Perspektiven der Mathematikdidaktik
Gabriele Kaiser *Hrsg.*

RESEARCH

Martina Greiler-Zauchner

Rechenwege für die Multiplikation und ihre Umsetzung

Einsicht in operative Beziehungen erlangen und aufgabenadäquat anwenden

MOREMEDIA
Springer Spektrum

Perspektiven der Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von

Gabriele Kaiser, Sektion 5, Universität Hamburg, Hamburg, Deutschland

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert, die diese Felder empirisch untersuchen, qualitativ oder quantitativ orientiert. Die Publikationen sollen daher auch Antworten zu drängenden Fragen der Mathematikdidaktik und zu offenen Problemfeldern wie der Wirksamkeit der Lehrerausbildung oder der Implementierung von Innovationen im Mathematikunterricht anbieten. Damit leistet die Reihe einen Beitrag zur empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik und zu sich daraus ergebenden Forschungsperspektiven.

Reihe herausgegeben von
Prof. Dr. Gabriele Kaiser
Universität Hamburg

Martina Greiler-Zauchner

Rechenwege für die Multiplikation und ihre Umsetzung

Einsicht in operative Beziehungen erlangen und aufgabenadäquat anwenden

Springer Spektrum

Martina Greiler-Zauchner
Institut für Pädagogik und Didaktik der
Elementar- und Primarstufe
Pädagogische Hochschule Kärnten
Klagenfurt, Österreich

Dissertation Universität Klagenfurt, 2020

ISSN 2522-0799 ISSN 2522-0802 (electronic)
Perspektiven der Mathematikdidaktik
ISBN 978-3-658-37525-6 ISBN 978-3-658-37526-3 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-37526-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Marija Kojic
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Genau an dem Tag, an dem mich Martina Greiler-Zauchner um ein Geleitwort für die hier vorliegende Buchfassung ihrer Dissertation zum sogenannten „halbschriftlichen Multiplizieren“ bat – und dieser Bitte komme ich natürlich von Herzen gerne nach –, genau an diesem Tag hatte ich eine Lehrveranstaltung an meiner Universität zu eben diesem Thema. Die Teilnehmerinnen – Studierende im zweiten Jahr des fünfjährigen Studiengangs „Bildungswissenschaften für den Primarbereich“, dessen Absolvierung in Südtirol zum Unterricht an Grundschulen berechtigt – erhielten von mir zum Einstieg die Aufgabe, sich einen geschickten Rechenweg für $25 \cdot 64$ zu überlegen. Nach einigem Nachdenken gab es eine Reihe von Vorschlägen für durchaus vorteilhafte Rechenwege, auch für einige recht umständliche, aber richtige; und dann auch den Vorschlag, wie folgt vorzugehen: Zunächst 20 mal 60 zu rechnen, das ergebe 120 (sic!), dazu noch 5 mal 4, also 20, zu addieren; und schon sei man fertig, $25 \cdot 64$ sei also 140.

Sollten Sie nun beim Lesen dieses Berichts erschrocken sein: Ich war es nur deshalb nicht mehr, weil ich in 20 Jahren Hochschullehre gelernt habe, dass man damit rechnen muss: mit jungen Erwachsenen nämlich, die zwar in der Regel das kleine Einmaleins beherrschen, die zumeist auch noch wissen, wie man den Algorithmus der schriftlichen Multiplikation durchführt und dabei z. B. auch $25 \cdot 64$ zur Gänze auf Aufgaben des kleinen Einmaleins reduziert; die aber in der Schule offenbar nie gelernt haben, dass es neben dem Taschenrechner und dem (oft unverstandenen) Algorithmus noch andere Wege gibt, Multiplikationen jenseits des kleinen Einmaleins zu lösen. Wege, die bei manchen Aufgaben nicht nur weniger Rechenaufwand bedeuten als die schriftliche Multiplikation, sondern die man mit einer gewissen Berechtigung als „elegant“ bezeichnen könnte, wie etwa den folgenden: 25 ist ein Viertel von 100; $100 \cdot 64 = 6400$; ein Viertel davon ist 1600, also ist $25 \cdot 64 = 1600$.

Natürlich kann $25 \cdot 64$ auch anders gelöst werden; etwa, indem man zunächst $10 \cdot 64 = 640$ rechnet, dies zu $20 \cdot 64 = 1280$ verdoppelt und noch die Hälfte von $10 \cdot 64 = 640$, also $5 \cdot 64 = 320$, addiert. Oder wir wenden unser Wissen, dass $4 \cdot 25 = 100$, in etwas anderer Weise an, als oben erläutert: Wir verdoppeln zu $8 \cdot 25 = 200$, weiter zu $16 \cdot 25 = 400$, und noch einmal zu $32 \cdot 25 = 800$, bis wir dieses ein letztes Mal zu $64 \cdot 25 = 1600$ verdoppeln.

All das sind Varianten dessen, was im deutschsprachigen Raum verbreitet als „halbschriftliches Multiplizieren“ bezeichnet wird und vielleicht besser als „(nach Belieben) schriftgestütztes Kopfrechnen“ bezeichnet werden sollte. Nun wurden dem halbschriftlichen Addieren und Subtrahieren in den letzten Jahrzehnten, auch international, eine beträchtliche Anzahl an Studien gewidmet. Das halbschriftliche Rechnen (oder, mit einem begrifflich nicht ganz sauberen, aber griffigen Titel: das „Zahlenrechnen“) im Bereich von Multiplikation und Division ist hingegen weit weniger erforscht, insbesondere im deutschen Sprachraum. Diese geringe Beachtung in der Forschung korrespondiert vermutlich, und dann bedauerlicher Weise, mit einer vergleichsweise geringen Beachtung in der aktuellen Praxis des Grundschulunterrichts, jedenfalls in Österreich. Sie entspricht aber keineswegs der tatsächlich großen Bedeutung, die dem halbschriftlichen Rechnen im Allgemeinen in der internationalen fachdidaktischen Literatur seit Jahrzehnten mit starken Argumenten zugeschrieben wird.

Vor diesem Hintergrund liefert die vorliegende Schrift Martina Greiler-Zauchners einen wichtigen Beitrag zum Schließen einer Forschungslücke, sowohl im rekonstruktiven Theorieteil, in dem sie die vorliegende, vorwiegend englischsprachige Forschungsliteratur äußerst gründlich aufarbeitet, als auch im konstruktiven empirischen Teil. In diesem erläutert sie zunächst einen von ihr selbst auf Basis einschlägiger Literatur entwickelten, stoffdidaktisch überzeugenden konkreten Vorschlag zur Erarbeitung des Zahlenrechnens im Bereich der Multiplikation im dritten Schuljahr. In weiterer Folge stellt sie die – äußerst ermutigenden – Ergebnisse einer Erprobung dieses Vorschlags in zwei Zyklen in ausgewählten Klassen detailliert und differenziert dar. Zahlreich angeführte und analysierte Dokumente von Bearbeitungen der substanziellen Aufgaben dieser Unterrichtssequenz durch die teilnehmenden Kinder belegen ein weiteres Mal eindringlich, wie vielfältig, schlau, originell Kinder im Finden von Rechenwegen sind, wenn man sie nur lässt und ihnen Raum, Zeit und gezielte Anregungen zum Entdecken, Erproben und Weiterentwickeln gibt.

Wird halbschriftliches Multiplizieren hingegen als möglichst rasch zu durchlaufendes Zwischenstadium zum schriftlichen Algorithmus behandelt, darf man sich auch nicht wundern, wenn Kinder, denen man damit wichtige Lernchancen vorenthält, zu Erwachsenen werden, die mit Aufgaben wie $25 \cdot 64$ überfordert sind. Und das ist bedauerlich – nicht nur deshalb, weil es im Alltag immer wieder nützlich ist, auch über das kleine Einmaleins hinaus im Kopf (vor allem auch überschlagend) multiplizieren zu können. *Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit*, sagt uns Georg Cantor (1845–1918). Eine Facette dieser Freiheit – zugegeben: eine kleine; aber eine *wertvolle* Facette dieser Freiheit – bietet das sogenannte „halbschriftliche Rechnen“. Wer die Rechengesetze einhält, kann sich innerhalb dieser frei bewegen, etwa auch, um Aufgaben wie $25 \cdot 64$ zu lösen. Kinder, die im Unterricht eingeladen werden, über unterschiedliche Lösungswege nachzudenken, entwickeln und schärfen dabei ihr Verständnis für Rechengesetze: einer von vielen Zugängen in das Reich der *Freiheit der Mathematik*. Die vorliegende Schrift macht deutlich, wie wir Kindern diesen Zugang eröffnen können. Sie möge viele Leser*innen finden!

Brixen
am 15.03.2022

Michael Gaidoschik
Fakultät für Bildungswissenschaften
Freie Universität Bozen
Brixen/Bressanone, Italien

Danksagung

Mit der Fertigstellung dieser Arbeit blicke ich auf einen fünfjährigen Forschungs- und Entwicklungsprozess zurück, der einen bedeutenden Teil meines beruflichen Lebens einnahm. Die Erfahrungen und Einblicke in das wissenschaftliche Arbeiten im Bereich der Mathematikdidaktik der Primarstufe sowie die Einsichten in individuelle Denk- und Lernprozesse von Kindern, die ich während dieser Zeit gewinnen konnte, trugen wesentlich zu meiner beruflichen Weiterentwicklung bei. Ich möchte an dieser Stelle denjenigen danken, die den Prozess meiner Arbeit konstruktiv unterstützten und begleiteten:

Meinem Betreuer, Prof. Dr. Michael Gaidoschik, danke ich für den hervorragenden wissenschaftlichen Diskurs: In zahlreichen Besprechungen verstand er es immer wieder, diese Arbeit mit passenden Denkanstößen Schritt für Schritt weiterzuentwickeln. Seine herausfordernden Rückmeldungen trugen nicht nur wesentlich zu einer Qualitätssteigerung der Arbeit, sondern auch zu meiner wissenschaftlichen und beruflichen Entwicklung bei.

Prof.in Dr.in Silke Ruwisch danke ich für das Interesse an meinem Forschungsprojekt und die Betreuung meiner Arbeit als Gutachterin.

Besonderer Dank ergeht an die acht Lehrkräfte, die mein Lernarrangement durchführten und mir die Datenerhebung ermöglichten. Hervorzuheben ist ihr unermüdliches Interesse an der Entwicklung und am Denken der Kinder und ihre Offenheit für neue fachdidaktische Konzepte. Ebenso danke ich den Kindern, die sich in den Interviews mit großer Ausdauer der schwierigen Aufgabe stellten, ihre Rechenwege zu erklären und ihre Begründungen zu verbalisieren.

Meiner Familie und meinen Freunden danke ich dafür, dass sie immer für mich da waren.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

Ankeraufgabe	Rechenwege unter Nutzung der Verzehnfachung des einstelligen Faktors als Ankeraufgabe mit anschließendem additiven Weiterrechnen
Gegensinniges Verändern	Rechenwege unter Nutzung des Gesetzes von der Konstanz des Produktes
Halbieren	Rechenwege unter Einbezug von Halbierungen des Zehnfachen
Mult_1x2_ZR	Multiplikationen einstelliger mit zweistelligen Zahlen im Bereich des Zahlenrechnens
Verdoppeln	Rechenwege unter Einbezug von Verdoppelungen
Vollständiges Auszählen	Rechenwege unter Nutzung des vollständigen Auszählens mithilfe ikonischer Hilfsmittel
Wiederholte Addition	Rechenwege unter Nutzung der wiederholten Addition eines Faktors
Zerlegung in eine Differenz	Rechenwege unter Nutzung des Distributivgesetzes auf Grundlage einer Zerlegung eines Faktors in eine Differenz
Zerlegung in eine Summe	Rechenwege unter Nutzung des Distributivgesetzes auf Grundlage einer Zerlegung des zweistelligen Faktors in eine Summe

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Einleitung

Inhaltliche Einbettung und Forschungsinteresse
In einem für diese Arbeit geführten Interview wurde Stella gebeten, zur Aufgabe 5·24 möglichst viele Rechenwege zu finden. Stella fand stolz fünf unterschiedliche Rechenwege:

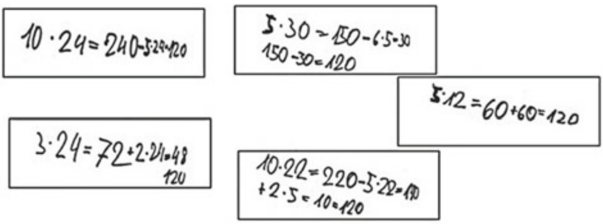

Abbildung 1 Stellas Rechenwege für 5·24

Vielleicht hätten Sie zusätzlich noch den sehr naheliegenden Rechenweg 5·24 = 5·20 + 5·4 gefunden?

Bei genauerer Betrachtung der fünf von Stella genannten Rechenwege hinsichtlich zugrundeliegender mathematischer Gesetze ergibt sich, dass Stella für alle fünf Rechenwege eigentlich immer das Distributivgesetz[1] nutzt und den Faktor 5 in 10 – 5, 3 + 2 bzw. den Faktor 24 in 30 – 6, 12 + 12 und 22 + 2 zerlegt.

Im Grunde erprobt sie das entdeckte Rechengesetz, indem sie die Faktoren in solche Summen bzw. Differenzen zerlegt, deren Teilprodukte für sie leicht auszurechnen sind, und belegt dadurch ihre Einsicht in die zugrundeliegenden Strukturen.

[1] $(a + b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ bzw. $(a – b)\cdot c = a\cdot c – b\cdot c$

Das Rechengesetz steht fest, „aber der Natur mathematischer Gesetze entsprechend ist ihre Anwendung frei“ (Wittmann und Müller 2017b, S. 73).

Aus Sicht der Mathematikdidaktik geht es dabei nicht darum, dass jedes Kind möglichst viele unterschiedliche Rechenwege schnell und korrekt anwenden kann, sondern das Beispiel Stella steht stellvertretend für folgende Sichtweisen auf die Nutzung unterschiedlicher Rechenwege:

Es geht darum,

- „sich der Existenz verschiedener mathematisch sinnvoller Wege bewusst“ zu werden „und dieses Wissen für sich individuell“ zu nutzen (Wittmann und Müller 2017b, S. 73).
- Einsichten in Beziehungen und Strukturen zu erlangen.
- die erlangten Einsichten in Beziehungen und Strukturen zu nutzen, um Rechenwege aufgrund besonderer Aufgabenmerkmale aufgabenadäquat zu wählen.

Die Mathematikdidaktik ist sich weitgehend einig, dass Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule mehr lernen sollten als das korrekte und möglichst schnelle Lösen von Rechenaufgaben. Das Durchschauen der zugrundeliegenden Strukturen sollte in den Fokus gerückt werden, oder wie Hiebert (1990) formuliert: „*If we want students to remember procedures, we should ask them to step back and think about the procedures they are using rather than practicing more exercises*“ (Hiebert 1990 zitiert nach Krauthausen 1993, S. 195).

Doch wie schaut es in der Realität aus? Eine Analyse gängiger Schulbücher in Abschnitt 4.4 zeigt, dass die Thematisierung von Rechenwegen für die Multiplikation mehrstelliger Zahlen sehr oft wie folgt aufgebaut ist:

(1) Ein Hauptrechenweg (stellengerechtes Zerlegen in eine Summe mittels Distributivgesetzes) wird erarbeitet und eingeübt.
(2) Weitere Rechenwege werden in den meisten Schulbüchern erwähnt, aber sehr selten begründet oder in Bezug auf die Adäquatheit bei bestimmten Aufgaben verglichen.
(3) Möglichkeiten für Kinder, selbst Rechenwege zu finden, zu vergleichen und zu begründen, werden selten geboten.
(4) Das schriftliche Verfahren zur Multiplikation wird direkt im Anschluss erarbeitet und löst in Folge dann im Schulbuch das Rechnen nach unterschiedlichen Rechenwegen ab.

Nimmt man die Schulbücher als Indiz dafür, was in der Praxis des Mathematikunterrichts geschieht, so scheint es hier eine Kluft zwischen Theorie und Praxis zu geben.

Vor diesem Hintergrund stellt sich die zentrale Frage, wie Unterricht gestaltet werden kann, damit möglichst viele Kinder Einsicht in verschiedene Rechenwege und in die zugrundeliegenden Strukturen erlangen und Rechenwege in Folge auch sicher und aufgabenadäquat anwenden können. Darüber hinaus fehlen – im Gegensatz zur mehrstelligen Addition und Subtraktion – Ergebnisse aus der Forschung, die den Einfluss unterschiedlicher Fokussierungen im Unterrichtsgeschehen auf die (aufgabenadäquate) Verwendung von Rechenwegen für die Multiplikation und auf zugrundeliegende Einsichten beschreiben (siehe Abschnitt 3.3 und Padberg und Benz (2021, S. 214)).

Im Sinne von E. Ch. Wittmann, der es als Kernaufgabe der Mathematikdidaktik sieht, „inhaltsbezogene theoretische Konzepte und praktische Unterrichtsbeispiele" zu entwickeln und zu erforschen, mit der zentralen Absicht, den realen Unterricht zu verbessern (Wittmann 1998, S. 330), ist es Ziel dieser Arbeit, praxisnahe Entwicklungsarbeit mit empirischer und theoretischer Absicherung zu verknüpfen. So liegt der Fokus der vorliegenden Studie einerseits auf der Entwicklung und Umsetzung eines fachdidaktisch untermauerten Lernarrangements zum Zahlenrechnen im Bereich der Multiplikation (einstellig mal zweistellig). Andererseits werden die von den Kindern genutzten Rechenwege und gezeigten Einsichten in zugrundeliegende Konzepte und Strukturen *vor* und *nach* der Umsetzung eines lernförderlichen Lernarrangement untersucht. Aus den Ergebnissen wird in weiterer Folge eine Typisierung der Kinder nach genutzten Rechenwegen vorgenommen. Aus dieser Typisierung sollen Aussagen

- zur sicheren Anwendung der Rechenwege,
- zu Einsichten in zugrundeliegende operative Beziehungen und
- zur Nutzung besonderer Aufgabenmerkmale für Rechenvorteile abgeleitet werden.

Weitere Schwerpunkte der Studie liegen auf den Hürden in den Lernprozessen im Zuge der Umsetzung des Lernarrangements und auf den Sichtweisen der Kinder im Hinblick auf die Bedeutung aufgabenadäquaten Rechnens.

Forschungsmethodologische und forschungsmethodische Einbettung

Die Studie ist der qualitativen empirischen Sozialforschung zuzuordnen und im Design einer *Educational Design Research* Studie (Plomp 2013; Van den Akker et al. 2006a) angelegt. Kennzeichnend für diese Art der Forschungskonzeption ist eine enge Verzahnung zwischen Praxis und Forschung. So liegen die Schwerpunkte von *Educational Design Research* Studien im Zuge des Forschungsprozesses auf zwei Ebenen. Einerseits werden im Forschungsprozess Erkenntnisse im Hinblick auf die Entwicklung von Unterrichtsaktivitäten angestrebt und andererseits werden aus den Ergebnissen wissenschaftliche Theorien über das Lehren und Lernen des spezifischen Lerngegenstandes weiterentwickelt.

Vor diesem Hintergrund wurden zur Datenerhebung qualitative Interviews nach der revidierten klinischen Methode durchgeführt (Selter und Spiegel 1997, S. 110 f.). Die Auswertung der Interviews erfolgte am Material selbst mittels induktiver Kategorienbildung als auch auf Basis von Theorien durch deduktive Analyseschritte (Mayring 2001, S. 5 f.). Ferner wurden Leitfadeninterviews mit den Klassenlehrkräften geführt. Zur Erhebung von Rechenwegen wurden aus forschungsökonomischen Gründen zusätzlich noch schriftliche Erhebungen genutzt.

Gliederung der Arbeit

Die folgenden Kapitel 1 bis 4 erörtern literaturbasiert und den aktuellen Forschungsstand einbeziehend die theoretischen Hintergründe der Arbeit. Zu Beginn werden jene theoretischen Grundlagen dargelegt, die sich allgemein auf Rechenwege aller Operationen beziehen. Das Kapitel 1: *Einteilung von Rechenwegen* thematisiert die Kategorisierung von Rechenwegen. Dabei werden die unterschiedlichen Formen des Rechnens (Zahlenrechnen, Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, Ziffernrechnen bzw. schriftliches Rechnen) und deren Charakteristika beschrieben, um den Begriff *Zahlenrechnen* für die vorliegende Arbeit zu definieren. Weiters wird das Zahlenrechnen aus fachdidaktischer Sicht analysiert. Kapitel 2: *Flexible und aufgabenadäquate Rechenwege* befasst sich mit den Begriffen *Flexibilität* und *Aufgabenadäquatheit* in Bezug auf die Wahl eines Rechenweges und entwickelt in Folge eine Definition dieser Begriffe für die vorliegende Studie. Kapitel 3: *Multiplikation mehrstelliger Zahlen – fachlicher und empirischer Rahmen* grenzt die Operation und der Zahlenraum auf das Multiplizieren einstelliger mit zweistelligen Zahlen ein und fixiert die Form des Rechnens auf das Zahlenrechnen. Es werden einerseits die Rechenwege für die Multiplikation hinsichtlich zugrundeliegender Rechengesetze mathematisch analysiert und andererseits gängige Kategorisierungen von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen aus der mathematikdidaktischen Literatur diskutiert. Der letzte Teil fasst die Forschungsergebnisse zu Entwicklung und Verwendung von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen zusammen.

In Kapitel 4: *Multiplikation mehrstelliger Zahlen – unterrichtliche Umsetzung* wird die unterrichtliche Realisierung des multiplikativen Zahlenrechnens erörtert.