación de equivalencia, lo cual nos permitirá clasificar los conjuntos. Primero definiremos los conjuntos finitos, demostrando que esta definición coincide con aquélla dada en el capítulo 2, y estableceremos sus propiedades mediante inducción matemática. Después estudiaremos los conjuntos enumerables, esto es, aquellos que son equipotentes con $\mathbb{N}$. Demostraremos que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son conjuntos enumerables. Finalmente estudiaremos los conjuntos infinitos no enumerables, cuyo infinito es mayor que aquél de $\mathbb{N}$. Demostraremos que el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) son ambos infinitos no enumerables y equipotentes entre sí. También demostraremos que no existe un infinito mayor que todos los demás.

CAPÍTULO 6: ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

Finalmente, daremos un panorama global, aunque simplificado, de las estructuras matemáticas, muchas de las cuales van más allá del alcance de este libro y a partir de las cuales se desarrollan las distintas ramas de las matemáticas (álgebra, análisis, combinatoria, probabilidad, teoría de números, geometría, etc). A partir de las nociones de conjunto, función y relación que establecimos en los capítulos anteriores, definiremos las estructuras relacionales, las álgebras de Boole, los espacios métricos, los espacios topológicos y los grupos; estos últimos los estudiaremos en cierto detalle, enunciando sus propiedades principales y dando varios ejemplos. Finalmente estudiaremos los isomorfismos entre estructuras matemáticas, los cuales son biyecciones que “respetan la estructura”; por medio de ellos podemos capturar las propiedades esenciales de una estructura, “quitándonos las gafas” por así decirlo, esto es, olvidando los nombres de sus elementos.

SOBRE LOS EJERCICIOS

Durante la lectura de cada capítulo el lector se encontrará ocasionalmente con el siguiente mensaje:

Antes de seguir leyendo

Es este caso le sugerimos que se detenga en la lectura e intente resolver los pequeños ejercicios que aparecen propuestos allí, con el fin de aclarar los conceptos que se han presentado. Adicionalmente, al final de cada sección se encuentra una serie de ejercicios. Recomendamos al lector intentar resolverlos durante un rato largo y, si no los puede resolver, seguir intentándolo. Es frecuente que el primer enfoque para resolver un ejercicio no sea el correcto, así que se deben hacer varios intentos y para ello ciertamente se requiere de persistencia.

Al final de cada capítulo el lector encontrará un proyecto, el cual consiste en una serie de ejercicios relacionados entre sí, cuyo estudio apunta a lograr una comprensión más profunda de algunos de los temas y conceptos ahí tratados. Se espera que con cada proyecto el lector pueda motivarse fuertemente a profundizar en su tema favorito, desarrollando así desde temprano el gusto por áreas particulares en las matemáticas tales como la combinatoria, la teorías axiomáticas, la teoría de grupos, la teoría de conjuntos y las matemáticas discretas.

AGRADECIMIENTOS

El autor está profundamente agradecido con Nicolás Vaughan, principal editor del libro, cuyo compromiso, profesionalismo, retroalimentación constante y trabajo serio han hecho posible su publicación con la mayor calidad posible. Además, agradece calurosamente a Aquiles Páramo, quien contribuyó enormemente en muchos aspectos del proyecto, aportando observaciones y sugerencias pertinentes, originales y exquisitas.

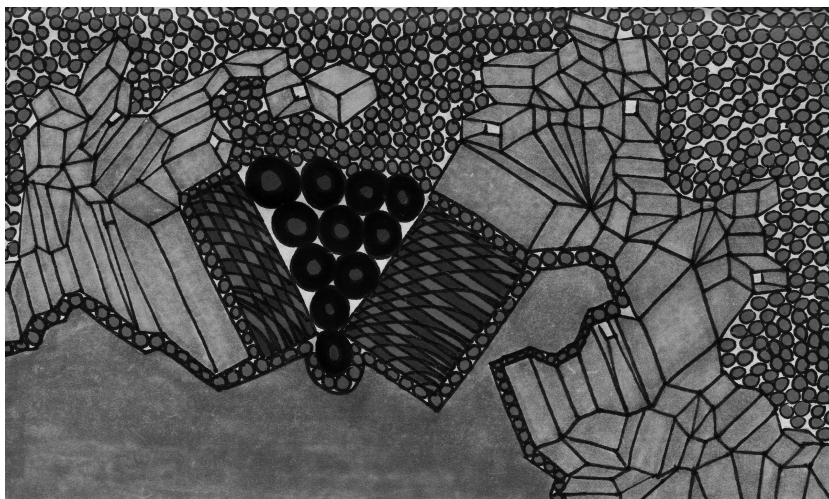
El autor quiere darle un reconocimiento especial a Ramiro de La Vega, principal revisor de contenido matemático, quien contribuyó de forma totalmente desinteresada con el libro, dándole equilibrio, estructura y rigor; mi sincero agradecimiento a Ramiro. Igualmente agradece enormemente a Andrea Solano por las maravillosas ilustraciones artísticas que acompañan el libro, las cuales esperamos que sirvan como inspiración matemática al lector. Asimismo, a David Laverde y Nicolás Vaughan por el diseño de las imágenes técnicas. El autor además agradece a Alejandro Forero, Sergio Tello, Alexander Berenstein, Felipe Castañeda, Luis Jaime Corredor, Carlos Montenegro, Xavier Caicedo, María Trujillo, Silvia Barbina, Maricarmen Martínez, Andrés “Betún” Betancourt, Federico Arboleda, Camilo Rengifo y Óscar Velásquez, por colaborar en diversos aspectos de este proyecto.

Finalmente, el autor agradece de forma sincera al Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes, y en especial a su director, René Meziat, por el enorme apoyo prestado, en todo sentido posible, para la realización de este libro. Este libro no es otra cosa que fruto de los esfuerzos continuos de varios matemáticos del departamento durante décadas por enseñar las matemáticas de una manera rigurosa, estructurada, abarcadora y, sobre todo, creativa.

—Andrés Forero Cuervo, septiembre de 2009.

CAPÍTULO 1

CONJUNTOS



Todo es un conjunto...

La noción de conjunto, cuya teoría fue desarrollada a finales del siglo XIX por Georg Cantor, es posiblemente la noción más importante utilizada en las matemáticas modernas. Muchos objetos y conceptos matemáticos (relaciones, funciones, operaciones, grupos, anillos, grafos, espacios vectoriales, geometrías, topologías, los números naturales, etc.) se definen de forma precisa en términos conjuntistas. Por ejemplo, un grupo es un conjunto junto con una operación sobre él que tiene ciertas propiedades. Una topología es un conjunto de conjuntos, llamados “abiertos”, que cumplen con varias condiciones. Puesto que la noción que permite construir objetos matemáticos complejos es la de conjunto, la pregunta fundamental parece ser la siguiente: ¿qué es un conjunto exactamente?

No nos molestamos por responder lo anterior, ya que esto da pie a un juego de nunca acabar. Pues, si un objeto es una colección, entonces ¿qué es una colección? Si una colección es una clase, entonces ¿qué es una clase? En vez de buscar definir un conjunto, vamos a establecer ciertos principios fundamentales que hablen sobre ellos y que permitan

manipularlos de manera efectiva. En vez de decir explícitamente qué son los conjuntos, los describiremos de forma general estableciendo sus propiedades fundamentales y desarrollando así su teoría.

§ 1.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Conjunto En términos informales un conjunto es una colección de objetos. La noción básica para estudiar los conjuntos es la de *pertenencia*. Por ejemplo, sea H el conjunto de todos los seres humanos y d la persona Diego Reyes. Es claro que d es un miembro o elemento del conjunto H . Decimos entonces que d pertenece a H o que d es un elemento de H y escribimos:

$$d \in H.$$

Por el contrario, como el número $c = 3$ no es un ser humano, decimos que c no pertenece a H y escribimos:

$$c \notin H.$$

Todo esto es muy sencillo. Sin embargo, para entender la naturaleza y propiedades de los conjuntos, es conveniente hacer las siguientes observaciones:

- (a) Conocer un conjunto equivale a conocer sus elementos. De esta forma, si A y B son conjuntos que tienen exactamente los mismos elementos, entonces son el mismo conjunto y escribimos $A = B$. Esto se lee: “ A es igual a B ”.
- (b) La notación de corchetes es una forma común de describir conjuntos. Por ejemplo, si A es el conjunto cuyos elementos son 3 y 5, y ninguno otro, podemos escribir:

$$A = \{3, 5\}.$$

- (c) El orden en que listamos los elementos de un conjunto no es importante. Por ejemplo, $\{3, 5\} = \{5, 3\}$. En otras palabras, un conjunto se asemeja a una bolsa de dulces distintos que podemos revolver o “desordenar” sin que cambie. Al hacerlo, no perdemos la información sobre qué dulces pertenecen a la bolsa, es decir, qué elementos pertenecen al conjunto.
- (d) Si un objeto pertenece a un conjunto, pertenece *exactamente* una vez a él. Por ejemplo, el conjunto $\{6, 6\}$ tiene exactamente un elemento: el número 6. Así, $\{6, 6\} = \{6\}$ pues ambos conjuntos tienen exactamente los mismos elementos, a saber, 6. Análogamente tenemos que $\{2, 3, 3, 2, 3\} = \{2, 3\}$.
- (e) Un conjunto puede ser finito o infinito, según tenga un número finito o infinito de elementos. Por ejemplo, el conjunto $\{1, 3, 5, 7\}$

es finito pues tiene cuatro elementos. En cambio, el conjunto de los números impares positivos $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ es infinito, pues nunca acabaríamos de escribir a todos sus elementos.

- (f) Un conjunto puede carecer de elementos y cuando tiene esta propiedad se denomina un conjunto *vacío*. Más adelante demostraremos que en realidad existe un único conjunto vacío.
- (g) Si c es una propiedad y x es un objeto, entonces se abreviará la afirmación “ x tiene la propiedad c ” así: $c(x)$. Por ejemplo, si $c(x)$ es la propiedad “ x es un caballo”, denotamos el conjunto de los x que tienen la propiedad c , “el conjunto de los caballos”, como

$$\{x : c(x)\},$$

y lo leemos así: *el conjunto de los x tales que $c(x)$* (el conjunto de los x tales que x es un caballo).

- (h) La notación de corchetes es conveniente para describir algunos conjuntos, pero hay que ser cuidadosos en su uso. Por ejemplo, podría pensarse que el conjunto $\{x, y\}$ es necesariamente un conjunto con dos elementos. Sin embargo, si $x = y$, se tiene entonces que $\{x, y\} = \{x\} = \{y\}$, y en tal caso sería un conjunto con un único elemento.

Ejemplo 1.1. Los siguientes son ejemplos de conjuntos:

- (a) Sea A el conjunto cuyos únicos elementos son 2 y 7. Esto es, $2 \in A$, $7 \in A$ y para cualquier objeto x , si x es distinto de 2 y de 7, entonces $x \notin A$. El conjunto A se puede escribir como $A = \{2, 7\}$. Gracias a las observaciones anteriores tenemos que

$$A = \{2, 7\} = \{7, 2\} = \{2, 7, 2, 2\} = \{7, 7, 2, 2\}, \text{ etc.}$$

- (b) Si d es un objeto cualquiera, el conjunto que resulta de introducir a d en un conjunto y no introducir ningún otro objeto es $\{d\}$, el conjunto cuyo único elemento es d . El conjunto $\{d\}$ es llamado el *singleton* $\{d\}$.¹ Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$, entonces $\{A\} = \{\{1, 2, 3\}\}$ es un *singleton*. Claramente A es distinto de $\{A\}$ ya que A tiene tres elementos, mientras que $\{A\}$ tiene tan sólo un elemento.

Singleton

¹Aunque en la literatura matemática lo habitual es encontrar el anglicismo “*singleton*” —costumbre que aquí seguiremos—, en español también se lo suele llamar “conjunto unitario” o “unicconjunto”.

$\mathbb{N}$:
Números
naturales

- (c) Simbolizamos mediante $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, el cual se define como

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

$\mathbb{N}$ es un conjunto infinito y además tiene la siguiente notable propiedad: para todo n , si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$.

- (d) Sea S el conjunto de todos los números naturales entre 4 y 900, incluyendo extremos. En lugar de listar todos los elementos de S , es conveniente escribir este conjunto como $\{x \in \mathbb{N} : 4 \leq x \leq 900\}$. Esto se lee: *el conjunto de los x en $\mathbb{N}$ tales que x es mayor o igual a 4, y menor o igual a 900*.
- (e) Sea $D = \{3, 8, 13, 18, 23\}$. Entonces $D = \{3 + 5j : j = 0, 1, 2, 3, 4\}$, que se puede leer así: *D es el conjunto de los números de la forma $3 + 5j$, en donde j varía entre 0 y 4*. Por ejemplo, 13 es de la forma $3 + 5j$ (si se toma $j = 2$). Una manera alternativa de describir a D es la siguiente: sea $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Entonces $D = \{3 + 5j : j \in C\}$.

Notación
extensional

Notación
intensional

Los ejemplos (a), (b) y (c) ilustran maneras *extensionales* de nombrar conjuntos, en las cuales listamos sus elementos explícitamente; el ejemplo (d) describe otra forma de nombrarlos, *intensionalmente*, exhibiendo la propiedad común que comparten sus elementos; el ejemplo (e) muestra un conjunto representado de ambas maneras.

Toda forma extensional finita puede traducirse a una forma intensional: si

$$S = \{a_0, a_1, \dots, a_n\},$$

entonces podemos decir que $S = \{x : p(x)\}$, donde $p(x)$ es la propiedad " $x = a_0$ o $x = a_1$ o ... o $x = a_n$ ". Sin embargo, muchas descripciones intensionales no tienen contraparte extensional (¿puede el lector pensar en ejemplos de ello?).

Antes de seguir leyendo

1. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{1, \{6, 9\}\}$?

2. Liste todos los elementos del siguiente conjunto:

$$\{y : \text{existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 < k < 5 \text{ y } y = 3 + 2k\}.$$

3. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Sea C el siguiente conjunto:

$$C = \{x \in \mathbb{N} : \text{si } x \in A \text{ entonces } x \in B\}.$$

Liste todos los elementos de C .

SUBCONJUNTOS

Sea H_{1843} el conjunto de los seres humanos que nacieron en el año 1843. Es claro que todo elemento de H_{1843} es también un elemento de $H = \{x : x \text{ es un ser humano}\}$, esto es: para todo x , si x pertenece a H_{1843} , entonces x pertenece a H . Lo anterior lo expresamos diciendo que H_{1843} es un *subconjunto* de H . Si simbolizamos “para todo” mediante el símbolo $\forall$, e “implica” mediante el símbolo $\rightarrow$, podemos formular la definición general de subconjunto de la siguiente manera:

$\forall$:
Para todo
 $\rightarrow$:
Implicación

Definición 1.2. Sean A y B conjuntos. Diremos que A es un *subconjunto* de B (en símbolos, $A \subseteq B$) si

$\subseteq$:
Subconjunto

$$\forall x : x \in A \rightarrow x \in B,$$

lo que se lee: “para todo x , si $x \in A$ entonces $x \in B$ ”.

Por definición, las expresiones “ $A \subseteq B$ ”, “ A es un subconjunto de B ”, “ A está contenido en B ” y “ A está incluido en B ” significan lo mismo. Sin embargo, éstas no significan lo mismo que la expresión “ A pertenece a B ”. En otras palabras, las nociones de pertenencia y contención *son distintas* y no son intercambiables. Por ejemplo, un ser humano *no* está contenido en el conjunto H de los seres humanos, sino que *pertenece* a este conjunto. Por otra parte, el conjunto de los nigerianos no pertenece al conjunto de los africanos, sino que *está contenido* en él, ya que para todo x , si x es nigeriano, entonces x es africano.

En matemáticas es frecuente demostrar afirmaciones de la forma $A \subseteq B$. Esto significa demostrar que para todo x , si $x \in A$, entonces $x \in B$. La primera afirmación, $x \in A$, se llama la *hipótesis* (afirmación que suponemos verdadera) y la segunda afirmación, $x \in B$, se llama la *conclusión* (afirmación que debemos concluir a partir de la hipótesis). Esquemáticamente, una demostración de la afirmación $A \subseteq B$ tiene la forma siguiente:

Hipótesis
Conclusión

Sea $x \in A$: entonces... entonces $x \in B$.

Los puntos suspensivos en el esquema anterior representan distintas afirmaciones que se pueden concluir lógicamente a partir de la hipótesis de que $x \in A$. El objetivo es “llegar” a la afirmación $x \in B$. Este método de demostración se denomina *método de demostración por elementos*. Veamos un ejemplo:

*Demostración
por elementos*

Ejemplo 1.3. Sean $A = \{12n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3k : k \in \mathbb{N}\}$. Demuestre que $A \subseteq B$.

Solución. Queremos demostrar que para todo x , si $x \in A$ entonces $x \in B$. Por ello comenzamos escribiendo: sea x tal que $x \in A$, entonces por definición de A , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = 12n$. Queremos demostrar que $x \in B$, es decir, que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 3k$. Ahora, $x = 12n = 3(4n)$. Sea $k = 4n$. Entonces $x = 3k$ y claramente $k \in \mathbb{N}$, pues el producto de dos números naturales es un número natural. Luego, por definición del conjunto B , $3k \in B$. Como $x = 3k$, concluimos, como queríamos, que $x \in B$. ■

Ejemplo 1.4. Sean $A = \{n^3 : n \in \mathbb{N}, n > 1\}$, $B = \{k : k \in \mathbb{N}, k > 5\}$. Demuestre que $A \subseteq B$.

Solución. Queremos demostrar que para todo x , si $x \in A$ entonces $x \in B$. Por ello comenzamos escribiendo: sea $x \in A$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$ y $x = n^3$. Como $n > 1$ y n es un número natural, tenemos que $n \geq 2$. Entonces $x = n^3 \geq 2^3 = 8$. Claramente $x \in \mathbb{N}$ y $x > 5$, luego $x \in B$. ■

En general, en matemáticas para demostrar una afirmación de la forma “para todo x , si $p(x)$ entonces $q(x)$ ”, se comenzará la demostración escribiendo “sea x tal que $p(x)$ ”. En particular, para demostrar que $A \subseteq B$, es decir, que para todo x , si $x \in A$ entonces $x \in B$, la demostración deberá comenzar con “sea x tal que $x \in A$ ” o simplemente “sea $x \in A$ ”.

Antes de seguir leyendo

Sean $A = \{6n + 9 : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3k : k \in \mathbb{N}\}$. Demuestre que $A \subseteq B$.

Observación 1.5. $A \supseteq B$ significa naturalmente $B \subseteq A$, lo que se puede leer *A es un superconjunto de B*.

Supongamos que $A \subseteq B$ y sea x cualquier objeto. Si x no pertenece a B , entonces x tampoco pertenecerá a A , ya que si x perteneciera a A , también pertenecería a B , lo cual contradice nuestra hipótesis de que $x \notin B$. En resumen:

Si $A \subseteq B$ y $x \notin B$, entonces $x \notin A$.

La relación *no ser subconjunto* la denotamos con el símbolo $\not\subseteq$. Por ejemplo, si $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{1, 7\}$, entonces A no es un subconjunto de B ya

que —por ejemplo— $3 \in A$ y $3 \notin B$. La afirmación $A \not\subseteq B$ es equivalente a la siguiente afirmación: “Existe x tal que $x \in A$ y $x \notin B$ ”.

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Sean A y B conjuntos,² y supongamos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Esto quiere decir que A y B tienen los mismos elementos: todo x que pertenezca a A debe pertenecer a B y viceversa. Pues bien, en este caso lo más natural es que podamos concluir que A y B son en realidad el mismo conjunto. En otras palabras, la única razón para afirmar que dos conjuntos son distintos es que difieran en sus elementos. Dicha propiedad la expresamos en el siguiente principio:³

Principio 1.6 (Extensionalidad). Si los conjuntos A y B tienen exactamente los mismos elementos, entonces $A = B$.

PE:
Principio de
Extensionalidad

Si A y B son conjuntos y $A = B$, entonces claramente A y B tienen los mismos elementos. Ahora bien, gracias al Principio de Extensionalidad (PE), si A y B tienen los mismos elementos, entonces $A = B$. En resumen, las afirmaciones “ $A = B$ ” y “ A y B tienen los mismos elementos” son *equivalentes*, esto es, siempre que alguna de ellas sea verdadera, la otra también lo es.⁴ De forma más concisa, escribimos:

Afirmaciones
equivalentes

$$A = B \leftrightarrow A \text{ y } B \text{ tienen los mismos elementos,}$$

donde el símbolo $\leftrightarrow$ se lee “si y sólo si”, y representa la equivalencia entre dos afirmaciones.

$\leftrightarrow$:
Equivalencia

Observación 1.7 (Formas equivalentes para expresar la igualdad de conjuntos). Si A y B son conjuntos, las siguientes afirmaciones son equivalentes entre sí; esto es, siempre que alguna de ellas sea verdadera, entonces las demás también lo serán:

- (a) $A = B$;
- (b) A y B tienen los mismos elementos;
- (c) $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$;
- (d) $(\forall x : x \in A \rightarrow x \in B)$ y $(\forall x : x \in B \rightarrow x \in A)$;

²En principio, podría ocurrir que $A = B$, pues dos nombres o símbolos distintos no garantizan que los objetos nombrados por ellos sean objetos distintos.

³Un principio es una afirmación que suponemos verdadera, pero no demostramos.

⁴Sobre la noción de equivalencia, véase el Apéndice A, Definición A.3 p. 299, abajo.

- (e) $\forall x : x \in A \leftrightarrow x \in B$;
 (f) para todo elemento x , o bien $x \in A$ y $x \in B$, o bien $x \notin A$ y $x \notin B$.

Observación 1.8. Una analogía útil con el PE es la siguiente: si a y b son números tales que $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

*Demostración
por doble
inclusión*

Por el PE, para demostrar que los conjuntos A y B son iguales, basta demostrar dos afirmaciones por separado: $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. A este método de demostración de igualdad de conjuntos lo denominaremos *demostración por doble inclusión*.

Para los dos ejemplos siguientes es necesario introducir el conjunto de los *números enteros*, definido como $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Note que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.9. Sea $A = \{y + 1 : y \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{z + 3 : z \in \mathbb{Z}\}$. Demuestre mediante doble inclusión que $A = B$.

Solución. Demostraremos por separado que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$:

- ($\subseteq$) Queremos demostrar que para todo x , si $x \in A$, entonces $x \in B$. Comenzamos escribiendo: “sea x tal que $x \in A$ ”. Ahora, como $x \in A$, entonces existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x = y + 1$. Queremos ver que $x \in B$, esto es, que existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $x = z + 3$. Dado que $x = y + 1$, entonces

$$x = y + 1 = (y - 2) + 3.$$

Tomemos $z = y - 2$. Dado que $y \in \mathbb{Z}$, entonces $z \in \mathbb{Z}$. Además $x = z + 3$. Hemos demostrado que existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $x = z + 3$, luego $x \in B$, como queríamos.

- ($\supseteq$) Queremos demostrar que para todo x , si $x \in B$ entonces $x \in A$. Comenzamos escribiendo: “sea x tal que $x \in B$ ”. Ahora, como $x \in B$ entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $x = z + 3$. Queremos ver que $x \in A$, esto es, que existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x = y + 1$. Dado que $x = z + 3$, entonces

$$x = z + 3 = (z - 2) + 1.$$

Tomemos $y = z - 2$. Dado que $z \in \mathbb{Z}$, entonces $y \in \mathbb{Z}$. Además $x = y + 1$. Hemos demostrado que existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x = y + 1$; luego $x \in A$, como queríamos. ■

Ejemplo 1.10. Sea $A = \{4y + 1 : y \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{9 - 4z : z \in \mathbb{Z}\}$. Demuestre mediante doble inclusión que $A = B$.

Solución. Demostraremos por separado que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$:

- ($\subseteq$) Sea $x \in A$. Entonces existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 4y + 1$. Queremos ver que $x \in B$, esto es, que existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 9 - 4z$. Dado que $x = 4y + 1$, entonces

$$x = 4y + 1 = 9 - 9 + 4y + 1 = 9 - 8 + 4y = 9 - 4(2 - y).$$

Tomemos $z = 2 - y$. Dado que $y \in \mathbb{Z}$, entonces $z \in \mathbb{Z}$. Además $x = 9 - 4z$. Hemos demostrado que existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 9 - 4z$; luego $x \in B$, como queríamos.

- ($\supseteq$) Sea $x \in B$. Entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 9 - 4z$. Queremos ver que $x \in A$, esto es, que existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 4y + 1$. Dado que $x = 9 - 4z$, entonces:

$$x = 9 - 4z = 8 - 4z + 1 = 4(2 - z) + 1.$$

Tomemos $y = 2 - z$. Dado que $z \in \mathbb{Z}$, entonces $y \in \mathbb{Z}$. Además $x = 4y + 1$. Hemos demostrado que existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 4y + 1$; luego $x \in A$, como queríamos. ■

A veces la relación de ser subconjunto es *estricta*, en el sentido de que no se da una igualdad:

Definición 1.11. Sean A y B conjuntos. Diremos que A es *subconjunto propio*⁵ de B (y lo notamos como $A \subset B$ o $A \subsetneq B$) si $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

$\subset$ ó $\subsetneq$:
Subconjunto
propio

Por ejemplo, $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ y $\{\} \subset \{2, 3\}$. Como el lector puede verificar, la afirmación $A \subset B$ es equivalente a: $A \subseteq B$ y existe x tal que $x \in B$ y $x \notin A$.

Antes de seguir leyendo

1. ¿Verdadero o falso? Dados dos conjuntos A y B , siempre vale por lo menos alguna de las siguientes afirmaciones: $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. ¿Cómo se compagina esto con la analogía de los números propuesta anteriormente?
2. Calcule el número de subconjuntos propios de $\{1, 2\}$.

⁵Debe advertirse que en algunos libros de matemáticas el símbolo $\subset$ es utilizado para referirse a la relación $\subseteq$ de contenencia.

EL CONJUNTO VACÍO

Sea V un conjunto. Decimos que V es un conjunto *vacío*, y lo simbolizamos como $\emptyset$, si no tiene ningún elemento. Dicho de otro modo, el conjunto V es vacío si $\forall x : x \notin V$.

$\exists$:
Existe Naturalmente, un conjunto es *no vacío* si existe algún elemento x que le pertenece. Si representamos la palabra “existe” con el símbolo $\exists$, tenemos que un conjunto V es no vacío si y sólo si

$$\exists x : x \in V,$$

lo que se lee: “existe x tal que x pertenece a V ”.

Es fácil pensar en conjuntos no vacíos: pensar en $\{2, 3\}$ es pensar en el 2 y el 3, y pensar en $\mathbb{N}$ es pensar en infinitos números: 0, 1, 2, ... En contraste, pensar en un conjunto vacío equivale a pensar en nada. A continuación establecemos, como principio, que existe por lo menos un conjunto con la propiedad de ser vacío:

Principio 1.12 (Principio del conjunto vacío). Existe un conjunto V que es vacío, esto es, que cumple la siguiente propiedad:

$$\forall x : x \notin V.$$

¿Existen múltiples conjuntos vacíos diferentes entre sí? La respuesta es que no. A continuación damos una demostración de este hecho.

Teorema 1.13. Si V y V' son conjuntos vacíos, entonces $V = V'$.

Prueba. Sean V y V' conjuntos vacíos. Entonces por definición, tenemos que

$$\forall x : x \notin V \text{ y } \forall x : x \notin V'.$$

Demostraremos que $V \subseteq V'$ y que $V' \subseteq V$. Supongamos que $V \not\subseteq V'$. Esto significa, por la definición de $\not\subseteq$, que existe x tal que $x \in V$ y $x \notin V'$. Sin embargo, la existencia de un x tal que $x \in V$ contradice la hipótesis de que V es conjunto vacío, de modo que en realidad no puede ocurrir que $V \not\subseteq V'$; por lo tanto, $V \subseteq V'$. De manera análoga podemos demostrar que $V' \subseteq V$. Como $V \subseteq V'$ y $V' \subseteq V$, concluimos por el PE que $V = V'$. ■

$\emptyset$:
Vacío Este teorema nos autoriza a utilizar un símbolo para referirnos al conjunto vacío, ya que éste es único. Este símbolo será $\emptyset$, o también $\{\}$. Si abreviamos “existe un único” por $\exists!$, lo que hemos mostrado es lo siguiente: $\exists! Y : \forall x : x \notin Y$. Por definición, el conjunto vacío es un conjunto finito (pues tiene 0 elementos).

 Antes de seguir leyendo

1. Demuestre que $\forall A : \emptyset \subseteq A$. En otras palabras, que todo conjunto contiene al conjunto vacío.
2. ¿Es todo objeto del universo un conjunto? ¿Por qué? (*Ayuda:* la definición de un conjunto *no* puede ser “algo que tiene elementos”; si lo fuera, $\emptyset$ no sería un conjunto, lo cual estaría en contradicción con el Principio 1.12.)

Supongamos que queremos encontrar una propiedad que sólo la tenga el número 2. Por ejemplo, la propiedad $p(x) := “x \text{ es par}”$ es una propiedad relativa a 2, pero otros números también la tienen. En cambio, la propiedad $q(x) := “x \text{ es un número primo par}”$ es una propiedad que sólo el 2 cumple, como se verá en el capítulo 3. Decimos, entonces que la propiedad q *caracteriza* al número 2.

La propiedad de *ser un conjunto vacío*, definida anteriormente, al ser satisfecha por un único objeto, lo caracteriza y le da su nombre: “el conjunto vacío”. Veamos una caracterización alternativa del conjunto vacío, esto es, otra propiedad que lo distingue del resto de los conjuntos. Esta propiedad es la de *ser subconjunto de todos los conjuntos*.

Teorema 1.14. Para todo conjunto A tenemos que $A = \emptyset \leftrightarrow (\forall B : A \subseteq B)$.

Prueba. Sea A un conjunto. Una proposición de la forma $p \leftrightarrow q$ es equivalente a $(p \rightarrow q)$ y $(q \rightarrow p)$. Por ende, para demostrar la afirmación

$$A = \emptyset \leftrightarrow (\forall B : A \subseteq B),$$

debemos demostrar por separado las dos siguientes:

$$(a) \ A = \emptyset \rightarrow (\forall B : A \subseteq B); \quad (b) \ (\forall B : A \subseteq B) \rightarrow A = \emptyset.$$

La parte (a) se simboliza como $(\rightarrow)$ y la parte (b) como $(\leftarrow)$:

- $(\rightarrow)$ Supongamos que $A = \emptyset$. Sea B un conjunto. Debemos demostrar que $A \subseteq B$. Por la definición de subconjunto, debemos demostrar que, para todo x ,

$$x \in A \rightarrow x \in B.$$

Sea x dado; como la afirmación “ $x \in A$ ” es falsa (ya que $A = \emptyset$), podemos aplicar la Ley del Antecedente Falso (véase el Apéndice A) para concluir que la afirmación “ $x \in A \rightarrow x \in B$ ” es verdadera. Concluimos que $A \subseteq B$, como queríamos.