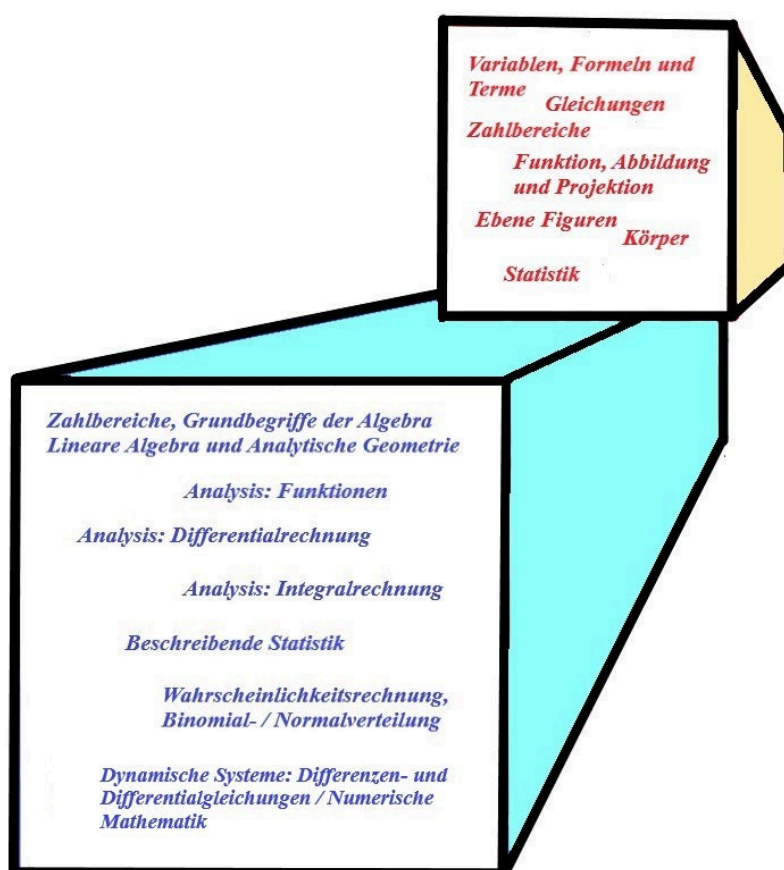


ALFRED DOMINIK, KARL JOSEF FUCHS &
SIMON PLANGG

**MATHEMATIK
IN DEN
SEKUNDARSTUFEN 1 & 2**

**Aufgaben für Lehramtsstudierende
und didaktisch-methodische Kommentare**



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Skripte zur Mathematik und ihrer Didaktik

Herausgegeben von
Gilbert Greefrath und Martin Stein

Band 7

ALFRED DOMINIK, KARL JOSEF FUCHS &
SIMON PLANGG

**MATHEMATIK
IN DEN
SEKUNDARSTUFEN 1 & 2**

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese
Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte Informationen sind im Internet über
<http://dnb.de> abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
<http://www.winterwork.de/>

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes
darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in
irgendeiner Form reproduziert oder unter
Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet,
vervielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und
Medien, Münster 2022 – E-Book
Ferdinand-Freiligrath-Str. 26, 48147 Münster
ISBN 978-3-95987-220-1
<https://doi.org/10.37626/GA9783959872201.0>

Inhaltsverzeichnis

0. ZUM GELEIT	5
1. MATHEMATIK IN DER SEKUNDARSTUFE 1	
1.1 <i>Lehrstoff Variablen, Formeln und Terme</i>	7
1.2 <i>Lehrstoff Gleichungen</i>	13
1.3 <i>Lehrstoff Zahlbereiche</i>	18
1.4 <i>Lehrstoff Funktion, Abbildung und Projektion</i>	31
1.5 <i>Lehrstoff Ebene Figuren</i>	42
1.6 <i>Lehrstoff Körper</i>	50
1.7 <i>Lehrstoff Statistik</i>	57
2. MATHEMATIK IN DER SEKUNDARSTUFE 2	
2.1 <i>Lehrstoff Zahlbereiche und Algebra / Lineare Algebra und Analytische Geometrie</i>	68
2.2 <i>Lehrstoff Analysis: Funktionen</i>	74
2.3 <i>Lehrstoff Analysis: Differentialrechnung</i>	83
2.4 <i>Lehrstoff Analysis: Integralrechnung</i>	90
2.5 <i>Lehrstoff Beschreibende Statistik</i>	96
2.6 <i>Lehrstoff Wahrscheinlichkeitsrechnung, Binomial- / Normalverteilung</i>	101
2.7 <i>Lehrstoff Dynamische Systeme: Differenzen- und Differentialgleichungen / Numerische Mathematik</i>	107
LITERATURVERZEICHNIS	114

0. Zum Geleit

Das Buch basiert auf den Lehrveranstaltungen *Fachdidaktik Mathematik der Sekundarstufe 1* und *Fachdidaktik Mathematik der Sekundarstufe 2* an der Paris Lodron-Universität und Pädagogischen Hochschule Stefan Zweig Salzburg. Die Lehrveranstaltungen werden/wurden von den Autoren an den genannten Bildungseinrichtungen abgehalten. Der Besuch der Lehrveranstaltungen ist Pflicht für Studierende im Lehramt der Sekundarstufen 1 und 2.

Die folgenden Kapitel behandeln die Mathematik in den beiden Sekundarstufen in folgender Weise:

- Zunächst werden die Übungsaufgaben zu den Lehrstoffen

Variablen, Formeln und Terme

Gleichungen

Zahlbereiche

Funktion, Abbildung und Projektion

Ebene Figuren

Körper

Statistik

für die **Sekundarstufe 1** sowie zu den Lehrstoffen

Zahlbereiche und Algebra / Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

Beschreibende Statistik

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Binomial- / Normalverteilung

Dynamische Systeme: Differenzen- und Differentialgleichungen / Numerische Mathematik

für die **Sekundarstufe 2** aus den Proseminaren präsentiert.

Die einzelnen Lehrstoffthemen in den beiden Sekundarstufen werden anschließend durch einen **KOMMENTAR ZUR METHODIK UND DIDAKTIK** ergänzt. Dieser soll zum einen zur Argumentation für die gewählten Beispiele dienen, zum anderen auf weiterführende fachdidaktische Beiträge im Kontext des behandelten Lehrstoffs hinweisen.

Mit dem Buch wenden wir uns an Lehrende in der Ausbildung für das Lehramt in den Sekundarstufen sowie an Lehrende in der Fort- und Weiterbildung an Universitäten und Pädagogischen Hochschulen. Aber auch für Mathematiklehrer(innen) soll das Buch zahlreiche Informationen und Beispiele für den praktischen Unterricht liefern.

Wir wünschen viel Spaß und zahlreiche Anregungen beim Durcharbeiten des Buchs.

Alfred Dominik, Karl Josef Fuchs & Simon Plangg

Salzburg 2022

Mathematik in der Sekundarstufe 1

Die Auswahl der nachfolgend diskutierten Lehrstoffe basiert zum einen auf den aktuell gültigen Lehrplänen für die Sekundarstufe I in den deutschsprachigen Ländern Österreich (Rechtsinformationssystem des Bundes, 2022), Deutschland (Lehrplan-Datenbank der Kultusministerkonferenz, 2022) sowie der Schweiz (Lehrplan21, 2015).

Zum anderen wurde die Auswahl vom Bezug der einzelnen Lehrstoffe zu den Kompetenzmodellen für Mathematik in den einzelnen Ländern (Österreich: Siller & Fuchs, 2009, S. 67, Deutschland: Beschluss der Kultusministerkonferenz, 2012, Schweiz: Maradan & Mangold, 2005) abhängig gemacht.

1.1 Lehrstoff Variablen, Formeln und Terme

Aufgabe 1: Variable als Denkgegenstand (Gegenstandsaspekt)

„Sei E die Essigmenge und \ddot{O} die Ölmenge in einem Salatdressing. In dem Salatdressing ist dreimal soviel Öl wie Essig. Drücken Sie dies durch eine Gleichung mit Hilfe von E und \ddot{O} aus.“ (Fischer & Malle, 1985)

Sei E die Anzahl der Engländer und C die Anzahl der Chinesen. In China leben 20 Mal so viele Menschen wie in England. Drücken Sie dies durch eine Gleichung mit Hilfe von E und C aus.

- Welche Schwierigkeiten können bei Schülerinnen und Schülern bei der Lösung dieser Aufgaben auftreten?
- Wie könnte diesen Schwierigkeiten im Unterricht begegnet werden?

Aufgabe 2: Gegenstandsaspekt

„Die Lebenserwartung der Frauen ist in den meisten Industrieländern um ca. sechs Jahre höher als die Lebenserwartung der Männer.“ (Malle, 1993)

- Beschreiben Sie den Sachverhalt mit Hilfe von Wortvariablen!
- Wählen Sie entsprechende Buchstabenvariablen für die Lebenserwartung der Frauen und für die Lebenserwartung der Männer zur Beschreibung des Sachverhalts!

Welche Vorteile haben Buchstabenvariablen gegenüber Wortvariablen?

Die letzte Fragestellung richtet sich an den Lehrenden, da Lisa-Hefendehl und Sebastian Rezat in ihrem Beitrag „Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung“ zum Thema Buchstaben versus Wortvariablen im Abschnitt über „Forschungen zum Variablenverständnis“ (2015, S. 135, 136) festhalten, dass ...

... Bei komplexeren Aufgaben, die auch Klammern enthalten, kehrt sich dies jedoch um. Dabei scheint bei komplexeren Aufgaben eine Formulierung in Buchstabenvariablen zu höheren Lösungsquoten zu führen als eine Formulierung in Wortvariablen.

Aufgabe 3: Gegenstands- und Einsetzungsaspekt

„Fritz sagt zu Anna: Denke dir eine Zahl, addiere dazu 2, multipliziere das Ergebnis mit 3 und ziehe dann 2 ab. Anna sagt: jetzt habe ich 16. Fritz soll nun die Zahl, die sich Anna gedacht hat, berechnen.“ (Pauer, 2006)

Welche Lösungsstrategien der Schülerinnen und Schüler erwarten Sie für die Lösung der Aufgabe am Beginn der Sekundarstufe I?

Aufgabe 4: Variablenaspekte und CAS

Zeigen Sie exemplarisch, wie unter Verwendung eines Computer Algebra Systems (CAS) die Variablenaspekte (Gegenstandsaspekt, Einsetzungsaspekt, Rechenaspekt) jeweils zur Geltung kommen!

Diese Fragestellung trägt der Behauptung von Werner Peschek und Edith Schneider (2002) Rechnung, wonach ...

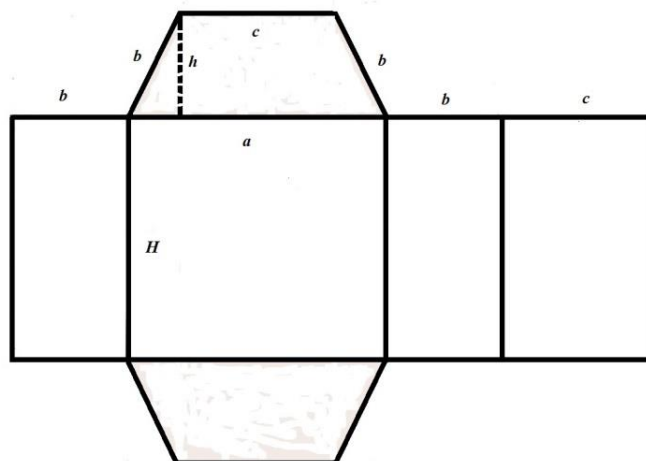
... ein wesentlicher Vorteil der neuen Technologien darin gesehen wurde, die technischen Aspekte mathematischer Aktivität zu übernehmen und in die Black-Box des Computers zu verlagern, in die Hoffnung bestand, durch den Einsatz neuer Technologien direkt auf der begrifflichen Ebene ansetzen zu können.

Aufgabe 5: Gegenstands- und Einsetzungsaspekt

Es liegen mehrere Behälter vor. In Behälter A befindet sich eine Zahl. In Behälter B befindet sich eine davon verschiedene Zahl. Die Zahlen dieser beiden Behälter sollen getauscht werden. Dabei wird beim Übertragen einer Zahl in einen anderen Behälter die dort vorhandene Zahl „gelöscht“ (überschrieben).

Beschreiben Sie eine Strategie zur Lösung des Problems, so dass die Anweisungen als Programm auf einem Computer ausführbar wären (oder tatsächlich sind) Die Programmiersprache ist dabei frei wählbar.

Aufgabe 6: Inhaltliche Begründung einer Formel durch Uminterpretation



Bearbeiten Sie die Abbildung des Netzes für ein Prisma mit einem gleichschenkligen Trapez als Grund- und Deckfläche! a , b und c sind die Seiten, h die Höhe eines gleichschenkligen Trapezes, H die Höhe und O die Oberfläche des Prismas.

Begründen Sie folgende Formeln mit Hilfe geometrischer Überlegungen!

$$H = \frac{O - (a+c) \cdot h}{a+2b+c} \text{ und } h = \frac{O - (a+2b+c) \cdot H}{a+c}$$

Welche Möglichkeiten/Schwierigkeiten für den Lernprozess sehen Sie dabei?

Aufgabe 7: Termstrukturerkennung mittels Einrahmung

Beschreiben Sie die Struktur des nachfolgenden algebraischen Ausdrucks durch mögliche Einrahmungen zusammengehöriger Teile.

$$\frac{3 + (a - b) \cdot (a + b)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Welches Potential haben „Einrahmungen“ im Kontext der Termstrukturerkennung?

Beispiel für eine einfache Einrahmung des Ausdrucks ist

$$\frac{\boxed{3 + (a - b) \cdot (a + b)}}{\boxed{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Aufgabe 8: Termstrukturerkennung bei vorgegebener algebraischer Struktur

Wenden Sie die algebraische Struktur $A \cdot B - C$ auf die folgenden Ausdrücke an!

Es sind dabei keinerlei Umformungen in äquivalente Ausdrücke erlaubt!

$$3x^2y + 3x$$

$$\frac{1}{2} \cdot (x + y) - \frac{x - y}{2}$$

$$\frac{x + y}{2} \cdot z - \frac{x - y}{2}$$

$$x \cdot (y + xz)$$

Geben Sie die angeführten Terme in ein Computer Algebra System (CAS) ein! Was fällt Ihnen dabei in Hinblick auf die Termstrukturen und Schreibkonventionen auf?

Aus Sicht der Technologie geht es auch darum, Erfahrungen zu sammeln, wie unterschiedliche CAS mit Eingaben umgehen. Bei einzeliliger Eingabe von Brüchen müssen bei einigen Systemen Klammern um den Zähler gesetzt werden. Bei Variablen wie xz ohne Angabe eines Malpunkts wird diese Eingabe von manchen Systemen als eine Variable mit dem Namen " xz " abgespeichert, obwohl in den meisten Fällen das Produkt $x \cdot z$ gemeint ist.