

Analysis

Ausführliche Lösungen

DMK | Deutschschweizerische Mathematikkommission des VSMP
(Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte)

Analysis

Ausführliche Lösungen

Herausgeberin: DMK Deutschschweizerische Mathematikkommission des VSMP
(Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte), dmk.vsmv.ch

Autoren: Baoswan Dzung Wong, Marco Schmid, Regula Sourlier, Hansjürg Stocker, Reto Weibel
Gesamtleitung: Barbara Fankhauser

1. Auflage 2022
978-3-280-04201-4 Print
978-3-280-09236-1 E-Book

Satz und Grafiken: Marco Schmid, Baar
Titelbild: Atelier Tschachtli, Bern

Orell Füssli Verlag, www.ofv.ch
© 2022 Orell Füssli AG, Zürich
Alle Rechte vorbehalten



Abdruck und Vervielfältigung sowie Erstellen von Kopien
irgendwelcher Art zu irgendwelchen Zwecken sind – auch
nur auszugsweise – nur mit Bewilligung des Verlags gestattet.

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter www.dnb.de abrufbar.

Weiterer Werkbestandteil:
Analysis – Aufgaben, 978-3-280-04200-7

Orell Füssli Verlag Lernmedien
lernmedien@orellfuessli.com
www.ofv.ch/lernmedien

Inhaltsverzeichnis

1	Folgen und Reihen	1
1.1	Einführung	1
1.2	Verschiedene Typen von Folgen und Reihen	4
1.3	Unendliche geometrische Folgen und Reihen	9
1.4	Weitere Themen	12
1.5	Vermischte Aufgaben	21
1.6	Kontrollaufgaben	26
2	Grenzwerte	30
2.1	Grenzwerte von Folgen	30
2.2	Grenzwerte von Funktionen	34
2.3	Weitere Themen	39
2.4	Vermischte Aufgaben	43
2.5	Kontrollaufgaben	45
3	Differentialrechnung	47
3.1	Einleitung	47
3.2	Graphisches Ableiten	53
3.3	Ableitungsregeln	55
3.4	Tangente, Normale und Schnittwinkel	67
3.5	Spezielle Punkte und Eigenschaften von Kurven	75
3.6	Aufstellen von Funktionsgleichungen	89
3.7	Extremwertaufgaben	95
3.8	Weitere Themen	112
3.9	Vermischte Aufgaben	119
3.10	Kontrollaufgaben	128
4	Integralrechnung	137
4.1	Das Integral als Umkehrung des Differenzierens	137
4.2	Flächenberechnung anhand von Unter- und Obersummen	143
4.3	Hauptsatz der Infinitesimalrechnung	151
4.4	Unterschiedliche Bedeutungen des Integrals	156
4.5	Uneigentliche Integrale	175
4.6	Breitgefächerte Anwendungen	179
4.7	Differentialgleichungen	185
4.8	Weitere Themen	190
4.9	Vermischte Aufgaben	196
4.10	Kontrollaufgaben	209

X Funktionen	217
X.1 Grundlagen	217
X.2 Weitere Aspekte im Zusammenhang mit Funktionen	225
X.3 Polynomfunktionen (ganzrationale Funktionen)	238
X.4 Gebrochenrationale Funktionen (Pole, Lücken, Asymptoten)	243
X.5 Winkel-, Exponential- und Logarithmusfunktionen	245

1 Folgen und Reihen

1. Mögliche Fortsetzungen:

- a) 100'000, 1'000'000, ...; $a_k = 10^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$
- b) 19, 21, ...; alle ungeraden natürlichen Zahlen ab 5; $a_k = 2k + 3$, $k \in \mathbb{N}$
- c) 48, 63, 80, ...; alle Quadratzahlen minus eins; $a_k = k^2 - 1$, $k \in \mathbb{N}$
- d) 3, 5, ...; Dezimalbruchentwicklung von π
- e) 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 6, ...; auf $k \in \mathbb{N}$ folgen k Nullen
- f) 21, 34, ...; Fibonacci-Zahlen
- g) $\frac{1}{42}, \frac{1}{56}, \dots$; $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}$
- h) Zusatzzahl 1; Ziehung Schweizer Zahlenlotto
- i) 22, 29, ...; $k \in \mathbb{N}$ als Differenzenfolge
- j) 15, 26, ...; Cake Numbers: $a_k = \frac{1}{6}(k^3 - 3k^2 + 8k)$, $k \in \mathbb{N}$ oder
16, 32, ...; Zweierpotenzen: $a_k = 2^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$
- k) 70, 92, ...; Pentagonalzahlen: $a_k = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$, $k \in \mathbb{N}$
- l) 30, 31, ...; Anzahl Tage der Monate
- m) 0, 7; Geburtsdatum von LEONHARD EULER: 15.04.1707
- n) 60, 120, ...; $a_k = (k-1)(k-2)(k-3)$, $k \in \mathbb{N}$
- o) 19, 23, ...; Primzahlen
- p) 7, 10, ...; $2k$, $(2k-1)$ -Struktur; $a_{2k} = 2k - 1$, $a_{2k-1} = 2k$, $k \in \mathbb{N}$
- q) 40, 57, ...; Kartenhauszahlen: $a_k = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$, $k \in \mathbb{N}$
- r) 20, 50, ...; Münz- und Notenwerte in der Schweiz
- s) 4, 3, ...; Anzahl Buchstaben von 1, 2, 3, 4, ...
- t) 1, 1; Telefonnummer ORELL FÜSSLER VERLAG
- u) 15'622, 78'122, ...; $a_k = 5^k - 3$, $k \in \mathbb{N}$
- v) 1, 0, ...; 1, falls $k \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist, sonst 0

1.1 Einführung

2. a) $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, ... $\Rightarrow 1, 3, 5, 7, 9, 11$

$$a_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 14 = 12, a_2 = 2^2 - 3 \cdot 2 + 14 = 12, \dots \Rightarrow 12, 12, 14, 18, 24, 32$$

$$a_1 = \cos(1 \cdot \pi) = -1, a_2 = \cos(2 \cdot \pi) = 1, \dots \Rightarrow -1, 1, -1, 1, -1, 1$$

- b) $a_2 = 2a_1 - 4 = 22$, $a_3 = 2a_2 - 4 = 40$, ... $\Rightarrow 13, 22, 40, 76, 148$

$$a_2 = 21 - 3a_1 = 9, a_3 = 21 - 3a_2 = -6, \dots \Rightarrow 4, 9, -6, 39, -96$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 2 = 3, a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 1 = 4, \dots \Rightarrow 2, 1, 3, 4, 7$$

$$a_2 = a_1 + 1 = 8, a_3 = a_2 + 2 = 10, \dots \Rightarrow 7, 8, 10, 13, 17$$

3. a) $a_k = 2k$ b) $a_k = 2k - 1$ c) $a_k = 2^k$ d) $a_k = k^2$

- e) $a_k = 7k$ f) $a_k = 7k + 1$ g) $a_k = 10k - 23$ h) $a_k = 3^k$

4. a) $a_k = \frac{1}{k}$ b) $a_k = \frac{k}{k+1}$ c) $a_k = \frac{(-2)^k}{2k+1}$ d) $a_k = \frac{8k-4}{8k-1}$

5. a) $a_k = \frac{2k-1}{4k}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{50} = \frac{99}{200}, a_{51} = \frac{101}{204}$ b) $a_k = \frac{2+k}{3k+1}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{50} = \frac{52}{151}, a_{51} = \frac{53}{154}$
6. a) $a_1 = 3, a_{k+1} = a_k + 4, k \in \mathbb{N}$ b) $a_1 = 6, a_{k+1} = 2a_k, k \in \mathbb{N}$
 c) $a_1 = 6, a_{k+1} = 2a_k + 1, k \in \mathbb{N}$ d) $a_1 = 4, a_{k+1} = 3a_k - 1, k \in \mathbb{N}$
7. a) $1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1 \Rightarrow a_n = a_{n+6k}$
 $\Rightarrow a_{100} = a_{4+6 \cdot 16} = a_4 = -1, a_{101} = -3, a_{102} = -2$ und $a_{107} = a_{101} = -3$
 b) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = a_{n+6k}$
 $\Rightarrow a_{100} = a_{4+6 \cdot 16} = a_4 = \frac{1}{2}, a_{101} = 1, a_{102} = 2$ und $a_{107} = a_{101} = 1$
8. Es gilt für alle Teilaufgaben $k \in \mathbb{N}$.
 a) $11, 15, 19, 23, 27$ und $a_k = 4k - 1$ b) $-1, -5, -9, -13, -17$ und $a_k = 11 - 4k$
 c) $2, 3, 4, 5, 6$ und $a_k = k - 1$ d) $-3, -2, -1, 0, 1$ und $a_k = k - 6$
9. a) $16, 32, 64, 128, 256$ und $a_k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}, k \in \mathbb{N}$
 b) $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$ und $a_k = 243 : 3^k = 3^{5-k}, k \in \mathbb{N}$
 c) $36, -54, 81, -\frac{243}{2}, \frac{729}{4}$ und $a_k = 16 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^{k-1} = \frac{-32}{3} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^k, k \in \mathbb{N}$
 d) $-2, -2, -2, -2, -2$ und $a_k = -2, k \in \mathbb{N}$
10. a) $a_1 = 36, a_{k+1} = a_k + 2, k \in \mathbb{N}$ b) $a_1 = -1, a_{k+1} = a_k - 2, k \in \mathbb{N}$
 c) $a_1 = -3, a_{k+1} = -3a_k, k \in \mathbb{N}$ d) $a_1 = 1, a_{k+1} = a_k + 2k + 1$ oder
 $a_{k+1} = (\sqrt{a_k} + 1)^2, k \in \mathbb{N}$
11. a) explizit: $a_k = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$ oder $a_k = -\cos(k\pi)$ oder $a_k = \sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{N}$
 rekursiv: $a_1 = 1, a_{k+1} = -a_k$ oder $a_{k+1} = a_k + (-1)^k \cdot 2, k \in \mathbb{N}$
 b) explizit: $a_k = (-1)^k$ oder $a_k = \cos(k\pi), k \in \mathbb{N}$
 rekursiv: $a_1 = -1, a_{k+1} = -a_k$ oder $a_{k+1} = a_k + (-1)^{k+1} \cdot 2, k \in \mathbb{N}$
 c) explizit: $a_k = \frac{1}{2} - (-1)^k \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-(-1)^k}{2}$ oder $a_k = \left|\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right|, k \in \mathbb{N}$
 rekursiv: $a_1 = 1, a_2 = 0, a_{k+2} = a_k, k \in \mathbb{N}$
 d) explizit: $a_k = \sin\left((k-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ oder $a_k = -\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{N}$
 rekursiv: $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{k+2} = -a_k$ oder $a_1 = 0, a_{k+1} = a_k + \sqrt{2} \cdot \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right), k \in \mathbb{N}$
12. a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}$ und $a_k = \frac{1}{k!}, k \in \mathbb{N}$
- 1. Variante:

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{k} = \frac{\frac{a_{k-2}}{k-1}}{k} = \frac{\frac{a_{k-3}}{k-2}}{k(k-1)} = \frac{\frac{a_{k-4}}{k-3}}{k(k-1)(k-2)} = \dots = \frac{\frac{a_1}{2}}{k(k-1)(k-2)\dots(k-(k-3))} = \frac{a_1}{k(k-1)\dots 3 \cdot 2} = \frac{1}{k!}$$
 - 2. Variante: $a_5 = \frac{1}{120} = \frac{1}{5!} \Rightarrow a_6 = \frac{a_5}{6} = \frac{\frac{1}{5!}}{6} = \frac{1}{6!} \Rightarrow a_k = \frac{a_{k-1}}{k} = \frac{\frac{1}{(k-1)!}}{k} = \frac{1}{k!}$
- b) $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}$ und $a_k = \frac{2^k-1}{2^{k-1}} = 2 - 2^{1-k}, k \in \mathbb{N}$
 $a_5 = \frac{31}{16} = \frac{32-1}{16} = 2 - \frac{1}{16} = 2 - \frac{1}{2^4} \Rightarrow a_6 = a_5 + \frac{1}{2^5} = \left(2 - \frac{1}{2^4}\right) + \frac{1}{2^5} = 2 - \frac{1}{2^5}$
 $\Rightarrow a_k = 2 - \frac{1}{2^{k-1}}$
- c) $1, -4, 9, -16, 25, -36$ und $a_k = (-1)^{k-1} \cdot k^2, k \in \mathbb{N}$
 $a_5 = 5^2$ und $a_6 = -6^2 \Rightarrow a_5 = -(-1)^5 \cdot 5^2$ und $a_6 = -(-1)^6 \cdot 6^2$
 $\Rightarrow a_k = -(-1)^k \cdot k^2 = (-1)^{k-1} \cdot k^2$

d) $2, 1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{-1}{32}, \frac{-1}{64}, \frac{1}{128}, \dots$ und $a_k = \sqrt{2} \cdot 2^{2-k} \cdot \sin\left((2k-1)\frac{\pi}{4}\right), k \in \mathbb{N}$
 $a_6 = 2^{-4}, a_7 = -2^{-5}, a_8 = -2^{-6}, a_9 = 2^{-7} \Rightarrow a_k = \sqrt{2} \cdot 2^{2-k} \cdot \sin\left((2k-1)\frac{\pi}{4}\right)$

13. a) $(a_k) = (b_k) = (c_k): 1, 11, 111, 1111, 11'111, \dots$

b) $(a_k) = (b_k) = (c_k): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

14. a) $1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots \Rightarrow s_k = k^2 \Rightarrow s_{100} = 100^2 = 10'000$

b) $1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots \Rightarrow s_k = \begin{cases} \frac{k+1}{2}, & \text{für } k \text{ ungerade} \\ \frac{-k}{2}, & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases} \Rightarrow s_{100} = \frac{-100}{2} = -50$

c) $1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots \Rightarrow s_k = 2^k - 1$
 $\Rightarrow s_{100} = 2^{100} - 1 = 1'267'650'600'228'229'401'496'703'205'375$

15. a) $12 + 14 + 16 + 18 = 60$

b) $12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 + 32 = 242$

c) $\left(\sum_{k=1}^{11} a_k\right) + a_{12} + a_{13} + a_{14} = 242 + 34 + 36 + 38 = 350$

d) $20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 + 32 + 34 + 36 + 38 = \sum_{k=1}^{14} a_k - \sum_{k=1}^4 a_k = 350 - 60 = 290$

e) $2 \cdot \sum_{k=1}^n a_k = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1)$
 $= 12 + 14 + \dots + (2n+8) + (2n+10)$
 $+ (2n+10) + (2n+8) + \dots + 14 + 12$
 $= (2n+22) + (2n+22) + \dots + (2n+22) + (2n+22)$
 $= n(2n+22) = 2n^2 + 22n$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k = \frac{2n^2+22n}{2} = n^2 + 11n$

16. a) $\sum_{k=1}^7 5k$ b) $\sum_{k=1}^{50} 5k$

c) $\sum_{k=5}^{21} 5k = \sum_{k=1}^{17} (20 + 5k)$ d) $\sum_{k=1}^5 3^k$

e) $\sum_{k=1}^{20} k^2$ f) $\sum_{k=1}^{116} 3(k-1) = \sum_{k=1}^{116} (3k-3)$

17. a) $(a_k) = \sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}, \sqrt{5} - 2, \sqrt{6} - \sqrt{5}, \sqrt{7} - \sqrt{6}, 2\sqrt{2} - \sqrt{7}, 3 - 2\sqrt{2}, \dots$

$s_3 = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{3}) = -1 + 2 = 1$

Alle Summanden bis auf zwei lassen sich wegstreichen.

$\Rightarrow s_8 = -1 + 3 = 2 \Rightarrow s_n = \sqrt{n+1} - 1 (n \in \mathbb{N})$

Analog für die weiteren Teilaufgaben.

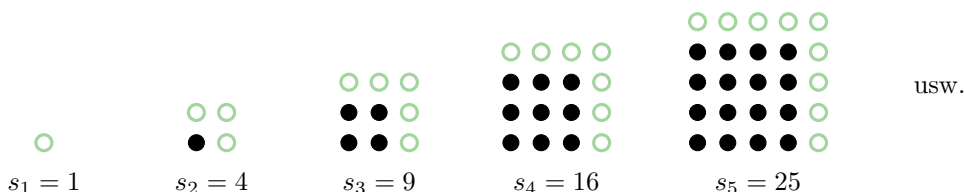
b) $s_4 = 1 - \frac{1}{(4+1)^2} = \frac{24}{25}, s_9 = 1 - \frac{1}{(9+1)^2} = \frac{99}{100}, s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}, n \in \mathbb{N}$

c) $s_{15} = 1 - \frac{1}{\sqrt{15+1}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, s_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}, n \in \mathbb{N}$

18. a) rekursiv: $a_1 = 1, a_{k+1} = a_k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$); explizit: $a_k = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

b) 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 $\Rightarrow s_n = n^2, n \in \mathbb{N}$

c)



d) $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{1000} = s_{1000} - s_{10} = 1000^2 - 10^2 = 999'900$

19. a) $a_2 = a_1 - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, a_3 = a_2 - \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}, a_4 = a_3 - \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{12} - \frac{1}{30} = \frac{1}{20},$
 $a_5 = a_4 - \frac{2}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{20} - \frac{1}{60} = \frac{1}{30}, a_6 = a_5 - \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{30} - \frac{1}{105} = \frac{1}{42}$

b) $s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, s_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}, s_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}, s_5 = \frac{4}{5} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow s_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$

c) $s_k = (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}) + a_k \Rightarrow a_k = s_k - s_{k-1} \Rightarrow a_k = \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k(k+1)}, k \in \mathbb{N}$

20. $s_n = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)$

1.2 Verschiedene Typen von Folgen und Reihen

21. Zur Überprüfung jeweils die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder bilden: $a_{k+1} - a_k$.

a) Ist eine AF. Rekursiv: $a_1 = 1, a_{k+1} = a_k + 3$; explizit: $a_k = 1 + (k-1) \cdot 3 = 3k - 2$.

b) Ist eine AF. Rekursiv: $a_1 = 1, a_{k+1} = a_k + 1$; explizit: $a_k = 1 + (k-1) \cdot 1 = k$.

c) Ist keine AF, da $18 - 13 = 5 \neq 7 = 25 - 18$.

d) Ist eine AF. Rekursiv: $a_1 = 12, a_{k+1} = a_k + 8$; explizit: $a_k = 12 + (k-1) \cdot 8 = 8k + 4$.

e) Ist keine AF, da $11 - 14 = -3 \neq -2 = 9 - 11$.

f) Ist eine AF. Rekursiv: $a_1 = 50, a_{k+1} = a_k - 10$; explizit: $a_k = 50 + (k-1) \cdot (-10) = 60 - 10k$.

22. a) $a_2 = 6 + 8 = 14 \Rightarrow a_3 = 14 + 8 = 22 \Rightarrow a_4 = 22 + 8 = 30 \Rightarrow a_5 = 30 + 8 = 38$

b) $d = 7 - 3 = 4 \Rightarrow a_5 = 15 + 4 = 19$

c) $a_5 = 5 + (5-1) \cdot 7 = 33$

d) $a_5 = 34 + (5-1) \cdot 5 = 54$

23. a) $d = \frac{524'288-2}{2775-1} = 189 \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = 2 + 189 = 191$ und $a_3 = 191 + 189 = 380$

b) rekursiv: $a_1 = 2, a_{k+1} = a_k + 189, k \in \mathbb{N}$; explizit: $a_k = 2 + (k-1) \cdot 189, k \in \mathbb{N}$

24. a) $d = \frac{a_5 - a_3}{5-3} = \frac{6-5}{5-3} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_k = 4 + (k-1) \cdot \frac{1}{2}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{20} = 4 + (20-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$

b) $d = \frac{a_{20} - a_{10}}{20-10} = \frac{18-12}{20-10} = \frac{3}{5} \Rightarrow a_1 = a_{10} - (10-1)d = 12 - (10-1) \cdot \frac{3}{5} = \frac{33}{5}$
 $\Rightarrow a_k = \frac{33}{5} + (k-1) \cdot \frac{3}{5}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow a_4 = \frac{33}{5} + (4-1) \cdot \frac{3}{5} = \frac{42}{5} = 8.4$

25. $a_0 = 800, a_{25} = 1575 \Rightarrow d = \frac{1575-800}{25-0} = 31 \Rightarrow a_1 = 831, a_{k+1} = a_k + 31, k \in \{1, 2, \dots, 24\}$

26. $d = -\frac{2}{77}$, die Gleichung $0 = \frac{1}{7} + (k-1) \cdot \left(-\frac{2}{77}\right)$ ergibt $k = 6.5$, also 6 Glieder.

27. $(m^2 + 3) - m = (4m^2 - 2m) - (m^2 + 3) \Leftrightarrow 2m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{2}$ und $m_2 = 2$

28. $(m - d) + m + (m + d) = 3m = 30 \Rightarrow m = 10$

$$(m - d)^2 + m^2 + (m + d)^2 = 3m^2 + 2d^2 = 318 \Rightarrow 2d^2 = 318 - 3m^2 = 18 \Rightarrow d = \pm 3$$

Die AF lautet 7, 10, 13 oder 13, 10, 7.

29. $d = 7$ und $a_n = 20 + (n - 1) \cdot 7 = 1490 \Rightarrow n = 211$

$$\begin{array}{r|l} 20 + 27 + \dots + 1490 = s_{211} & \\ 1490 + 1483 + \dots + 20 = s_{211} & + \\ \hline 1510 + 1510 + \dots + 1510 = 2s_{211} & \end{array}$$

$$s_{211} = \frac{211 \cdot 1510}{2} = 159'305$$

30. Die Summe einmal in der gegebenen Form und einmal in umgekehrter Reihenfolge direkt darunter aufschreiben und die übereinanderstehenden Summanden addieren. Sei $d = a_{k+1} - a_k$.

$$\begin{array}{r|l} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = s_n & \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 = s_n & \\ \hline a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \dots + a_n - 2d + a_n - d + a_n = s_n & \\ a_n + a_n - d + a_n - 2d + \dots + a_1 + 2d + a_1 + d + a_1 = s_n & + \\ \hline (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = 2s_n & \end{array}$$

$$\Rightarrow 2s_n = n(a_1 + a_n) \Leftrightarrow s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Anschliessend muss nur noch die explizite Formel für a_n eingesetzt werden:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + [a_1 + (n - 1)d]) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

31. a) $a_1 = 1$ und $d = 1 \Rightarrow a_{100} = 100 \Rightarrow s_{100} = \frac{100}{2}(1 + 100) = 5050$

b) $a_1 = 1$ und $d = 2 \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 99 \Rightarrow n = 50 \Rightarrow s_{50} = \frac{50}{2}(1 + 99) = 2500$

c) $a_1 = 53$ und $d = 3 \Rightarrow a_n = 53 + (n - 1) \cdot 3 = 335 \Rightarrow n = 95 \Rightarrow s_{95} = \frac{95}{2}(53 + 335) = 18'430$

d) $a_1 = 2$ und $d = 2 \Rightarrow s_{50} = 50 \cdot 2 + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 2 = 2550$

e) $s_{45} = 45 \cdot 0.5 + \frac{45 \cdot 44}{2} \cdot 0.2 = 220.5$

f) $d = \frac{11.6 - 48.8}{33 - 2} = -1.2 \Rightarrow a_1 = 48.8 - (-1.2) = 50 \Rightarrow s_{50} = 50 \cdot 50 + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot (-1.2) = 1030$

32. a) $d = \frac{71 - 8}{10 - 1} = 7 \Rightarrow a_1 = 8, a_2 = 15, a_3 = 22, a_4 = 29, a_5 = 36, a_6 = 43, a_7 = 50$

b) $a_{50} = 8 + (50 - 1) \cdot 7 = 351$

c) $a_{21} + a_{22} + \dots + a_{50} = s_{50} - s_{20} = \left(\frac{50}{2}(8 + 351)\right) - \left(20 \cdot 8 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 7\right) = 7485$

33. a) $a_1 = 100$ und $d = 2 \Rightarrow a_n = 100 + (n - 1) \cdot 2 = 10'000 \Rightarrow n = 4951$

$$\Rightarrow s_{4951} = \frac{4951}{2}(100 + 10'000) = 25'002'550$$

b) $a_1 = 999$ und $d = 2 \Rightarrow a_n = 999 + (n - 1) \cdot 2 = 9999 \Rightarrow n = 4501$

$$\Rightarrow s_{4501} = \frac{4501}{2}(999 + 9999) = 24'750'999$$

c) $a_1 = 77$ und $d = 7 \Rightarrow a_n = 77 + (n - 1) \cdot 7 = 7777 \Rightarrow n = 1101$

$$\Rightarrow s_{1101} = \frac{1101}{2}(77 + 7777) = 4'323'627$$

34. a) $s_{111} = 111 \cdot 7 + \frac{111 \cdot 110}{2} \cdot 2 = 12'987; s_n = n \cdot 7 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2 + 6n = n(n + 6)$

b) $s_{111} = 111 \cdot 12 + \frac{111 \cdot 110}{2} \cdot 2 = 13'542; s_n = n \cdot 12 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2 + 11n = n(n + 11)$

35. a) $a_1 = 996, d = -4$ und $a_{20} = 920 \Rightarrow s_{20} = \frac{20}{2}(996 + 920) = 19'160$

b) $a_1 = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{4}$ und $a_{13} = \frac{7}{2} \Rightarrow s_{13} = \frac{13}{2}(\frac{1}{2} + \frac{7}{2}) = 26$

c) $a_1 = 25, d = \frac{3}{2}$ und $a_{41} = 85 \Rightarrow s_{41} = \frac{41}{2}(25 + 85) = 2255$

d) $a_1 = -21, d = \frac{5}{3}$ und $a_{25} = 19 \Rightarrow s_{25} = \frac{25}{2}(-21 + 19) = -25$

36. a) $s_7 = \sum_{k=1}^7 3k = 84$

b) $s_8 = \sum_{k=1}^8 (50 - 5k) = 220$

c) $s_6 = \sum_{k=1}^6 (\frac{1}{2}k + \frac{13}{2}) = 49.5$

d) $s_{14} = \sum_{k=1}^{14} (17 - 5k) = -287$

e) $s_{45} = \sum_{k=1}^{45} (\frac{1}{3}k) = 345$

f) $s_{11} = \sum_{k=1}^{11} (8k - 39) = 99$

37. 1. Bedingung: $a_1 + (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) = 33 \Rightarrow 3a_1 + 6d = 33 \Rightarrow a_1 = 11 - 2d$

2. Bedingung: $a_1 \cdot (a_1 + d) \cdot (a_1 + 2d) = 231 \Rightarrow (11 - 2d) \cdot (11 - d) \cdot 11 = 231$
 $\Rightarrow d = 4$ oder $d = 12.5$

$a_1 = 3, d = 4$ oder $a_1 = -14, d = 12.5$

38. $s_{10} = 10 \cdot a_1 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 0.06 = 4$ liefert $a_1 = 0.13$, d. h., das erste Stück ist 13 cm lang.

39. $s_n = 6000n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 500 = 120'000 \Rightarrow 250n^2 + 5750n - 120'000 = 0$
 $\Rightarrow n_{1,2} = \frac{-23 \pm \sqrt{2449}}{2} \Rightarrow n_1 \approx 13.24 \ (n_2 < 0)$

$s_{13} = 13 \cdot 6000 + \frac{13 \cdot 12}{2} \cdot 500 = 117'000 \Rightarrow$ letzte Rate = 3000

Die letzte Rate beträgt 3000 Franken und das Darlehen ist nach 14 Jahren zurückbezahlt.

40. Zurückgelegte Wegstrecke w_k in der k -ten Sekunde: $w_1 = 0.3, d = 0.6 \Rightarrow w_k = 0.6k - 0.3$

$\Rightarrow$ zurückgelegter Weg nach 30 Sekunden: $s_{30} = \sum_{k=1}^{30} w_k = \frac{30}{2} \cdot (w_1 + w_{30}) = 270$ m

Zurückgelegter Weg nach n Sekunden:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (w_1 + w_n) = \frac{n}{2} \cdot (0.3 + (0.6n - 0.3)) = 0.3n^2 = 120 \Rightarrow n_{1,2} = \pm 20$

$\Rightarrow$ benötigte Zeit: 20 Sekunden

41. Variante A: $s_{10} = 120'000 \cdot 10 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 8000 = 1'560'000$ Franken

Variante B: $s_{20} = 60'000 \cdot 20 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 2000 = 1'580'000$ Franken

Variante B ist vorteilhafter als Variante A.

Alternativer Lösungsweg:

Im ersten Jahr verdient sie mit Variante B 60'000 + 62'000 Franken, mit Variante A 120'000 Franken; im zweiten Jahr mit Variante B 64'000 + 66'000 Franken, mit Variante A 128'000 Franken. Damit ist offensichtlich, dass sie mit Variante B jährlich 2000 Franken mehr verdient als mit Variante A, und zwar jeweils im zweiten Semester.

42. a) Ist eine GF. Rekursiv: $a_1 = 1, a_k = 4 \cdot a_{k-1}$; explizit: $a_k = 4^{k-1}$.
 b) Ist keine GF, da $\frac{6.75}{4.5} = \frac{3}{2} \neq \frac{4}{3} = \frac{9}{6.75}$.
 c) Ist eine GF. Rekursiv: $a_1 = 2, a_k = 3 \cdot a_{k-1}$; explizit: $a_k = 2 \cdot 3^{k-1}$.
 d) Ist keine GF, da $\frac{54}{-18} = -3 \neq -3.5 = \frac{-189}{54}$.
 e) Ist eine GF. Rekursiv: $a_1 = 12, a_k = 0.5 \cdot a_{k-1}$; explizit: $a_k = 12 \cdot 0.5^{k-1}$.
 f) Ist eine GF. Rekursiv: $a_1 = 10, a_k = -2 \cdot a_{k-1}$; explizit: $a_k = 10 \cdot (-2)^{k-1}$.
43. a) $q = \frac{96}{64} = \frac{3}{2}, a_8 = 64 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7 = \frac{2187}{2}$ b) $q = \sqrt[3]{\frac{216}{8}} = 3, a_8 = 8 \cdot 3^6 = 5832$
 c) $q = \sqrt[3]{\frac{-12.5}{100}} = \frac{-1}{2}, a_8 = 100 \cdot \frac{-1}{2} = -50$ d) $q = \pm \sqrt[22]{\frac{9216}{\frac{9}{2}}} = \pm \sqrt{2}, a_8 = \frac{9}{2} \cdot (\sqrt{2})^4 = 18$
44. a) Ja; $q = 1.1, a_8 = 1.1^7 = 1.9487 \dots$ b) Ja; $q = \frac{0.2}{0.1} = 2, a_8 = 0.1 \cdot 2^7 = 12.8$
 c) Nein, denn $\frac{-18}{24} = \frac{-3}{4} \neq \frac{-2}{3} = \frac{12}{-18}$ d) Nein, denn $\frac{0.99}{0.9} = \frac{11}{10} \neq \frac{111}{110} = \frac{0.999}{0.99}$
 e) Ja; $q = \frac{0.81}{0.9} = 0.9, a_8 = 0.9 \cdot 0.9^7 = 0.43046 \dots$ f) Ja; $q = \frac{-18}{12} = \frac{-3}{2}, a_8 = 12 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^7 = \frac{-6561}{32} = -205.03125$
45. Für die drei Zahlen gilt: $x - 17, x, x + 34$.
 $\Rightarrow \frac{x}{x-17} = \frac{x+34}{x} \Rightarrow x^2 = (x-17)(x+34) \Rightarrow x = 34 \Rightarrow 17, 34 \text{ und } 68$
46. Produkt: $\left(\frac{m}{q}\right) \cdot m \cdot (mq) = m^3 = -216 \Rightarrow m = -6$
 Summe: $\frac{m}{q} + m + mq = m \left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 9 \Rightarrow \frac{1}{q} + 1 + q = \frac{9}{m} = -\frac{3}{2} \Rightarrow q = -2 \text{ oder } q = -\frac{1}{2}$
 Die GF lautet 3, -6, 12 oder 12, -6, 3.
47. $q = \frac{9}{8} \Rightarrow a_k = 8 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{k-1} < 10^{12} \Rightarrow (k-1) \ln\left(\frac{9}{8}\right) < 12 \ln(10) - \ln(8)$
 $\Rightarrow k < \frac{12 \ln(10) - \ln(8) + \ln\left(\frac{9}{8}\right)}{\ln\left(\frac{9}{8}\right)} \approx 217.94 \Rightarrow 217 \text{ Glieder sind kleiner.}$
48. $q = \frac{2021}{2022} \Rightarrow a_k = 2022 \cdot \left(\frac{2021}{2022}\right)^{k-1} > 1291 \Rightarrow (k-1) \ln\left(\frac{2021}{2022}\right) > \ln\left(\frac{1291}{2022}\right)$
 $\Rightarrow k < \frac{\ln\left(\frac{1291}{2022}\right)}{\ln\left(\frac{2021}{2022}\right)} + 1 \approx 907.99 \Rightarrow 907 \text{ Glieder sind kleiner.}$
49. $q = 1.1 \Rightarrow a_k = 1.1^{k-1} = \frac{10}{11} \cdot 1.1^k$
 $\Rightarrow 1000 < \frac{10}{11} \cdot 1.1^k < 10'000 \Rightarrow 1100 < 1.1^k < 11'000 \Rightarrow \frac{\ln(1100)}{\ln(1.1)} < k < \frac{\ln(11'000)}{\ln(1.1)}$
 $\Rightarrow 73.48 < k < 97.64 \Rightarrow \text{Es liegen 24 Glieder } (a_{74}, \dots, a_{97}) \text{ dazwischen.}$
50. a) $q = \sqrt[10]{2} \approx 1.0718 \Rightarrow 7.18\%$ b) $1.05^k = 2 \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{\ln(1.05)} \approx 14.2 \text{ Jahre}$
51. a) $q^8 = \frac{58.96 \cdot 10^9}{48.16 \cdot 10^9} = \frac{737}{602} \Rightarrow q = \sqrt[8]{\frac{737}{602}} \Rightarrow \text{mittlere jährliche Zunahme in Prozenten } \approx 2.56\%$
 b) Berechnung des Stromverbrauchs im Jahr 2014: $48.16 \cdot 10^9 \cdot q^{34} \approx 113.8 \cdot 10^9 \text{ kWh}$. Der effektive Stromverbrauch ist nur etwa halb so gross, d.h., dieser hat weniger stark zugenommen als in den Jahren zuvor.

52. $q = \sqrt[3]{10} \Rightarrow a_2 = \sqrt[3]{10} \approx 2.15$ und $a_3 = (\sqrt[3]{10})^2 \approx 4.64$

$\Rightarrow u = 2$ und $v = 5$. Die Zahlenwerte sind als Münz- und Notenwerte anzutreffen (z. B. Schweizer Franken oder Euro).

53.
$$\begin{array}{rcl} s_{11} & = & 2 + 2 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5^2 + 2 \cdot 0.5^3 + \dots + 2 \cdot 0.5^{10} & | - \\ 0.5s_{11} & = & 2 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5^2 + 2 \cdot 0.5^3 + \dots + 2 \cdot 0.5^{10} + 2 \cdot 0.5^{11} & | + \\ \hline 0.5s_{11} - s_{11} & = & 2 \cdot 0.5^{11} - 2 \\ (0.5 - 1)s_{11} & = & 2(0.5^{11} - 1) \\ s_{11} & = & 2 \cdot \frac{0.5^{11} - 1}{0.5 - 1} = \frac{2047}{512} = 3.998\dots \end{array}$$

54.
$$\begin{array}{rcl} s_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n & | + \\ q \cdot s_n & = & a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_{n+1} & | - \\ \hline s_n - q \cdot s_n & = & a_1 & - a_{n+1} \\ s_n - q \cdot s_n & = & a_1 - a_1 \cdot q^n \\ s_n \cdot (1 - q) & = & a_1 \cdot (1 - q^n) & | : (1 - q) \\ s_n & = & a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{array}$$

Für $|q| < 1$ ist der mittlere Term vorteilhafter.

55. a) $q = \frac{48}{32} = \frac{3}{2} \Rightarrow s_6 = 32 \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^6 - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 665$
 b) $q = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow s_8 = 2 \cdot \frac{(-3)^8 - 1}{(-3) - 1} = -3280$
 c) $q = \frac{4}{3} = 2, a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^{n-1} = \frac{4096}{3} \Rightarrow n = 12 \Rightarrow s_{12} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2^{12} - 1}{2 - 1} = 2730$
 d) $q = \frac{1'062'882}{-3'188'646} = \frac{-1}{3}, a_n = -3'188'646 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{9} \Rightarrow n = 16$
 $\Rightarrow s_{16} = -3'188'646 \cdot \frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^{16} - 1}{\left(\frac{-1}{3}\right) - 1} = \frac{-21'523'360}{9} = -2'391'484.\bar{4}$

56. a) $q = \frac{5}{4} = 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} \frac{5}{4} \cdot 2^{i-1} = \frac{5115}{4}$
 b) $q = \frac{3840}{7680} = \frac{1}{2}, a_n = 7680 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0.9375 \Rightarrow n = 14$
 $\Rightarrow s_{14} = \sum_{i=1}^{14} 7680 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{245'745}{16} \approx 15'359.06$
 c) $q = \frac{12}{-4} = -3, a_n = -4 \cdot (-3)^{n-1} = 708'588 \Rightarrow n = 12$
 $\Rightarrow s_{12} = \sum_{i=1}^{12} -4 \cdot (-3)^{i-1} = 531'440$
 d) $q = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}, a_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{256}{6561} \Rightarrow n = 10$
 $\Rightarrow s_{10} = \sum_{i=1}^{10} \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{58'025}{13'122} \approx 4.42$
 e) $q = \sqrt{3}, a_n = (\sqrt{3})^{n-1} = 2187 \Rightarrow n = 15$
 $\Rightarrow s_{15} = \sum_{i=1}^{15} (\sqrt{3})^{i-1} = 1093\sqrt{3} + 3280 \approx 5173.13$

57. a) $q = -4, a_1 = 1 \Rightarrow s_{11} = \frac{(-4)^{11}-1}{-4-1} = 838'861$

b) $q = 3, a_1 = 2 \Rightarrow s_8 = 2 \cdot \frac{3^8-1}{3-1} = 6560$

c) $q = \frac{3}{2}, a_1 = \frac{8192}{3} \Rightarrow s_{17} = \frac{8192}{3} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{17}-1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{129'009'091}{24} \approx 5'375'378.8$

d) $q = -4, a_1 = -1 \Rightarrow s_8 = (-1) \cdot \frac{(-4)^8-1}{-4-1} = 13'107$

58. $q = \frac{16}{15} \Rightarrow s_n = 15 \cdot \frac{\left(\frac{16}{15}\right)^n - 1}{\frac{16}{15} - 1} > 10^9 \Rightarrow \left(\frac{16}{15}\right)^n > \frac{10^9}{15} \cdot \frac{1}{15} + 1 \Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{10^9}{15^2} + 1\right)}{\ln\left(\frac{16}{15}\right)} \approx 237.2$

Es müssen mindestens 238 Glieder addiert werden.

59. $q = \sqrt[9]{2} \Rightarrow s_{10} = \frac{\left(\sqrt[9]{2}\right)^{10} - 1}{\sqrt[9]{2} - 1} \approx 14.491$

60. a) $A_2 = \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4} = 3.75$ und $A_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{4} = \frac{45}{16} = 2.8125$

b) $q = \frac{3}{4}, A_1 = 5 \Rightarrow A_k = 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

c) $A_k < 10^{-4} \Rightarrow 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} < 10^{-4} \Rightarrow k > \frac{-\ln(5) - 4 \ln(10) + \ln\left(\frac{3}{4}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 38.61$

Ab dem 39. Glied ist der Flächeninhalt kleiner als 0.0001.

d) 1, 3, 9, 27, ... $\Rightarrow$ geometrische Folge mit $q = 3$ und allgemeinem Glied $a_k = 3^{k-1}, k \in \mathbb{N}$

e) $0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+9} 13 \xrightarrow{+27} 40 \xrightarrow{+81} \dots$

Die rekursive Darstellung ist $b_k = b_{k-1} + 3^{k-2}, k > 1$ mit Startglied $b_1 = 0$.

$$\Rightarrow b_k = 0 + \underbrace{3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{k-2}}_{\text{GR}}, k > 1 \Rightarrow b_k = \frac{3^{k-1}-1}{3-1} = \frac{3^{k-1}-1}{2}$$

61. Reiskörner pro Feld: 1, 2, 4, ..., $2^{63} \Rightarrow$ GF mit $q = 2$ und $a_k = 2^{k-1}, k \in \mathbb{N}$

Alle Reiskörner zusammengezählt ergibt $s_{64} = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1 = 18'446'744'073'709'551'615$. Dies entspricht in etwa $1.84 \cdot 10^{19}$ Reiskörnern. Im Folgenden wird immer mit den gerundeten Resultaten weitergerechnet.

a) $\approx 1.84 \cdot 10^{19} : 1000 \cdot 20 = 36.8 \cdot 10^{16} \text{ g} = 36.8 \cdot 10^{10} \text{ t} = 368'000$ Millionen Tonnen

$\Rightarrow \frac{368'000}{750} = 490.\bar{6} \Rightarrow$ Die Reisernte von 490 Jahren würde nicht einmal ganz ausreichen.

b) $V_{\text{Reis}} \approx 1.84 \cdot 10^{19} : 1000 \cdot 25 = 46 \cdot 10^{16} \text{ cm}^3 = 46 \cdot 10^{10} \text{ m}^3$, Erdradius $R = 6'370'000 \text{ m}$

$\Rightarrow V_{\text{Erde}} + V_{\text{Reis}} = \frac{4}{3}\pi R^3 + 46 \cdot 10^{10} = \frac{4}{3}\pi(R+x)^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{R^3 + \frac{46 \cdot 10^{10} \cdot 3}{4\pi}} - R \approx 0.0009 \text{ m}$

Die Menge Reis, über die ganze Erdoberfläche verteilt, ergäbe eine Schicht von 0.9 mm.

1.3 Unendliche geometrische Folgen und Reihen

62. a) $s = \frac{6}{1-\frac{1}{3}} = 9$ b) $s = \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$ c) $s = \frac{200}{1-\frac{2}{5}} = 500$ d) $s = \frac{2\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3+3\sqrt{3}$

e) $s = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ f) $s = \frac{1}{1-\left(\frac{-7}{8}\right)} = \frac{8}{15}$ g) $s = \frac{\frac{5}{100'000}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{18'000}$ h) $s = \frac{38}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 54$

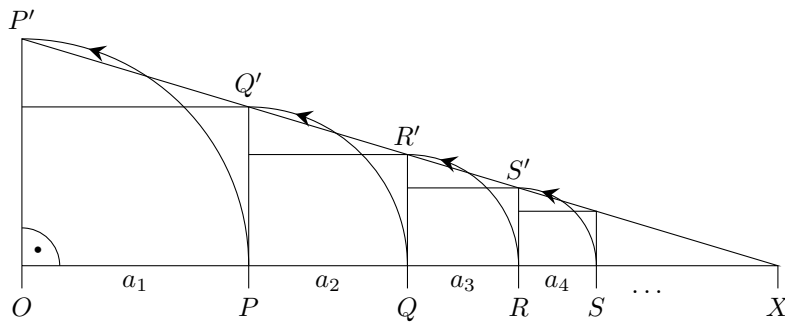
63. a) $q = \frac{9}{10} \Rightarrow s_n = \frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^n}{1-\frac{9}{10}} = 10(1-0.9^n)$

b) $s_{100} = 10(1-0.9^{100}) = 9.999734\dots$

c) $s = \frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 10$

75. $s = \frac{3.21}{1-q} \leq 4.56 \Rightarrow q \leq 0.296 \dots \approx 29.6\% \Rightarrow$ Sie müssen mindestens um 70.4 % abnehmen.

76.



Abschnittsweise Berechnung der Steigung: $m_{\overline{P'Q'}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} - 1 = q - 1$,
 $m_{\overline{Q'R'}} = \frac{a_3 - a_2}{a_2} = \frac{a_3}{a_2} - 1 = q - 1$ und ebenso gilt: $m_{\overline{R'S'}} = \frac{a_4 - a_3}{a_3} = \frac{a_4}{a_3} - 1 = q - 1$.

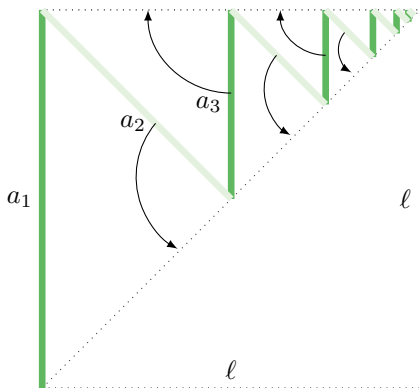
Folglich liegen alle diese Punkte auf ein und derselben Geraden g mit der negativen Steigung $m_g = q - 1$, die durch den Punkt P' verläuft. Die Gleichung von g lautet somit: $y = (q - 1)x + a_1$.

Da die Abstände $\overline{P'P}$, $\overline{Q'Q}$, $\overline{R'R}$, $\overline{S'S}$, ... immer kleiner werden und ihre Endpunkte schliesslich im Schnittpunkt X zusammenfallen, liefert die Abszisse x_0 von X den Wert s der Reihe. Aus $y = (q - 1)x + a_1 = 0$ folgt $x_0 = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$. Für die GR der Streckenabschnitte bestätigt sich somit die Formel $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-q}$.

77. Algebraisch:

$45^\circ \Rightarrow a_2^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}a_1\right)^2 \Rightarrow a_2^2 = \frac{1}{2}a_1^2 \Rightarrow a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a_1$; analog so weiter $\Rightarrow a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}a_2, \dots$
 $\Rightarrow$ GF mit $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $a_1 = \ell \Rightarrow a_k = \ell \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{k-1} \Rightarrow L = \frac{\ell}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \ell(2 + \sqrt{2})$

Geometrisch:



$a_1 = \ell$ und alle weiteren Streckenabschnitte mit ungeradem Index $a_3, a_5, \dots$ lassen sich auf die obere Seite des Quadrats drehen, die sie schliesslich lückenlos ausfüllen: $a_3 + a_5 + a_7 + \dots = \ell$.

Die Streckenabschnitte mit geradem Index werden auf die Diagonale gedreht, die sie letztendlich nahtlos überdecken: $a_2 + a_4 + a_6 + \dots = \ell \cdot \sqrt{2}$.

Alles zusammengezählt ergibt die gesuchte Länge:
 $L = \ell + \ell + \ell \cdot \sqrt{2} = 2\ell + \ell \cdot \sqrt{2}$.

78. Sei a_1 die Länge der Seite des äussersten Quadrats, dann bilden die Seitenlängen der Quadrate eine GF mit $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und allgemeinen Glied $a_k = a_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{k-1}$.

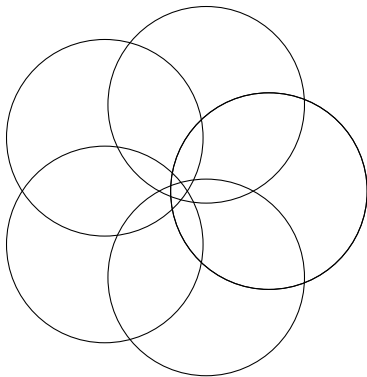
Somit können die Inhalte der schwarzen Flächen durch eine Folge mit dem allgemeinen Glied $A_k = a_k^2 - \pi \left(\frac{1}{2}a_k\right)^2 = a_k^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a_1^2}{2^{k-1}} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ beschrieben werden. Es handelt sich somit um eine GF mit $q = \frac{1}{2}$ und $A_1 = a_1^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

$\Rightarrow s = \frac{a_1^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2a_1^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \text{Anteil} = \frac{2a_1^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{a_1^2} = 2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \approx 42.92\%$

1.4 Weitere Themen

79. a) 1.DF: 1, 4, 9, 16, 25, ... $\Rightarrow$ 36, 49 b) 1.DF: 7, 5, 3, 1, -1, -3, ... $\Rightarrow$ -5, -7
 c) 1.DF: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... $\Rightarrow$ 17, 19 d) 1.DF: 1, -2, 3, 1, -2, 3, 1, ... $\Rightarrow$ -2, 3
80. a) 1.DF: 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, ... $\Rightarrow$ Fortsetzung Stammfolge: 102, 111
 b) 1.DF: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots \Rightarrow$ Fortsetzung Stammfolge: $\frac{161}{60}, \frac{191}{60}$
 c) 1.DF: 1, 11, 2, 22, 3, 33, 4, 44, 5, ... $\Rightarrow$ Fortsetzung Stammfolge: 133, 138
 d) 1.DF: 1, 2, 1, -2, 1, 2, 1, -2, 1, 2, 1, -2, ... $\Rightarrow$ Fortsetzung Stammfolge: 14, 12
81. niemandem
82. Haben die beiden Folgen (b_n) und (a_n) dieselbe 1.DF, so gilt: $b_{k+1} - b_k = d_k = a_{k+1} - a_k \Rightarrow$ für alle $k \in \mathbb{N}$: $b_{k+1} - a_{k+1} = b_k - a_k = c \hat{=}$ konstant $\Rightarrow b_k = a_k + c$. Die beiden Folgen unterscheiden sich also durch eine konstante Zahl c , beispielsweise die Konstante 1 im Fall der beiden Folgen 1, 3, 5, 7, ... und 2, 4, 6, 8, ...
83. a) 1. DF: -1, 3, -1, 3, -1, 3, -1, ... 2. DF: 4, -4, 4, -4, 4, -4, 4, ...
 3. DF: -8, 8, -8, 8, -8, 8, -8, ... 4. DF: 16, -16, 16, -16, 16, -16, 16, ...
 b) 6. DF: 64, -64, 64, -64, 64, -64, 64, ... 7. DF: -128, 128, -128, 128, -128, 128, ...
 c) n -te DF: $d_k = (-1)^{k+1} \cdot 2^n$, falls n gerade ist, und $d_k = (-1)^k \cdot 2^n$, falls n ungerade ist, wobei sich beide Fälle auch mit einer einzigen Formel beschreiben lassen: $d_k = (-1)^{n+1+k} \cdot 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$
84. a) 3, 5, 9, 15, 23, 33, ...; 1.DF: 2, 4, 6, 8, 10, ...; 2.DF: 2, 2, 2, 2, ... $\Rightarrow$ AF2
 b) Die 1.DF ist eine AF. $\Rightarrow d_k = a_{k+1} - a_k = ((k+1)^2 - (k+1) + 3) - (k^2 - k + 3) = 2k$
85. $d_k = a_{k+1} - a_k = ((k+1)^2 - 2(k+1) + 2) - (k^2 - 2k + 2) = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$
86. Ansatz für alle Teilaufgaben: $a_k = ak^2 + bk + c$ mit $a_1 = a + b + c, a_2 = 4a + 2b + c$ und $a_3 = 9a + 3b + c$. In allen Fällen gilt für die Auflösung des Gleichungssystems: $a_1 - 2a_2 + a_3 = 2a$.
 a) $a_k = k^2 - k + 1$ b) $a_k = -k^2 + 11$ c) $a_k = \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + 4$
 $a_{101} = 10'101$ $a_{101} = -10'190$ $a_{101} = 4953$
 d) $a_k = -\frac{3}{2}k^2 + \frac{7}{2}k + 10$ e) $a_k = k^2 - 5k + 6$ f) $a_k = -k^2 + 3k + 1$
 $a_{101} = -14'938$ $a_{101} = 9702$ $a_{101} = -9897$
87. Ansatz für alle Teilaufgaben: $a_k = ak^3 + bk^2 + ck + d$ mit $a_1 = a + b + c + d, a_2 = 8a + 4b + 2c + d, a_3 = 27a + 9b + 3c + d$ und $a_4 = 64a + 16b + 4c + d$. In allen Fällen gilt für die Auflösung des Gleichungssystems: $a_1 - 2a_2 + a_3 = 12a + 2b$ und $a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 30a + 4b$.
 a) $a_k = k^3 - k; a_{22} = 10'626$ b) $a_k = k^3 + 1; a_{22} = 10'649$
 c) $a_k = \frac{1}{3}k^3 - 4k^2 + \frac{47}{3}k - 20; a_{22} = 1938$ d) $a_k = -(k-2)^3 = (2-k)^3; a_{22} = -8000$
88. a) Start mit der 2. DF: -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...
 $\Rightarrow$ 1.DF: 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, ...
 $\Rightarrow$ Stammfolge: 4, 7, 9, 12, 14, 17, 19, 22, ...
 b) Start mit der 2. DF: 12, 18, 24, 30, ...
 $\Rightarrow$ 1.DF: 7, 19, 37, 61, 91, ...
 $\Rightarrow$ Stammfolge: 1, 8, 27, 64, 125, 216, ...

89. Die 2. DF (e_k) startet wie folgt: 15, 18, 21, 24, 27, ... Für die 1. DF gilt: $d_1 = 5$ und $d_{k+1} = d_k + e_k \Rightarrow (d_k): 5, 20, 38, 59, 83, 110, \dots$. Somit gilt für die Stammfolge: $a_1 = -10$ und $a_{k+1} = a_k + d_k \Rightarrow$ Stammfolge $(a_k): -10, -5, 15, 53, 112, 195, \dots$
90. Nein. Es fehlt das Startglied a_1 . Denn wegen $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$ nimmt der Index von a_{n+1} für kein $n \in \mathbb{N}$ den für das Startglied erforderliche Wert 1 an. Die 1. DF von (s_n) lautet wie folgt: $a_2, a_3, a_4, \dots$
91. a) $d_k = a_{k+1} - a_k = a_k(q-1) \Rightarrow \frac{d_{k+1}}{d_k} = \frac{a_{k+1}(q-1)}{a_k(q-1)} = \frac{a_{k+1}}{a_k} = q \Rightarrow$ Die 1. DF ist ebenfalls eine GF.
 b) Nein. Gegenbeispiel: 3, 4, 6, 10, 18, 34, ...
92. Ja. Die 1. DF der 3. DF ist die 4. DF der ursprünglichen Folge und somit konstant. Folglich ist die 3. DF eine AF1.
- Alternative Begründung:* Die 1. DF ist eine AF3, die 2. DF daher eine AF2 und die 3. DF schliesslich eine AF1.
93. 3. DF $\hat{=}$ AF2 $\Rightarrow$ 4. DF $\hat{=}$ AF1 $\Rightarrow$ 5. DF $\hat{=}$ konstante Folge $\Rightarrow$ Die Stammfolge ist eine AF5.
94. Die 2. DF ist konstant, also lauten ab der 3. DF alle weiteren DFs gleich, nämlich 0, 0, 0, 0, ...
95. a) 1. DF: $(a_{k+1} + m) - (a_k + m) = a_{k+1} - a_k \Rightarrow$ Die Ordnung verändert sich also nicht.
 b) 1. DF: $(a_{k+1} - m) - (a_k - m) = a_{k+1} - a_k \Rightarrow$ Die Ordnung verändert sich also nicht.
 c) 1. DF: $m \cdot a_{k+1} - m \cdot a_k = m \cdot (a_{k+1} - a_k) \Rightarrow$ Die Ordnung verändert sich also nicht.
- Bemerkung:* Auch bei allen weiteren DF werden die Glieder mit m multipliziert. Dies gilt ebenso für die n -te DF, die folglich immer noch konstant ist.
96. Die Funktion f ist linear, es gilt somit: $f(x_k) = m \cdot x_k + q$. Weder die Multiplikation mit m noch die Addition von q ändern die Ordnung der AFn.
97. Skizze für $n = 5$



Stammfolge: $(a_k): 2, 4, 8, 14, 22, \dots$

1. DF: $(d_k): 2, 4, 6, 8, 10, \dots$

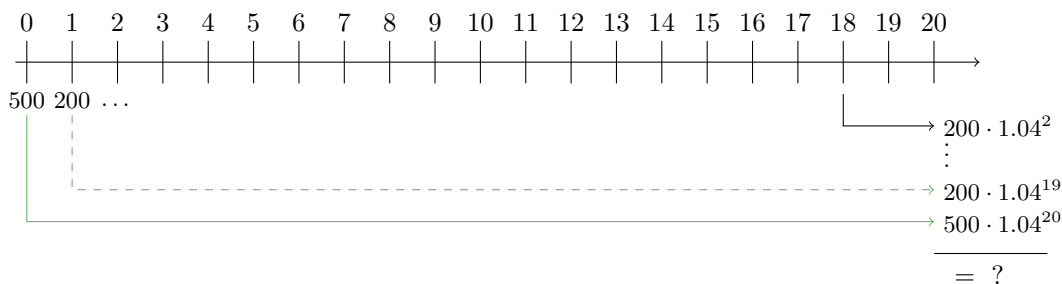
Der $(k+1)$ -te Kreis schneidet alle k schon vorhandenen Kreise in je zwei Punkten. Also liegen auf dem $(k+1)$ -ten Kreis $2k$ Schnittpunkte, die ebenso viele Kreisbogenstücke auf diesem $(k+1)$ -ten Kreis bilden. Da jedes dieser Kreisbogenstücke ein bestehendes Gebiet zweiteilt, kommen $2k$ neue Gebiete hinzu. Deshalb gilt: $d_k = a_{k+1} - a_k = 2k, k \in \mathbb{N}$.

2. DF: $(e_k): 2, 2, 2, 2, 2, \dots$

Also ist (a_k) eine AF2. Nun das 3×3 -Gleichungssystem lösen mit dem Ansatz $a_k = ak^2 + bk + c$.
 $\Rightarrow$ explizit: $a_k = k^2 - k + 2$; rekursiv: $a_1 = 2, a_{k+1} = a_k + 2k, k \in \mathbb{N}$

98. a) $F_1 = 5 \xrightarrow{+7} F_2 = 12 \xrightarrow{+10} F_3 = 22 \xrightarrow{+13} F_4 = 35 \xrightarrow{+16} F_5 = 51 \xrightarrow{+19} F_6 = 70$
 b) Die DF 7, 10, 13, 16, ... ist eine AF mit $d = 3$. $\Rightarrow d_k = 7 + 3 \cdot (k - 1) = 3k + 4$
 $\Rightarrow F_1 = 5, F_{k+1} = F_k + d_k = F_k + 3k + 4, k \in \mathbb{N}$
 c) Bei (F_k) handelt es sich um eine AF2. Mit dem Ansatz $F_k = ak^2 + bk + c, F_1 = 5, F_2 = 12$ und $F_3 = 22$ erhält man ein Gleichungssystem. $\Rightarrow F_k = 1.5k^2 + 2.5k + 1$
 d) $F_{100} = 1.5 \cdot 100^2 + 2.5 \cdot 100 + 1 = 15'251$
99. a) GF mit $q = \frac{4}{3} \Rightarrow a_1 = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4, a_2 = 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$
 b) $a_k = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k, k \in \mathbb{N}_0$; *Bemerkung:* Hier wurde mit dem Index $k = 0$ begonnen.
 c) Da der Wachstumsfaktor $q = \frac{4}{3} > 1$ ist, folgt $a_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Die Folge ist divergent.
100. a) Explizite Formel: $u_k = 3s \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k, k \in \mathbb{N}_0$. Für immer grösseres k , also $k \rightarrow \infty$, wird u_k auch immer grösser, weil $q = \frac{4}{3} > 1$ ist. Die Folge (u_k) ist also divergent.
 b) $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$; es gilt die rekursive Beziehung $A_{k+1} = A_k \cdot \frac{1}{9}$. Somit ist (A_k) eine GF mit $q = \frac{1}{9}$.
 $\Rightarrow A_k = A_0 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^k, k \in \mathbb{N}_0$
 c) Die bei der k -ten Iteration neu dazukommende Fläche
 $= (\text{Anzahl Dreiecke mit Flächeninhalt } A_k) \cdot A_k$
 $= (3 \cdot 4^{k-1}) \cdot \left(A_0 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^k\right) = 3 \cdot A_0 \cdot 4^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 = \frac{A_0}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}, k \in \mathbb{N}$
 d) $F_k = A_0 + \sum_{i=1}^k \frac{A_0}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = A_0 + \frac{A_0}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^k}{1 - \frac{4}{9}} = A_0 \left(1 + \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^k\right)\right), k \in \mathbb{N}_0$
 e) Für wachsendes k strebt der Wert $\left(\frac{4}{9}\right)^k$ gegen 0 und F_k gegen $F = A_0 \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{5}A_0$.
 $\Rightarrow F = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{2\sqrt{3}}{5}s^2$
101. a) $K_{10} = 1000 \cdot 1.05^{10} = 1628.89 \dots \approx \text{Fr. } 1628.90$
 b) $K_{-10} = 1000 \cdot 1.05^{-10} = 613.91 \dots \approx \text{Fr. } 613.90$
102. a) $1.2\% : 4 = 0.3\% \Rightarrow q = 1.003; 6 \text{ Jahre} \Rightarrow K_{24} = 3500 \cdot 1.003^{24} = 3760.89 \approx \text{Fr. } 3760.90$
 b) $1.2\% : 12 = 0.1\% \Rightarrow q = 1.001 \Rightarrow K_{72} = 3500 \cdot 1.001^{72} = 3761.16 \approx \text{Fr. } 3761.15$
103. $5\% \Rightarrow q = 1.05 \Rightarrow K = 2000 \cdot 1.05 \cdot \frac{1.05^6 - 1}{1.05 - 1} \Rightarrow K = 14'284.01 \dots \approx \text{Fr. } 14'284.-$
104. a) $4\% \Rightarrow q = 1.04 \Rightarrow K = (200 \cdot 1.04^2 + 200 \cdot 1.04^3 + \dots + 200 \cdot 1.04^{19}) + 500 \cdot 1.04^{20}$
 $= 200 \cdot 1.04^2 \cdot \frac{1.04^{18} - 1}{1.04 - 1} + 500 \cdot 1.04^{20} = 6643.17 \dots \approx \text{Fr. } 6643.20$

Die Summenformel aus der Berechnung von oben hier noch grafisch dargestellt:



- b) $4.5\% \Rightarrow q = 1.045 \Rightarrow K = 10'000 = R \cdot 1.045^2 \cdot \frac{1.045^{19} - 1}{1.045 - 1} \Rightarrow R = 315.078 \dots \approx \text{Fr. } 315.10$

$$105. 1\% \Rightarrow q = 1.01 \Rightarrow K = 50'000 = R \cdot 1.01 \cdot \frac{1.01^7 - 1}{1.01 - 1} \Rightarrow R = 6862.78 \dots \approx \text{Fr. } 6862.80$$

$$106. 7\% \Rightarrow q = 1.07 \Rightarrow S = 100'000 \cdot 1.07^7 - 20'000 \cdot 1.07 \cdot \frac{1.07^6 - 1}{1.07 - 1} = 7497.725 \dots \approx \text{Fr. } 7497.75$$

$$107. 5\% \Rightarrow q = 1.05 \Rightarrow 100'000 \cdot 1.05^n = 10'000 \cdot \frac{1.05^n - 1}{1.05 - 1} \Rightarrow n \approx 14.2; \text{ d. h., 14-mal abheben ist m\u00f6glich. Es bleibt ein Rest von } K = 100'000 \cdot 1.05^{14} - 10'000 \cdot \frac{1.05^{14} - 1}{1.05 - 1} \approx \text{Fr. } 2006.85 \text{ \u00fbrig.}$$

$$108. 2000 \cdot \left(1 + 0.16 \cdot \frac{6}{12}\right) = 200 \cdot \left(1 + 0.16 \cdot \frac{6}{12}\right) + \left(R \cdot \left(1 + 0.16 \cdot \frac{5}{12}\right) + \dots + R \cdot \left(1 + 0.16 \cdot \frac{0}{12}\right)\right) \\ \Rightarrow 2160 = 216 + R \left(6 + 0.16 \cdot \frac{1}{12} (0 + 1 + \dots + 4 + 5)\right) \Rightarrow 2160 = 216 + R \left(6 + \frac{0.16}{12} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2}\right) \\ \Rightarrow 2160 = 216 + 6.2R \Rightarrow R = 313.54 \dots \approx \text{Fr. } 313.55$$

$$109. 4.5\% \Rightarrow q = 1.045 \Rightarrow K \cdot 1.045^{14} = 24'000 \cdot \frac{1.045^{15} - 1}{1.045 - 1} \Rightarrow K = 269'347.80 \dots \approx \text{Fr. } 269'347.80$$

110. a) Monat k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl Hasenpaare F_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Erkl\u00e4rung: Betrachten wir als Beispiel den f\u00fcnften Monat. Zu diesem Zeitpunkt leben insgesamt 8 Hasenpaare. Davon sind 3 gerade erst geboren, k\u00f6nnen also noch nicht werfen. Die restlichen 5 geh\u00f6ren zur \u00e4lteren, geschlechtsreifen Generation und werfen je ein junges Hasenpaar. Somit haben wir im sechsten Monat insgesamt $8 + 5 = 13$ Hasenpaare.

b) Die Erkl\u00e4rung aus Teilaufgabe a) liefert die folgende Rekursionsformel: $F_0 = F_1 = 1$ und $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

$$111. W_1 = 1, \text{ \u201eW\u00f6rter\u201c: } B; \quad W_2 = 2, \text{ \u201eW\u00f6rter\u201c: } BB, AB; \quad W_3 = 3, \text{ \u201eW\u00f6rter\u201c: } BBB, BAB, ABB$$

Um ein Wort der L\u00e4nge k zu erhalten, wird an die zul\u00e4ssigen W\u00f6rter der L\u00e4nge $k - 1$ der Buchstabe B und an die zul\u00e4ssigen W\u00f6rter der L\u00e4nge $k - 2$ die Buchstabenfolge AB angeh\u00e4ngt. Daher gilt: $W_k = W_{k-2} + W_{k-1}$ f\u00fcr $k \geq 3$ mit $W_1 = 1$ und $W_2 = 2$.

$$112. M_1 = 1, M_2 = 2, M_3 = 3, \dots \Rightarrow \text{Um ein Muster der L\u00e4nge } k \text{ zu erhalten, wird an die Muster der L\u00e4nge } k - 1 \text{ ein L\u00e4ngsstein angef\u00fcgt und an die Muster der L\u00e4nge } k - 2 \text{ werden zwei Quersteine angef\u00fcgt. Daher: } M_k = M_{k-2} + M_{k-1} \text{ f\u00fcr } k \geq 3 \text{ mit } M_1 = 1 \text{ und } M_2 = 2.$$

$$113. \text{Um eine zul\u00e4ssige Schrittabfolge f\u00fcr } k \text{ Stufen zu erhalten, wird an die zul\u00e4ssigen Schrittabfolgen f\u00fcr } k - 1 \text{ Stufen ein Einerschritt und an die zul\u00e4ssigen Schrittabfolgen f\u00fcr } k - 2 \text{ Stufen ein Zweierschritt angeh\u00e4ngt. Daher gilt: } T_k = T_{k-2} + T_{k-1} \text{ f\u00fcr } k \geq 3 \text{ mit } T_1 = 1 \text{ und } T_2 = 2.$$

$$114. \text{Alle drei Folgen lassen sich im Prinzip durch dieselbe Rekursionsformel mit denselben zwei Anfangswerten beschreiben.}$$

$$115. \text{a) } 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 \quad \text{b) } 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76 \\ \text{c) } 3, 4, 1, -3, -4, -1, 3, 4, 1, -3 \quad \text{d) } 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8$$

116. a)	k	0	1	2	3	4	5	6
	F_k	1	1	2	3	5	8	13
	a_k	–	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{13}$
	b_k	–	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{13}$

$$\text{b) } b_1 = \frac{F_0}{F_1} = 1 = a_1 \text{ und } b_{k+1} = \frac{F_k}{F_{k+1}} = \frac{F_k}{F_{k-1} + F_k} = \frac{1}{\frac{F_{k-1}}{F_k} + 1} = \frac{1}{b_k + 1} \Rightarrow a_k = b_k \text{ f\u00fcr } k \geq 1$$

$$\text{c) } a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g = \frac{1}{g + 1} \Rightarrow g^2 + g = 1 \Rightarrow g^2 + g - 1 = 0 \Rightarrow g = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$117. a) k = 0 \Rightarrow F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{2\sqrt{5} - (-2\sqrt{5})}{4} \right) = 1$$

$$k = 2 \Rightarrow F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - (-3\sqrt{5} - 5\sqrt{5})}{8} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{16\sqrt{5}}{8} \right) = 2$$

$$b) F_{31} + F_{32} = 2'178'309 + 3'524'578 = 5'702'887 = F_{33}$$

c) $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618 \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| \approx 0.276 \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right|$ wird mit wachsendem Index k immer kleiner und strebt gegen 0, deshalb kann der 2. Term in der obigen Formel schon für kleine k vernachlässigt werden. Circa erhält für kleine Indices k die Werte $T_0 \approx 0.723 \Rightarrow F_0 = 1, T_1 \approx 1.171 \Rightarrow F_1 = 1, T_2 \approx 1.894 \Rightarrow F_2 = 2$ und $T_3 \approx 3.065 \Rightarrow F_3 = 3$.

Alternative Lösung:

Die Folge (T_k) erfüllt die rekursive Bedingung $T_{k+2} = T_{k+1} + T_k$ mit $T_0 \approx 1, T_1 \approx 1$, daher funktioniert CIRCAS Methode.

$$118. a) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Abgesehen vom Startglied 0 stimmt sie Glied für Glied mit (u_k) überein.

$$b) T(4) = T(6) = T(10) = +1 \text{ und } T(5) = T(13) = -1$$

$$\text{Allgemein gilt: } T(k) = u_{k-1} \cdot u_{k+1} - u_k^2 = (-1)^k.$$

$$c) s_4 = 7 = u_6 - 1, s_7 = 33 = u_9 - 1, s_8 = 54 = u_{10} - 1, s_{11} = 232 = u_{13} - 1$$

$$\text{Allgemein gilt die Formel: } s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1.$$

$$d) U(2) = 3 = u_4, U(3) = 8 = u_6, U(4) = 21 = u_8, U(8) = 987 = u_{16}, U(11) = 17'711 = u_{22}$$

$$\text{Allgemein gilt: } U(n) = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n}.$$

$119. a) \begin{array}{ll} 2 & = 1 \cdot 2 \\ 2 + 4 & = 2 \cdot 3 \\ 2 + 4 + 6 & = 3 \cdot 4 \\ 2 + 4 + 6 + 8 & = 4 \cdot 5 \\ 2 + 4 + 6 + 8 + 10 & = 5 \cdot 6 \\ 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 & = 6 \cdot 7 \\ \vdots & \\ 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n & = n \cdot (n + 1) \end{array}$	$b) \begin{array}{ll} 1 & = \frac{1 \cdot 2}{2} \\ 1 + 2 & = \frac{2 \cdot 3}{2} \\ 1 + 2 + 3 & = \frac{3 \cdot 4}{2} \\ 1 + 2 + 3 + 4 & = \frac{4 \cdot 5}{2} \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 & = \frac{5 \cdot 6}{2} \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 & = \frac{6 \cdot 7}{2} \\ \vdots & \\ 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n & = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \end{array}$
---	--

$$c) \begin{array}{ll} 1 & = 2 - 1 \\ 1 + \frac{1}{2} & = 2 - \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & = 2 - \frac{1}{4} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} & = 2 - \frac{1}{8} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} & = 2 - \frac{1}{16} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} & = 2 - \frac{1}{32} \\ \vdots & \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} & = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \end{array}$$

$$120. \text{ Aufgabe 119 a): } 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \cdot (n + 1)$$

1. Verankerung: $n = 1 \Rightarrow 1 \cdot 2 = 2$ ist wahr.

2. Vererbung: $(2 + 4 + 6 + \dots + 2k) + 2(k + 1) = k(k + 1) + 2k + 2 = (k + 1)(k + 2)$

Aufgabe 119 c): $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

1. Verankerung: $n = 1 \Rightarrow 2 - \frac{1}{2^{1-1}} = 2 - 1 = 1$ ist wahr.

2. Vererbung: $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}) + \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{2}{2^k} + \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^k}$

121. a) Vermutung für die n -te Zeile: $2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$

Beweis mit vollständiger Induktion:

1. Verankerung: $n = 1 \Rightarrow 3^1 - 1 = 2$ ist wahr.

2. Vererbung: $(2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 2 \cdot 3^{k-1}) + 2 \cdot 3^k$
 $= (3^k - 1) + 2 \cdot 3^k = 3 \cdot 3^k - 1 = 3^{k+1} - 1$

b) Vermutung für die n -te Zeile: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Beweis mit vollständiger Induktion:

1. Verankerung: $n = 1 \Rightarrow 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$ ist wahr.

2. Vererbung: $(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k \cdot (k+1)) + (k+1) \cdot (k+2)$
 $= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

122. a) $s_1 = 1 = 1^2$
 $s_2 = 1 + 3 = 2^2$
 $s_3 = 1 + 3 + 5 = 3^2$
 $s_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$
 $s_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$
 $\vdots$
 $s_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

Beweis mit vollständiger Induktion:

1. Verankerung: $s_1 = 1^2 = 1$ ist wahr.

2. Vererbung: $s_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = s_k + (2k+1)$
 $= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

b) $s_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$
 $s_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$
 $s_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$
 $s_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$
 $s_5 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{5}{6}$
 $\vdots$
 $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Beweis mit vollständiger Induktion:

1. Verankerung: $s_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ist wahr.

2. Vererbung: $s_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = s_k + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)}$
 $= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

$$\begin{aligned}
\text{c) } s_1 &= \frac{1}{1 \cdot 3} &= \frac{1}{3} \\
s_2 &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} &= \frac{2}{5} \\
s_3 &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} &= \frac{3}{7} \\
s_4 &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} &= \frac{4}{9} \\
s_5 &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} &= \frac{5}{11} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

1. Verankerung: $s_1 = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$ ist wahr.

2. Vererbung: $s_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = s_k + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$
 $= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$

$$\begin{aligned}
\text{d) } s_1 &= 1 &= 1 \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{3} &= \frac{4}{3} \\
s_3 &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} &= \frac{6}{4} \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} &= \frac{8}{5} \\
s_5 &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} &= \frac{10}{6} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2n}{n+1}$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

1. Verankerung: $s_1 = 1 = \frac{2 \cdot 1}{1+1}$ ist wahr.

2. Vererbung: $s_{k+1} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{2}{k(k+1)} + \frac{2}{(k+1)(k+2)} = s_k + \frac{2}{(k+1)(k+2)}$
 $= \frac{2k}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(k+2)} = \frac{2k(k+2)+2}{(k+1)(k+2)} = \frac{2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{2k+2}{k+2}$

$$\begin{aligned}
\text{e) } s_1 &= 1 \cdot 1! &= 1 = 2! - 1 \\
s_2 &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! &= 5 = 3! - 1 \\
s_3 &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! &= 23 = 4! - 1 \\
s_4 &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! &= 119 = 5! - 1 \\
&\vdots \\
s_n &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \dots + n \cdot n! &= (n+1)! - 1
\end{aligned}$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

1. Verankerung: $s_1 = 1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1$ ist wahr.

2. Vererbung: $s_{k+1} = (1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \dots + k \cdot k!) + (k+1) \cdot (k+1)!$
 $= s_k + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!$
 $= (k+2)(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1$

$$\begin{aligned}
\text{f) } s_1 &= 1^3 &= 1 &= 1^2 \\
s_2 &= 1^3 + 2^3 &= 9 &= 3^2 = (1+2)^2 \\
s_3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 &= 36 &= 6^2 = (1+2+3)^2 \\
s_4 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 100 &= 10^2 = (1+2+3+4)^2 \\
&\vdots \\
s_n &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 &= (1+2+3+\dots+n)^2 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

1. Verankerung: $s_1 = 1^3 = 1 = 1^2$ ist wahr.
2. Vererbung: $s_{k+1} = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + k^3) + (k+1)^3 = s_k + (k+1)^3$

$$= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)(k+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

123. a) $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10, a_4 = 17, \dots \Rightarrow a_k = k^2 + 1$

1. Verankerung: $a_1 = 2 = 1^2 + 1$ ist wahr.
2. Vererbung: $a_{k+1} = a_k + 2k + 1 = (k^2 + 1) + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 + 1 = (k+1)^2 + 1$

b) $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{5}, \dots \Rightarrow a_k = \frac{k}{k+1}$

1. Verankerung: $a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ ist wahr.
2. Vererbung: $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

124. $P_2 = \frac{1}{2}, P_3 = \frac{1}{3}, P_4 = \frac{1}{4}, P_5 = \frac{1}{5}, \dots \Rightarrow P_n = \frac{1}{n}$

1. Verankerung: $P_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ ist wahr.
2. Vererbung: $P_{k+1} = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{k})(1 - \frac{1}{k+1}) = P_k(1 - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{k}(1 - \frac{1}{k+1})$

$$= \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

125. Beweis der Summenformel für die AR:

1. Verankerung: $s_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot d = a_1$ ist wahr.
2. Vererbung: $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = \left(k \cdot a_1 + \frac{k(k-1)}{2} \cdot d\right) + (a_1 + k \cdot d) = (k+1)a_1 + \frac{(k+1)k}{2} \cdot d$

Beweis der Summenformel für die GR:

1. Verankerung: $s_1 = a_1 \frac{1-q^1}{1-q} = a_1$ ist wahr.
2. Vererbung: $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = \left(a_1 \frac{1-q^k}{1-q}\right) + (a_1 \cdot q^k) = \frac{a_1}{1-q} \cdot ((1-q^k) + (1-q)q^k)$

$$= \frac{a_1}{1-q} \cdot (1 - q^{k+1}) = a_1 \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

- 126.** a) 1. Verankerung: $a_1 = 1^1 + 1 = 2$ ist durch 2 teilbar.
 2. Vererbung: $a_{k+1} = (k+1)^2 + (k+1) = (k^2 + 2k + 1) + (k+1) = (k^2 + k) + 2k + 2 = a_k + 2(k+1)$ ist durch 2 teilbar, da jeder Summand einzeln durch 2 teilbar ist.
- b) 1. Verankerung: $a_1 = 7^1 - 1 = 6$ ist durch 6 teilbar.
 2. Vererbung: $a_{k+1} = 7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 7 + 6 = 7(7^k - 1) + 6 = 7a_k + 6$ ist durch 6 teilbar, da jeder Summand einzeln durch 6 teilbar ist.
- c) 1. Verankerung: $a_1 = 1^2 - 1 + 3 = 3$ ist ungerade.
 2. Vererbung: $a_{k+1} = (k+1)^2 - (k+1) + 3 = k^2 + 2k + 1 - k - 1 + 3 = k^2 + k + 3 = (k^2 - k + 3) + 2k = a_k + 2k \hat{=} \text{ungerade plus gerade} \hat{=} \text{ungerade}$
- d) 1. Verankerung: $a_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 6$ ist durch 6 teilbar.
 2. Vererbung: $a_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 2(k+1) = (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3k^2 + 9k + 6 = a_k + 3(k+1)(k+2)$ ist durch 6 teilbar.
- 127.** a) 1. Verankerung: $n = 1: 2^1 = 2 \geq 2 = 1 + 1$
 2. Vererbung: $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 \geq (k+1) \cdot 2 = 2k + 2 = (k+2) + k \geq k+2$, weil $k > 0$ ist.
- b) 1. Verankerung: $n = 3: 2^3 = 8 > 7 = 2 \cdot 3 + 1$
 2. Vererbung: $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > (2k+1) \cdot 2 = 4k + 2 = 2k + 3 + (2k-1) > 2k + 3$, weil für $k \geq 3$ der Term $2k-1 > 0$ ist.
- 128.** Vermutung: Für $n \geq 5$ ist $2^n > n^2$. Beweis mit vollständiger Induktion:
 1. Verankerung: $k = 5: 2^5 = 32 > 25 = 5^2$ ist wahr.
 2. Vererbung: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 4k = k^2 + 2k + 2k > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$
- 129.** 1. Verankerung: $n = 0: 1 + x = \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = 1 + x$ ist korrekt.
 2. Vererbung:

$$(1+x)(1+x^2) \cdots \left(1+x^{(2^k)}\right) \left(1+x^{(2^{k+1})}\right) = \frac{1-x^{(2^{k+1})}}{1-x} \cdot \left(1+x^{(2^{k+1})}\right) = \frac{1-x^{(2^{k+2})}}{1-x}$$
- 130.** a) Vererbung: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2-1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^{k+1}}$
 Jedoch gilt z.B. für $n = 1$, dass $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2^1}$ ist.
- b) Vererbung: $12^{k+1} + 1 = 12 \cdot 12^k + 1 = 11 \cdot 12^k + 12^k + 1$ ist durch 11 teilbar.
 Jedoch ist z.B. $12^1 + 1 = 13$ für $n = 1$ nicht durch 11 teilbar.
- 131.** a) $A(1), A(3), A(5), A(7), \dots$ sind wahr. b) $A(1), A(2), A(4), A(8), A(16), \dots$ sind wahr.
 c) $A(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. d) $A(1)$ ist wahr.
- 132.** Vermutung: $A_n = n(n-1)$; Beweis mit vollständiger Induktion:
 1. Verankerung: $A_1 = 0$ ist wahr.
 2. Vererbung: $A_k = A_{k-1} + 2(k-1) = (k-1)(k-2) + 2(k-1) = k(k-1)$. Mit dem k -ten Kreis kommen $(k-1) \cdot 2$ neue Punkte hinzu.
- 133.** Vermutung: $A_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2}$; Beweis mit vollständiger Induktion:
 1. Verankerung: $A_1 = 0$ ist wahr.