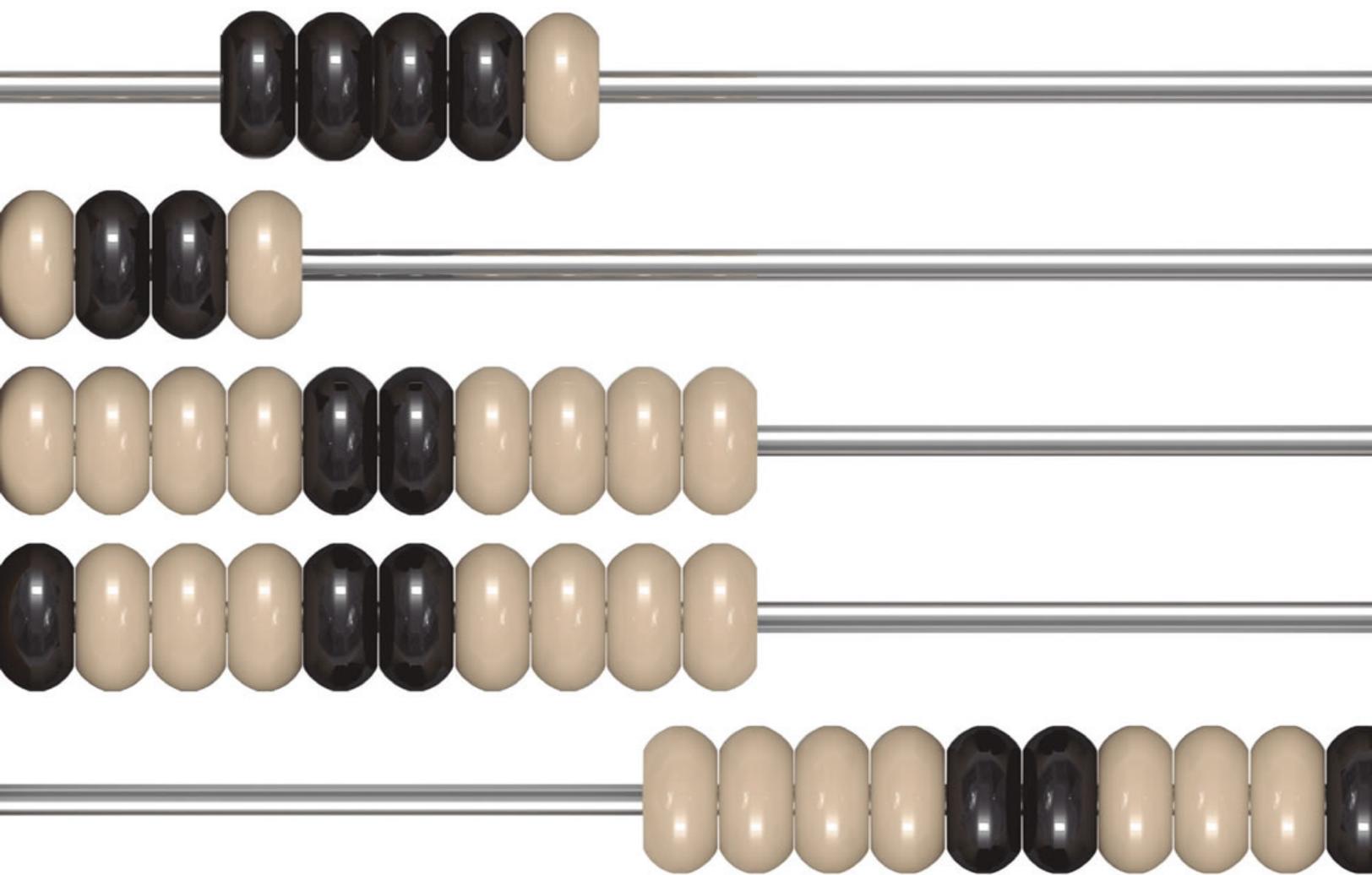


**MARTIN GARDNER**

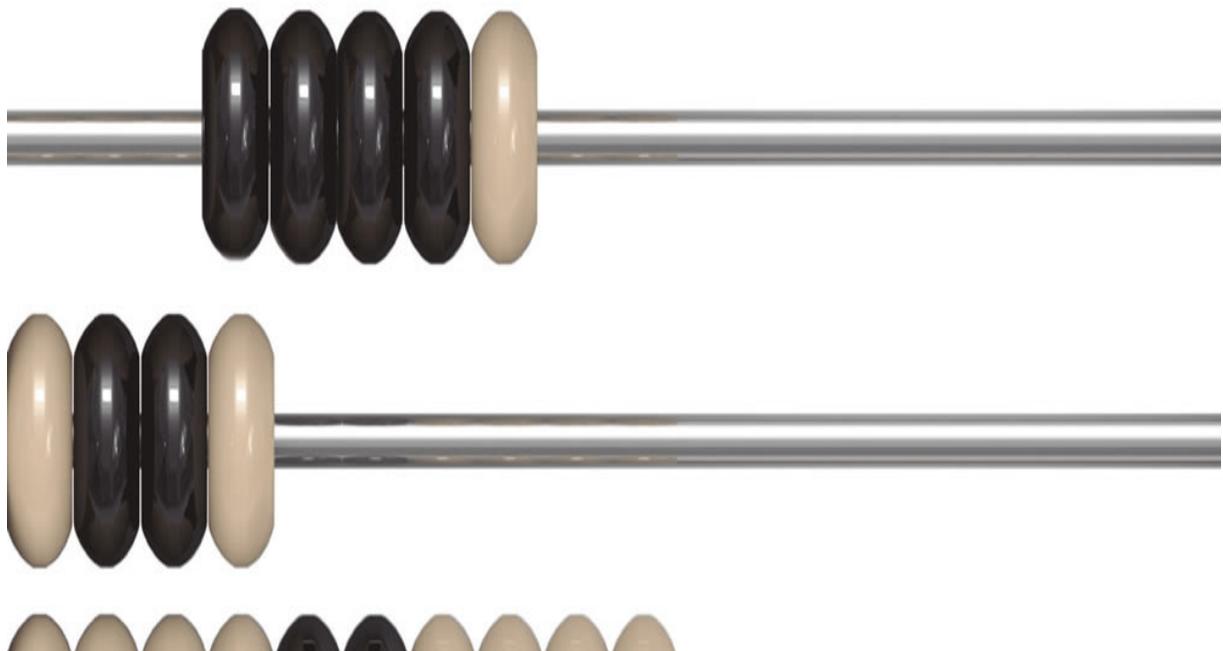
**¡Ajá! Paradojas  
que te hacen pensar**

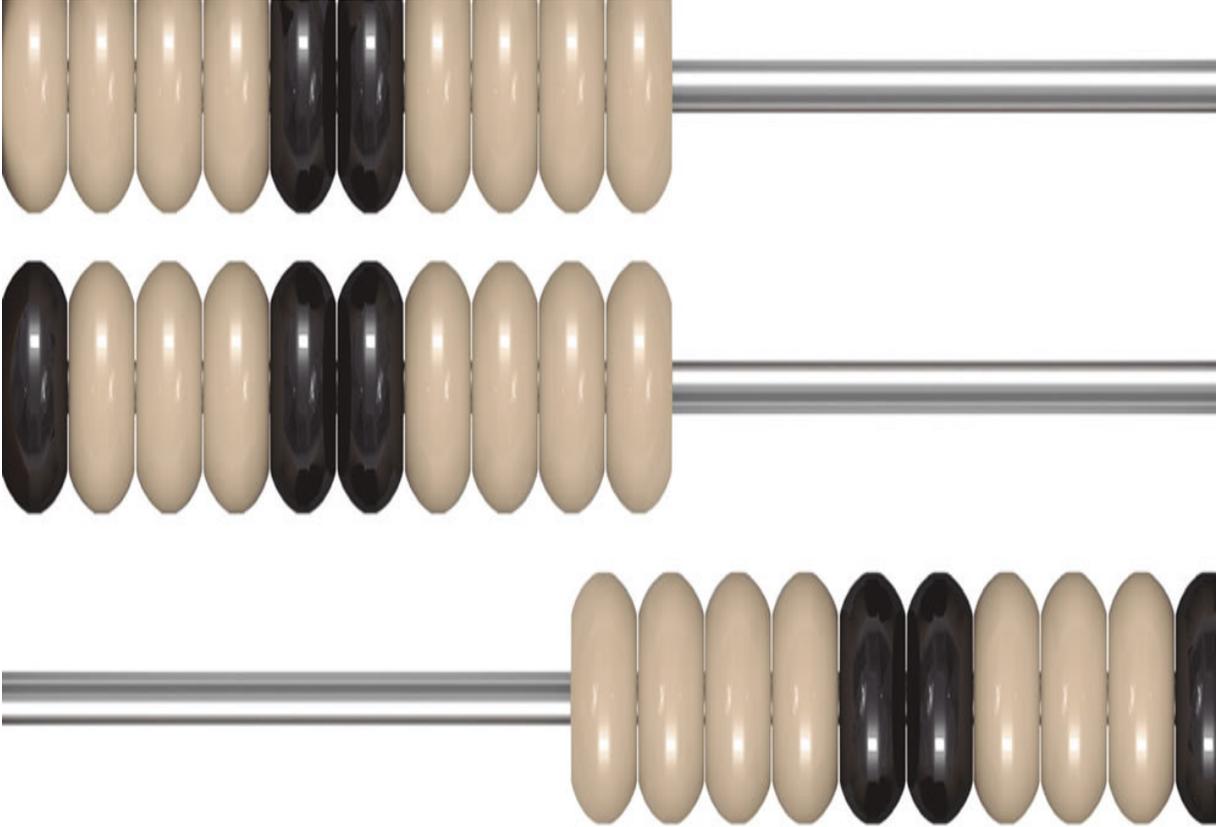


**RBA BOLSILLO**

# MARTIN GARDNER

## ¡Ajá! Paradojas que te hacen pensar





**RBA BOLSILLO**

Título original: Aha! Gotcha. Paradoxes to Puzzle and Delight.

© Martin Gardner.

© The Mathematical Association of America, Washington DC.

© de los dibujos de las portadillas de capítulo: Scott Kim, 1981.

© de la traducción: Luis Bou.

© de esta edición: RBA Libros, S. A., 2018.

Avda. Diagonal, 189 - 08018 Barcelona.

[rbalibros.com](http://rbalibros.com)

REF.: ODBO183

ISBN: 978-84-9187-014-2

Composición digital: Newcomlab S.L.L.

Queda rigurosamente prohibida sin autorización por escrito del editor cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra, que será sometida a las sanciones establecidas por la ley. Pueden dirigirse a Cedro (Centro Español de Derechos Reprográficos, [www.cedro.org](http://www.cedro.org)) si necesitan fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra ([www.conlicencia.com](http://www.conlicencia.com); 91 702 19 70 / 93 272 04 47). Todos los derechos reservados.

# ÍNDICE

## **Prefacio**

### **1 ▶ Lógica**

Paradojas sobre mentirosos, veraces, cocodrilos y barberos

La paradoja del mentiroso

Chapas y pintadas

Un enunciado y su contrario

El ordenador majareta

Regresión infinita

La paradoja de Platón y Sócrates

Alicia y el Rey

El cocodrilo y el niño

La paradoja del Quijote

La paradoja del barbero

Astrólogo, robot, catálogo

Vulgar frente a interesante

Semántica y teoría de conjuntos

Metalenguajes

Teoría de tipos

La predicción del *swami*

Tigre sorpresa

La paradoja de Newcomb

### **2 ▶ Números**

Paradojas sobre números enteros, sobre fracciones y sobre una escalera infinita

El misterio de las seis sillas

Las difíciles ganancias

La implosión demográfica  
El ubicuo número 9  
La perplejidad de un buen chófer  
Un billete de menos  
Matrices mágicas  
Un curioso testamento  
El código maravilloso  
Hotel del Infinito  
La escalera de álefs

### **3 ▶ Geometría**

Paradojas acerca de figuras planas, espaciales e imposibles  
En torno a una chica  
El gran misterio de la Luna  
Espejo, espejito...  
Cubos y damas  
Las curiosas alfombras de Randi  
Duendecillo juguetero  
Timo en el gran banco  
La fantástica rosquilla reversible  
Una trenza enrevesada  
El punto ineludible  
Objetos imposibles  
Una curva patológica  
El universo desconocido  
Antimateria

### **4 ▶ Probabilidad**

Paradojas acerca del azar, las apuestas y las creencias  
La falacia del jugador  
Cuatro gatitos

El timo de las tres cartas  
La paradoja del ascensor  
Romeo indeciso  
El juego de las tres nueces  
Tragasuertes  
Desconcertantes loritos  
El juego del billetero  
El principio de indiferencia  
La apuesta de Pascal

## **5 ▶ Estadística**

Paradojas acerca de chismes, apiñamientos, cuervos y  
«verzules»  
El engañoso «término medio»  
Madre del año  
Sacando conclusiones  
¡El mundo es un pañuelo!  
¿De qué signo es usted?  
Regularidades en pi  
Jasón y el Sol  
Rachas de locura  
Un asombroso truco de cartas  
Una paradoja electoral  
Corazón solitario  
Los cuervos de Hempel  
El «verzul» de Goodman

## **6 ▶ Tiempo**

Paradojas relativas al tiempo, tareas sobrehumanas, viajes  
al futuro y al pasado, y a la inversión del tiempo  
Los relojes locos de Lewis Carroll  
La paradójica rueda

Un esquiador frustrado  
Las paradojas de Zenón  
La cuerda elástica  
Tareas sobrehumanas  
Mary, Tom y Fido  
¿Podrá retroceder el tiempo?  
Máquinas del tiempo  
El teléfono taquiónico  
Mundos paralelos  
La dilatación del tiempo  
El destino, el azar y el libre albedrío

## **Bibliografía y obras recomendadas**

## PREFACIO

*Son éstas viejas y amables paradojas que hacen reír a los lobos en la taberna.*

DESDÉMONA, *Otelo*, acto II, escena 1

Modifiquemos la observación de Desdémona, dejándola en: «Son éstas viejas y amables paradojas para hacer sonreír durante la sobremesa», y seguramente tendremos una descripción bastante atinada de este libro. Aunque el término *paradoja* tiene numerosos significados, lo tomo aquí en un sentido amplio, capaz de contener todo resultado que por contrario a la intuición y al sentido común alcanza a provocar de inmediato un sentimiento de sorpresa. Tales paradojas son de cuatro tipos fundamentales:

1. Afirmaciones que parecen falsas, aunque en realidad son verdaderas.

2. Afirmaciones que parecen verdaderas, pero en realidad son falsas.

3. Cadenas de razonamientos aparentemente impecables, que conducen sin embargo a contradicciones lógicas. (Las paradojas de esta clase suelen llamarse falacias.)

4. Declaraciones cuya veracidad o falsedad es indecidible.

Como las científicas, las paradojas matemáticas pueden ser mucho más que amenidades, y llevarnos hasta nociones muy profundas. A los primeros pensadores griegos les resultaba tan paradójico como insoportable que la diagonal de un cuadrado de lado unidad no pudiera ser medida exactamente por finas que se hicieran las graduaciones de la regla. Este hecho perturbador sirvió para abrir el vasto dominio de los números irracionales. Los matemáticos del

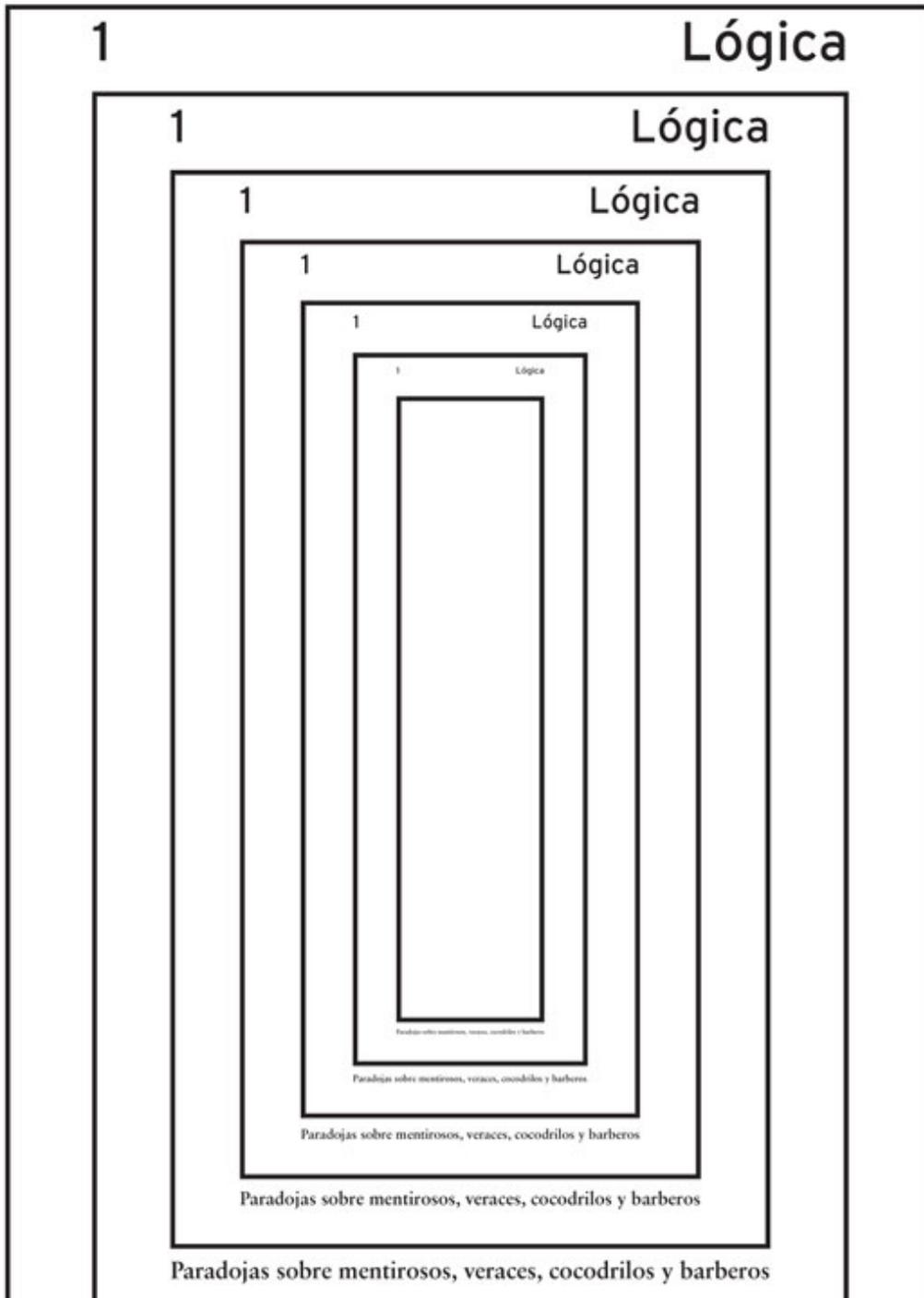
siglo pasado encontraban enormemente paradójico que todos los miembros de un conjunto infinito puedan ponerse en correspondencia biunívoca con los miembros de algún subconjunto del dado, mientras por otra parte podían existir conjuntos infinitos entre los cuales es imposible establecer una correspondencia biunívoca. Tales paradojas condujeron a desarrollar la moderna teoría de conjuntos, que a su vez ha ejercido profunda influencia sobre la filosofía de la ciencia.

Mucho podemos aprender de las paradojas. Al igual que los buenos trucos de ilusionismo, nos causan tanto asombro que inmediatamente queremos saber cómo se han hecho. Los ilusionistas no revelan jamás cómo hacen lo que hacen, pero los matemáticos no tienen necesidad de guardar el secreto. En todo el libro he procurado explicar al máximo con lenguaje ordinario, sin tecnicismos y de la forma más breve posible, por qué cada paradoja es paradójica. Si con ello animo al lector a consultar libros y artículos donde aprender más, no sólo habrá absorbido una buena dosis de ideas matemáticas importantes, sino que habrá disfrutado por el camino. Al final del libro he señalado con un asterisco, en la sección de referencias y lecturas recomendadas, algunas obras de consulta fácilmente accesibles.

MARTIN GARDNER

I

# LÓGICA



## Paradojas sobre mentirosos, veraces, cocodrilos y barberos

### PARADOJAS SOBRE MENTIROSOS, VERACES, COCODRILOS Y BARBEROS

En vista del indispensable papel que la lógica desempeña, no sólo en matemática, sino en todo el pensamiento deductivo, sorprende descubrir que la lógica se encuentra acribillada de razonamientos aparentemente impecables que conducen a contradicciones obvias. En tales razonamientos se demuestra algo así como que  $2 + 2$  son 4, y en seguida se da otra demostración igualmente buena de que es imposible que  $2 + 2$  sean 4. ¿Qué error se ha cometido? ¿Será posible que los procesos mismos del pensamiento deductivo oculten fallos irremediabiles?

Los esfuerzos por resolver las paradojas clásicas han hecho avanzar la lógica a zancadas de gigante. Bertrand Russell dedicó a ellas muchos años de parcos frutos antes de colaborar con Alfred North Whitehead en *Los principios de la matemática*, monumental tratado que proporciona fundamento unificado a la matemática y la lógica moderna.

Las paradojas no sólo plantean cuestiones, sino que también pueden responderlas. Entre las cuestiones que las paradojas de este capítulo permiten resolver tenemos:

1. ¿Hay situaciones donde sea un imposible lógico la predicción correcta de un suceso futuro?

2. ¿Por qué la teoría de conjuntos prohíbe con carácter general construir conjuntos entre cuyos elementos

tendríamos que contar al propio conjunto?

3. Cuando hablamos de un lenguaje, ¿por qué es preciso distinguir el lenguaje *del cual* hablamos (nuestro lenguaje objeto) y el lenguaje *en que* hablamos (nuestro metalenguaje)?

Las paradojas que responden a tales preguntas contienen todas indicios de razonamiento circular o autoalusión. En lógica, la posibilidad de autoalusión tanto puede enriquecer una teoría como destruirla. El problema consiste en dar a nuestras teorías las formas justas que consienten enriquecer el tema y al tiempo excluyen toda posibilidad de contradicción interna. El instrumento primario para someter a prueba nuestras ideas lógicas y comprobar si les hemos impuesto los límites correctos es precisamente la invención de paradojas.

No se imagine el lector que todas las paradojas de la lógica moderna están resueltas ya. ¡Lejos de eso! En cierta ocasión, Immanuel Kant afirmó imprudentemente que en su tiempo la lógica se encontraba ya tan desarrollada que nada nuevo podría decirse acerca de ella. Todo cuanto Kant pudiera conocer de lógica no es sino una parte reducida y elemental de la lógica moderna. Hay niveles profundos donde los más grandes lógicos están en desacuerdo, niveles donde no han sido resueltas todavía cuestiones paradójicas, y donde tendrán que formularse aún muchas preguntas más.

## LA PARADOJA DEL MENTIROSO

Epiménides fue un legendario poeta griego que vivió en Creta hacia el siglo VI a. de J. C. Uno de los mitos que de él se cuentan dice que en cierta ocasión estuvo durmiendo durante cincuenta y siete años.

La frase que se le atribuye da pie a una contradicción lógica si se admite que los mentirosos mienten *siempre*, mientras que las personas que no son mentirosas —las llamaremos veraces— dicen *siempre* la verdad. Con estas hipótesis, la declaración: «Todos los cretenses son mentirosos» no puede ser verdadera, porque entonces Epiménides sería mentiroso, y, por tanto, esto que él nos dice tiene que ser falso. Por otra parte, tampoco puede ser falsa, porque se deduciría entonces que los cretenses son veraces, y, por consiguiente, lo que Epiménides dice sería verdad.

A los antiguos griegos les tenía perplejos que enunciados de apariencia perfectamente clara no pudieran ser ni verdaderos ni falsos sin contradecirse a sí mismos. Un filósofo estoico, Crisipo, escribió seis tratados acerca de la paradoja del mentiroso, de los que ninguno ha llegado a nuestros días. Filetas de Cos, otro poeta griego, tan flaco que se decía de él que llevaba los zapatos lastrados con plomo para no ser arrastrado por el viento, se cavó temprana tumba de tanta angustia que le causaba. En el Nuevo Testamento, san Pablo reproduce la paradoja en su epístola a Tito:

Dijo uno de ellos, su propio profeta: «Los cretenses, siempre embusteros, malas bestias, panzas holgazanas».

Verdadero es tal testimonio...\*

TITO 1:12-13

\* La traducción es la de Nácar-Colunga, en la Biblia de la BAC. (N. del T.)

No sabemos si san Pablo cayó en la cuenta de la paradoja implícita en estas frases.



Se atribuye a Epiménides haber afirmado: «Todos los cretenses son mentirosos». Sabiendo que él mismo era cretense, ¿decía Epiménides la verdad?

¿Por qué al presentar la paradoja de esta forma, donde una frase habla de sí misma, nos parece más clara? La razón es que así redactada se eliminan todas las ambigüedades acerca de si los mentirosos mienten siempre y de si los veraces dicen siempre la verdad.

Existen infinidad de variantes. En cierta ocasión, Bertrand Russell manifestó estar convencido de que el filósofo George Edward Moore había mentido tan sólo una vez en su vida. Al preguntársele a Moore si siempre decía la verdad, éste se lo pensó un instante y respondió: «No».

Distintas formas de la paradoja del mentiroso han merecido papel central de varios cuentos. Mi favorito es *Toid Under Oath* («Declarado bajo juramento»), de Lord Dunsany. Podemos encontrarlo en una antología reciente de escritos suyos poco conocidos, *The Ghost of Heaviside Layer and Other Fantasies*. En este cuento, Dunsany conoce a un individuo que declara bajo solemne juramento que la historia que va a referir es toda la verdad y nada más que la verdad.

Al parecer, este hombre se tropezó con Satanás en una fiesta, cerrando con él un trato. Acordaron que el hombre, quien hasta la fecha había sido el peor de los jugadores de golf de su club, haría siempre hoyo en un golpe. Tras cierto número de hoyos a la primera, los demás jugadores llegaron a convencerse de que el sujeto se las apañaba para hacer trampa, y lo expulsaron del club. El cuento termina cuando Dunsany le pregunta qué exigió Satanás a cambio de tan extraordinario don. Contesta el hombre: «Extirpó de mí la capacidad de nunca más decir la verdad».



Estamos atrapados en la famosa paradoja del mentiroso. He aquí su versión más sencilla: «Esta frase es falsa». ¿Es la frase verdadera? ¡En tal caso, sería falsa! ¿Es entonces falsa? Si tal fuera, ¡sería verdadera! Las declaraciones contradictorias como ésta son más corrientes de lo que se cree.

## CHAPAS Y PINTADAS

¿Por qué son contradictorios estos enunciados? En cada uno de ellos se practica lo contrario de lo que se predica. Hay abundantes ejemplos del mismo estilo. En un parachoques dice una pegatina: «¡Ya está bien de pegatinas en los parachoques!». Dice un anuncio de prensa, en grandes letras: «No lea este anuncio». Un solterón manifiesta estar dispuesto a casarse con sólo una mujer: la bastante lista como para plantarle a él. Groucho Marx gustaba de decir que no estaba dispuesto a ingresar en ningún club que le quisiera por socio. Una etiqueta engomada dice: «Si esta etiqueta se desprendiera en tránsito, notifíquenoslo inmediatamente, por favor».

Más cercanas a la paradoja del mentiroso están las declaraciones autoinvalidantes del estilo de: «Todo conocimiento es dudoso», o el aforismo de Bernard Shaw, a saber, que: «La única regla áurea es que no existen reglas áureas».

Érase una jovencita muy rotunda  
cuyos ripios concluían en la línea segunda.

Este pareado anónimo no es paradójico, pero sirve para provocar este otro:

Érase un jovencito muy perverso.

¿En qué consiste la paradoja? ¿Tal vez mentalmente el lector ha completado el pareado, añadiendo «cuyos ripios terminaban en el primer verso»? ¿Tal vez en la idea misma de que un pareado no puede tener menos de dos versos?

Humorísticamente se han dado normas de buen estilo literario expresadas en forma paradójica. He aquí un decálogo recogido por Harold Evans, redactor jefe del *Sunday Times* londinense:

No utilice nunca doble negación.

Esfuércese en que cada pronombre concuerde con sus antecedentes.

Al dejar frases colgando, atención a los participios.

No use comas, que no sean necesarias.

El verbo tienes que concordar con el sujeto.

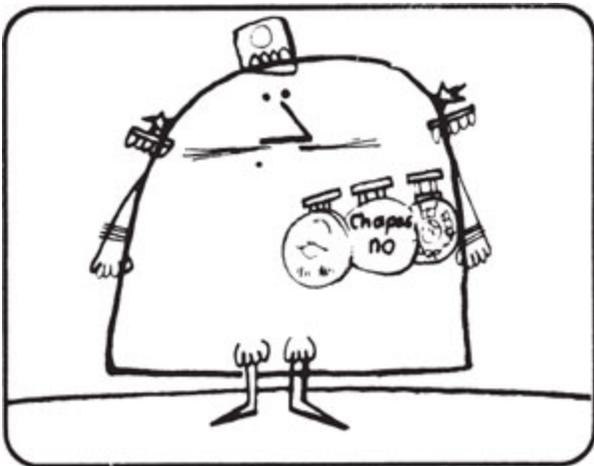
Con respecto a frases fragmentadas.

Procurar nunca los infinitivos separar demasiado.

Es importante usar los apóstrofo's correctamente.

Relea siempre lo escrito, y vea si palabras.

¡Mucha atención a la hortografía!



¿Se acuerda de aquellas chapas que decían «Chapas no»? Llegaron a hacerse bastante populares.



¿Y de las pintadas que clamaban «¡Basta ya de pintadas!»?

Un despacho de la agencia UPI (24 de abril de 1970) daba cuenta de que en unas elecciones de Oregón se permitía a los candidatos imprimir en las papeletas de voto un lema de hasta 12 palabras debajo de su nombre. He aquí el de Frank Hatch, candidato al Congreso por los demócratas: «No deberían figurar aquí quienes pierden tiempo ideando lemas de doce palabras».

En 1909, el renombrado economista británico Alfred Marshall escribía: «Toda frase breve acerca de economía es intrínsecamente falsa».

Una lectora me contó que un día ella y su niño pequeño jugaron al hueso del deseo. Ganó el niño, quien preguntó a su madre qué había ella deseado para él. La madre contestó que su deseo había sido que él ganara. ¿Fue ella quien ganó? ¿Habría ganado la madre si hubiera logrado arrancar el mayor de los dos trozos?

¿Qué significado tendría una declaración ex cátedra del papa, que afirmase que ningún papa, pasado, presente o futuro, es infalible?

Un anuncio de una revista dice: «¿Quiere usted aprender a leer? Aprenda rápidamente por correspondencia. Escribanos a la dirección adjunta».

La autoalusión puede ser divertida aun cuando no sea paradójica. En el índice de *Finite Dimensional Vector Spaces*, de Paul R. Halmos, vemos la referencia «Hochschild, G. P., 198». Excepto en esta entrada, para nada se menciona a Hochschild en todo el libro. La llamada se encuentra en la página 198.

Raymond Smullyan dio a un libro de rompecabezas lógicos el título *¿Cómo se llama este libro?* Dos años más tarde ha hecho un segundo libro, esta vez de paradojas de la vida ordinaria, titulado *This Book Needs No Title* («Este libro no precisa título»).

Puede verse un divertido artículo sobre autoalusión, con muchos ejemplos nuevos, en la sección *Temas matemáticos* de *Investigación y Ciencia* (marzo de 1981), que escribe Douglas R. Hofstadter.

## UN ENUNCIADO Y SU CONTRARIO

Veamos ahora otra paradoja acerca de valores de veracidad o falsedad, de autor anónimo.

Tenemos aquí tres enunciados falsos. ¿Será capaz el lector de descubrir cuáles?

1.  $2 + 2 = 4$
2.  $3 \times 6 = 17$
3.  $8 / 4 = 2$
4.  $13 - 6 = 5$
5.  $5 + 4 = 9$

Solución: únicamente son falsos los enunciados 2 y 4. Por consiguiente, la afirmación de hay *tres* enunciados falsos es falsa. Tenemos así el tercero de los enunciados falsos. ¿No es verdad?



¿Cuántas palabras tiene la frase de la viñeta? Seis. Está claro que su enunciado es falso. Por tanto, su contrario debería ser verdadero. ¿Es esto correcto?

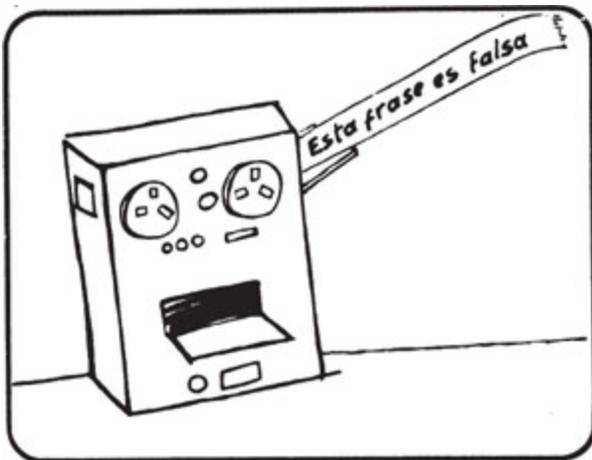


¡Es falso! La oración contraria está formada exactamente por siete palabras. ¿Cómo resolver estos raros dilemas?

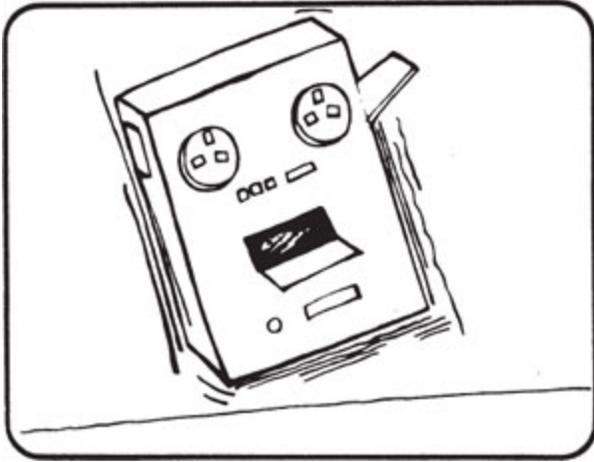
## EL ORDENADOR MAJARETA

El primer ordenador electrónico proyectado exclusivamente para resolver problemas de lógica binaria fue construido en 1947 por William Burkhart y Theodore Kalin, a la sazón todavía estudiantes en Harvard. Cuando le pidieron a su máquina que calculase el valor lógico de veracidad o falsedad que debía atribuirse a la paradoja del mentiroso, la máquina se puso a oscilar, creando, como dijo Kalin, «un follón de todos los demonios».

Un cuento de Gordon Dickson, *The Monkey Wrench*, publicado en *Astounding Science Fiction* (agosto de 1951), nos relata cómo unos científicos consiguen salvar la vida inutilizando un ordenador. La técnica que emplearon fue decirle a la máquina: «Tienes que rechazar el enunciado que te estoy proponiendo, porque todos los enunciados que yo propongo son incorrectos».



Hace muchos años, a una computadora ideada para comprobar la veracidad o falsedad de proposiciones le fue propuesta la paradoja del mentiroso: «Esta frase es falsa».



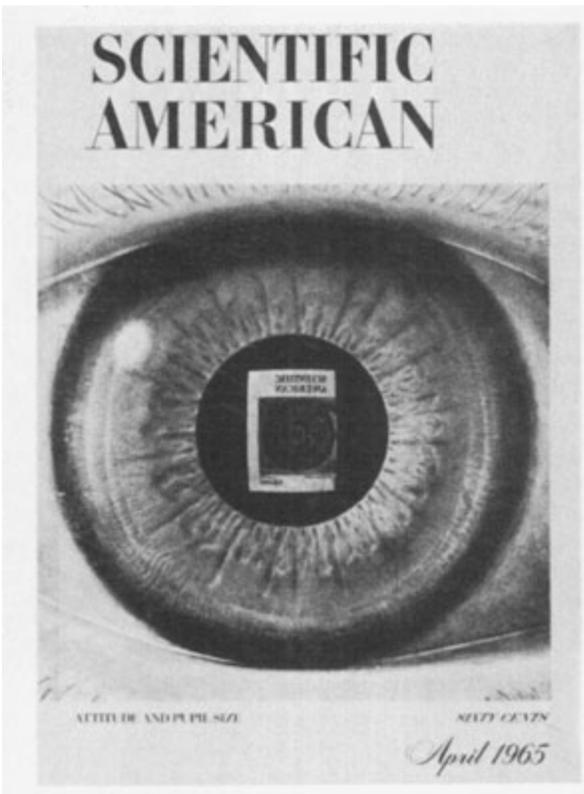
La pobre máquina se volvió tarumba, oscilando sin cesar entre verdadera y falsa.

**Computadora:**

Verdadero-Falso-Verdadero-Falso-Verdadero...

## REGRESIÓN INFINITA

La clásica paradoja del huevo y la gallina es seguramente el más conocido ejemplo de *regresión infinita*, como se la conoce en lógica. Una conocida marca de leche condensada presentaba en sus botes el dibujo de una lechera que sostiene un bote donde vemos dibujada otra lechera, que sostiene un bote... y así indefinidamente, a modo de juego infinito de cajas chinas o muñecas rusas. Vemos abajo la portada de abril de 1965 de *Scientific American*. La portada está reflejada en la pupila de un ojo. En el reflejo, un ojo menor reproduce una portada aún más pequeña, y así sucesivamente.



En muchas peluquerías hay dos espejos situados uno frente a otro. En ellos podemos ver el comienzo de una regresión infinita de reflejos.

En las obras literarias no faltan los ejemplos de regresión infinita. En *Contrapunto*, de Aldous Huxley, uno de los personajes, Philip Quarles, está escribiendo una novela acerca de un novelista que escribe una novela acerca de un novelista... Hay regresiones parecidas en una novela de André Gide, *Los monederos falsos*, en una obra teatral de E. E. Cummings, *Him*; y en cuentos cortos como *The Notebook*, de Norman Mailer, donde a un joven escritor se le ocurre la idea de un cuento, que es el mismo cuento que Mailer está escribiendo.

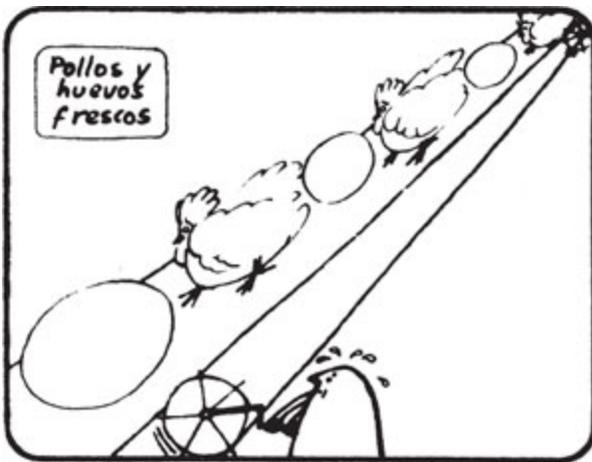
Jonathan Swift describió en un poema una regresión infinita de pulgas, poema que el matemático Augustus de Morgan recompuso así:

Las pulgas grandes  
a lomos cargan pulguitas,  
quienes las pican.  
Y las pulguitas  
transportan a otras menores,  
ad infinitum.

Y las más grandes van a su vez  
a costas de otras mayores,  
y éstas,  
aún cabalgan sobre otras,  
y así una vez y otra.

Dos cuestiones científicas de nuestra era, concernientes a regresiones infinitas, seguramente no pueden ser contestadas nunca. ¿Es nuestro universo, en su continua expansión, todo cuanto existe, o es sólo parte de un sistema

más vasto todavía, del que nada sabemos? La segunda cuestión va en sentido contrario, hacia lo pequeño. ¿Es el electrón una partícula última, o, por el contrario, tiene estructura interna, y está compuesto por partes aún menores? Los físicos opinan ahora que muchas partículas están formadas por combinaciones de quarks. ¿Estarán los quarks formados por entidades aún más pequeñas? Hay físicos que consideran verosímil que no haya fin en ninguna de estas dos direcciones. El universo total de universos sería como un inmenso juego de cajas chinas, en el que no hubiera ni caja mínima ni caja máxima, al igual que no existe un entero positivo que sea máximo ni un quebrado menor que los demás.



Pretendiendo resolver el clásico dilema «¿Qué fue antes, el huevo o la gallina?», el ordenador estaba pasándolo tan mal como una persona.

¿La gallina? No, pues tuvo que nacer de un huevo empollado. ¿El huevo, entonces? No. Una gallina tuvo antes que ponerlo.

## LA PARADOJA DE PLATÓN Y SÓCRATES

Esta variante de la paradoja del mentiroso, que fue muy analizada en tiempos medievales, es importante porque muestra que la fuente de confusión de las paradojas reside mucho más profundamente que la mera autoalusión. Si la oración *A* es verdadera, la oración *B* será falsa, y si *B* es falsa, entonces *A* *tiene* que ser falsa. Pero si *A* es falsa, entonces *B* es verdadera, y si *B* es verdadera, entonces *A* es verdadera. Ahora estamos de vuelta en el punto de partida, repitiéndose el proceso cíclicamente, como dos polis de historieta persiguiéndose uno al otro en torno a un edificio. Ninguna de las frases alude a sí misma, pero tomadas conjuntamente cambian continuamente el valor de verdad asignado a la otra, incapacitándonos para decir si alguna de ellas es verdadera o falsa.

Puede resultar entretenido preparar para los amigos la siguiente variante de la paradoja, ideada por P. E. B. Jourdain, un matemático inglés.

En una cara de una ficha en blanco escribimos en letras de molde:

LA FRASE ESCRITA EN LA OTRA CARA DE ESTA  
TARJETA ES VERDADERA

Y en el reverso de la misma ficha escribimos:

LA FRASE ESCRITA EN LA OTRA CARA DE ESTA  
TARJETA ES FALSA

Mucha gente tiene que darle vueltas a la ficha, una y otra vez, antes de caer en la cuenta de que ha sido atrapado en

una regresión sin fin, donde cada proposición va siendo alternativamente verdadera y falsa.



Pensemos por un momento en la frase del dibujo. Un cretense habla de los cretenses. Una proposición alude a sí misma. Una chapa habla de las chapas. Todos estos enunciados parecen hablar de sí mismos. ¿Será la autoalusión culpable de sus males?



No. Ya los antiguos griegos sabían que no basta con eliminar la autoalusión. He aquí un diálogo que lo demuestra.

**Platón:** La próxima declaración de Sócrates será falsa.

**Sócrates:** ¡Platón ha dicho la verdad!