

Perspektiven der Mathematikdidaktik

Gabriele Kaiser *Hrsg.*

RESEARCH

Martina Greiler-Zauchner

Rechenwege für die Multiplikation und ihre Umsetzung

Einsicht in operative Beziehungen
erlangen und aufgabenadäquat
anwenden

MOREMEDIA



Springer Spektrum

Perspektiven der Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von

Gabriele Kaiser, Sektion 5, Universität Hamburg, Hamburg, Deutschland

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert, die diese Felder empirisch untersuchen, qualitativ oder quantitativ orientiert. Die Publikationen sollen daher auch Antworten zu drängenden Fragen der Mathematikdidaktik und zu offenen Problemfeldern wie der Wirksamkeit der Lehrerausbildung oder der Implementierung von Innovationen im Mathematikunterricht anbieten. Damit leistet die Reihe einen Beitrag zur empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik und zu sich daraus ergebenden Forschungsperspektiven.

Reihe herausgegeben von

Prof. Dr. Gabriele Kaiser

Universität Hamburg

Martina Greiler-Zauchner

Rechenwege für die Multiplikation und ihre Umsetzung

Einsicht in operative Beziehungen
erlangen und aufgabenadäquat
anwenden

Martina Greiler-Zauchner
Institut für Pädagogik und Didaktik der
Elementar- und Primarstufe
Pädagogische Hochschule Kärnten
Klagenfurt, Österreich

Dissertation Universität Klagenfurt, 2020

ISSN 2522-0799 ISSN 2522-0802 (electronic)
Perspektiven der Mathematikdidaktik
ISBN 978-3-658-37525-6 ISBN 978-3-658-37526-3 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-37526-3>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer Fachmedien
Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2022

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Marija Kojic

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Genau an dem Tag, an dem mich Martina Greiler-Zauchner um ein Geleitwort für die hier vorliegende Buchfassung ihrer Dissertation zum sogenannten „halb-schriftlichen Multiplizieren“ bat – und dieser Bitte komme ich natürlich von Herzen gerne nach –, genau an diesem Tag hatte ich eine Lehrveranstaltung an meiner Universität zu eben diesem Thema. Die Teilnehmerinnen – Studierende im zweiten Jahr des fünfjährigen Studiengangs „Bildungswissenschaften für den Primarbereich“, dessen Absolvierung in Südtirol zum Unterricht an Grundschulen berechtigt – erhielten von mir zum Einstieg die Aufgabe, sich einen geschickten Rechenweg für $25 \cdot 64$ zu überlegen. Nach einigem Nachdenken gab es eine Reihe von Vorschlägen für durchaus vorteilhafte Rechenwege, auch für einige recht umständliche, aber richtige; und dann auch den Vorschlag, wie folgt vorzugehen: Zunächst 20 mal 60 zu rechnen, das ergebe 120 (sic!), dazu noch 5 mal 4, also 20, zu addieren; und schon sei man fertig, $25 \cdot 64$ sei also 140.

Sollten Sie nun beim Lesen dieses Berichts erschrocken sein: Ich war es nur deshalb nicht mehr, weil ich in 20 Jahren Hochschullehre gelernt habe, dass man damit rechnen muss: mit jungen Erwachsenen nämlich, die zwar in der Regel das kleine Einmaleins beherrschen, die zumeist auch noch wissen, wie man den Algorithmus der schriftlichen Multiplikation durchführt und dabei z. B. auch $25 \cdot 64$ zur Gänze auf Aufgaben des kleinen Einmaleins reduziert; die aber in der Schule offenbar nie gelernt haben, dass es neben dem Taschenrechner und dem (oft unverstandenen) Algorithmus noch andere Wege gibt, Multiplikationen jenseits des kleinen Einmaleins zu lösen. Wege, die bei manchen Aufgaben nicht nur weniger Rechenaufwand bedeuten als die schriftliche Multiplikation, sondern die man mit einer gewissen Berechtigung als „elegant“ bezeichnen könnte, wie etwa den folgenden: 25 ist ein Viertel von 100; $100 \cdot 64 = 6400$; ein Viertel davon ist 1600, also ist $25 \cdot 64 = 1600$.

Natürlich kann $25 \cdot 64$ auch anders gelöst werden; etwa, indem man zunächst $10 \cdot 64 = 640$ rechnet, dies zu $20 \cdot 64 = 1280$ verdoppelt und noch die Hälfte von $10 \cdot 64 = 640$, also $5 \cdot 64 = 320$, addiert. Oder wir wenden unser Wissen, dass $4 \cdot 25 = 100$, in etwas anderer Weise an, als oben erläutert: Wir verdoppeln zu $8 \cdot 25 = 200$, weiter zu $16 \cdot 25 = 400$, und noch einmal zu $32 \cdot 25 = 800$, bis wir dieses ein letztes Mal zu $64 \cdot 25 = 1600$ verdoppeln.

All das sind Varianten dessen, was im deutschsprachigen Raum verbreitet als „halbschriftliches Multiplizieren“ bezeichnet wird und vielleicht besser als „(nach Belieben) schriftgestütztes Kopfrechnen“ bezeichnet werden sollte. Nun wurden dem halbschriftlichen Addieren und Subtrahieren in den letzten Jahrzehnten, auch international, eine beträchtliche Anzahl an Studien gewidmet. Das halbschriftliche Rechnen (oder, mit einem begrifflich nicht ganz sauberen, aber griffigen Titel: das „Zahlenrechnen“) im Bereich von Multiplikation und Division ist hingegen weit weniger erforscht, insbesondere im deutschen Sprachraum. Diese geringe Beachtung in der Forschung korrespondiert vermutlich, und dann bedauerlicher Weise, mit einer vergleichsweise geringen Beachtung in der aktuellen Praxis des Grundschulunterrichts, jedenfalls in Österreich. Sie entspricht aber keineswegs der tatsächlich großen Bedeutung, die dem halbschriftlichen Rechnen im Allgemeinen in der internationalen fachdidaktischen Literatur seit Jahrzehnten mit starken Argumenten zugeschrieben wird.

Vor diesem Hintergrund liefert die vorliegende Schrift Martina Greiler-Zauchners einen wichtigen Beitrag zum Schließen einer Forschungslücke, sowohl im rekonstruktiven Theorieteil, in dem sie die vorliegende, vorwiegend englischsprachige Forschungsliteratur äußerst gründlich aufarbeitet, als auch im konstruktiven empirischen Teil. In diesem erläutert sie zunächst einen von ihr selbst auf Basis einschlägiger Literatur entwickelten, stoffdidaktisch überzeugenden konkreten Vorschlag zur Erarbeitung des Zahlenrechnens im Bereich der Multiplikation im dritten Schuljahr. In weiterer Folge stellt sie die – äußerst ermutigenden – Ergebnisse einer Erprobung dieses Vorschlags in zwei Zyklen in ausgewählten Klassen detailliert und differenziert dar. Zahlreich angeführte und analysierte Dokumente von Bearbeitungen der substanziellen Aufgaben dieser Unterrichtssequenz durch die teilnehmenden Kinder belegen ein weiteres Mal eindringlich, wie vielfältig, schlau, originell Kinder im Finden von Rechenwegen sind, wenn man sie nur lässt und ihnen Raum, Zeit und gezielte Anregungen zum Entdecken, Erproben und Weiterentwickeln gibt.

Wird halbschriftliches Multiplizieren hingegen als möglichst rasch zu durchlaufendes Zwischenstadium zum schriftlichen Algorithmus behandelt, darf man sich auch nicht wundern, wenn Kinder, denen man damit wichtige Lernchancen vorenthält, zu Erwachsenen werden, die mit Aufgaben wie $25 \cdot 64$ überfordert

sind. Und das ist bedauerlich – nicht nur deshalb, weil es im Alltag immer wieder nützlich ist, auch über das kleine Einmaleins hinaus im Kopf (vor allem auch überschlagend) multiplizieren zu können. *Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit*, sagt uns Georg Cantor (1845–1918). Eine Facette dieser Freiheit – zugegeben: eine kleine; aber eine *wertvolle* Facette dieser Freiheit – bietet das sogenannte „halbschriftliche Rechnen“. Wer die Rechengesetze einhält, kann sich innerhalb dieser frei bewegen, etwa auch, um Aufgaben wie $25 \cdot 64$ zu lösen. Kinder, die im Unterricht eingeladen werden, über unterschiedliche Lösungswege nachzudenken, entwickeln und schärfen dabei ihr Verständnis für Rechengesetze: einer von vielen Zugängen in das Reich der *Freiheit der Mathematik*. Die vorliegende Schrift macht deutlich, wie wir Kindern diesen Zugang eröffnen können. Sie möge viele Leser*innen finden!

Brixen
am 15.03.2022

Michael Gaidoschik
Fakultät für Bildungswissenschaften
Freie Universität Bozen
Brixen/Bressanone, Italien

Danksagung

Mit der Fertigstellung dieser Arbeit blicke ich auf einen fünfjährigen Forschungs- und Entwicklungsprozess zurück, der einen bedeutenden Teil meines beruflichen Lebens einnahm. Die Erfahrungen und Einblicke in das wissenschaftliche Arbeiten im Bereich der Mathematikdidaktik der Primarstufe sowie die Einsichten in individuelle Denk- und Lernprozesse von Kindern, die ich während dieser Zeit gewinnen konnte, trugen wesentlich zu meiner beruflichen Weiterentwicklung bei. Ich möchte an dieser Stelle denjenigen danken, die den Prozess meiner Arbeit konstruktiv unterstützten und begleiteten:

Meinem Betreuer, Prof. Dr. Michael Gaidoschik, danke ich für den hervorragenden wissenschaftlichen Diskurs: In zahlreichen Besprechungen verstand er es immer wieder, diese Arbeit mit passenden Denkanstößen Schritt für Schritt weiterzuentwickeln. Seine herausfordernden Rückmeldungen trugen nicht nur wesentlich zu einer Qualitätssteigerung der Arbeit, sondern auch zu meiner wissenschaftlichen und beruflichen Entwicklung bei.

Prof.ⁱⁿ Dr. ⁱⁿ Silke Ruwisch danke ich für das Interesse an meinem Forschungsprojekt und die Betreuung meiner Arbeit als Gutachterin.

Besonderer Dank ergeht an die acht Lehrkräfte, die mein Lernarrangement durchführten und mir die Datenerhebung ermöglichten. Hervorzuheben ist ihr unermüdliches Interesse an der Entwicklung und am Denken der Kinder und ihre Offenheit für neue fachdidaktische Konzepte. Ebenso danke ich den Kindern, die sich in den Interviews mit großer Ausdauer der schwierigen Aufgabe stellten, ihre Rechenwege zu erklären und ihre Begründungen zu verbalisieren.

Meiner Familie und meinen Freunden danke ich dafür, dass sie immer für mich da waren.

Inhaltsverzeichnis

1	Einteilung von Rechenwegen	1
1.1	Verwendung der Begriffe Rechenform, Rechenweg, Lösungsweg und Rechenstrategie	2
1.2	Ziffernrechnen und Zahlenrechnen	5
1.3	Kopfrechnen	7
1.4	Halbschriftliches Rechnen	9
1.4.1	Schriftliches Rechnen	11
1.4.2	Halbschriftliches Rechnen in der englischsprachigen Literatur	13
1.4.3	Definition des Begriffs Zahlenrechnen für die vorliegende Arbeit	16
1.4.4	Bedeutung des Zahlenrechnens aus Sicht der Fachdidaktik	17
2	Flexible und aufgabenadäquate Rechenwege	23
2.1	Flexibel und/oder adäquat?	23
2.2	Faktoren für eine adäquate Wahl eines Rechenweges	24
2.3	Erkennen adäquater Rechenwege im Lösungsprozess: Strategiewahlmodell oder Emergenzmodell?	26
2.4	Flexibles Rechnen nach Rathgeb-Schnierer	29
2.5	Verwendung der Begriffe <i>flexibel</i> , <i>adäquat</i> und <i>aufgabenadäquat</i> in der vorliegenden Untersuchung	31
3	Multiplikation mehrstelliger Zahlen – fachlicher und empirischer Rahmen	37
3.1	Begründung von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen	38

3.2	Einteilungen von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen	43
3.2.1	Kategorisierung von Rechenwegen für die Multiplikation in Schrittweise, Stellenweise und Ableiten	43
3.2.2	Anmerkungen zur Einteilung in Schrittweise, Stellenweise und Ableiten	47
3.2.3	<i>Invented Strategies</i> der Multiplikation nach Van de Walle et al. (2019)	49
3.3	Forschungsergebnisse zu Entwicklung und Verwendung von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen	51
3.3.1	Ambrose et al. (2003) – Entwicklung von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen	52
3.3.2	Baek (1998, 2006) – Entwicklung von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen	58
3.3.3	Mendes (2012) und Mendes et al. (2012) – Ein teaching experiment zur Erarbeitung multiplikativer Rechenwege	62
3.3.4	Hirsch (2001, 2002) – Verwendung halbschriftlicher Strategien im vierten Schuljahr	68
3.3.5	Heirdsfield, Cooper, Mulligan und Irons (1999) – Verwendung von Rechenwegen über die Schulstufen vier, fünf und sechs	71
3.3.6	Hofemann und Rautenberg (2010) – Vorgehensweisen und Fehlermuster bei der halbschriftlichen Multiplikation	72
3.3.7	Gloor und Peter (1999) – Informelle Strategien vor der Thematisierung	74
3.3.8	Schulz (2015, 2018) – Kompetenzaspekte flexiblen Multiplizierens	75
3.4	Vergleich der Einteilungen von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen	77
3.5	Zusammenfassung des Forschungsstandes	80
4	Multiplikation mehrstelliger Zahlen – unterrichtliche Umsetzung	85
4.1	Rechenwege für mehrstellige Multiplikationen im österreichischen Lehrplan der Volksschule (dritte Schulstufe)	85

4.2	Rechenwege für mehrstellige Multiplikationen unterrichten	87
4.2.1	Informelle Rechenwege aufgreifen	88
4.2.2	Rechenkonferenzen einrichten	90
4.2.3	Punktefelder als Arbeitsmittel nutzen	91
4.2.4	Notationsformen entwickeln und nutzen	99
4.2.5	Besondere Aufgabenmerkmale erkennen und Rechenvorteile nutzen	101
4.3	Hürden bei der Umsetzung des Zahlenrechnens	103
4.3.1	Gefahr der Überforderung von leistungsschwächeren Kindern	104
4.3.2	Gefahr des Ableitens ins mechanische Rechnen	106
4.3.3	Gefahr der Bedeutungslosigkeit des Zahlenrechnens nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren	106
4.3.4	Gefahr der Überforderung von Lehrkräften	107
4.4	Rechenwege für mehrstellige Multiplikationen in gängigen österreichischen Schulbüchern	108
4.4.1	Analyse der Schulbücher	109
4.4.2	Zusammenfassung und Diskussion der Analyse	115
5	Forschungsfragen, Methodologie und Design der empirischen Untersuchung	121
5.1	Forschungslücke	121
5.2	Inhaltliche Zielsetzungen und Forschungsfragen	124
5.3	Methodologische Grundlegung – Fachdidaktische Entwicklungsforschung	126
5.4	Beschreibung der Stichprobe	135
5.5	Methoden der Datenerhebung und Datenauswertung	141
5.5.1	Klinische Interviews	141
5.5.2	Konzeption und Durchführung der klinischen Interviews	144
5.5.3	Konzeption und Durchführung der schriftlichen Befragung	150
5.5.4	Auswertung der klinischen Interviews und der schriftlichen Befragung	152
5.5.5	Der Prozess der Typenbildung nach Kelle und Kluge (2010)	154
5.5.6	Konstruktion des Kategoriensystems	159
5.5.7	Konzeption des Leitfadens für das Interview mit den Lehrkräften	165
5.5.8	Auswertung der Interviews mit den Lehrkräften	167

5.6	Überlegungen zur Entwicklung des Lernarrangements	167
5.6.1	Leitideen bei der Gestaltung des Lernarrangements	169
5.7	Beschreibung des Lernarrangements	172
5.7.1	Operative Zusammenhänge entdecken – Malaufgaben mit gleichen Ergebnissen	174
5.7.2	Das 400er-Punktfeld einführen – Malaufgaben darstellen und aus Darstellungen erkennen	175
5.7.3	Aufgreifen informeller Rechenwege für einstellig mal zweistellige Multiplikationen in Rechenkonferenzen	177
5.7.4	Spezielle Rechenwege gezielt erarbeiten – Zerlegen und Plus	178
5.7.5	Spezielle Rechenwege gezielt erarbeiten – Zerlegen und Minus	180
5.7.6	Spezielle Rechenwege gezielt erarbeiten – Verdoppeln	185
5.7.7	Spezielle Rechenwege gezielt erarbeiten – Verdoppeln und Halbieren	188
5.7.8	Geschicktes Rechnen durch Erkennen und Nutzen besonderer Aufgabenmerkmale	192
5.8	Ergebnisse und Erfahrungen aus der ersten Erprobung im Hinblick auf die Überarbeitung des Lernarrangements	196
5.9	Zur Dokumentation der zweiten Erprobung	199
5.9.1	Beschreibung der Seminarreihe	200
5.9.2	Zeitliche Rahmung und Ablauf der Umsetzung im zweiten Zyklus	201
6	Empirische Ergebnisse	205
6.1	Rechenwege und Typisierung <i>vor</i> der Umsetzung des Lernarrangements	206
6.1.1	Analyse der Rechenwege <i>vor</i> der Umsetzung	206
6.1.2	Lösungsrichtigkeit <i>vor</i> der Umsetzung	219
6.1.3	Operative Beziehungen nutzen <i>vor</i> der Umsetzung	222
6.1.4	Typisierung nach Rechenwegen <i>vor</i> der Umsetzung	226
6.2	Rechenwege und Begründen von Rechenwegen <i>nach</i> der Umsetzung des Lernarrangements	236
6.2.1	Analyse der Rechenwege <i>nach</i> der Umsetzung	236
6.2.2	Lösungsrichtigkeit <i>nach</i> der Umsetzung	249
6.2.3	Operative Beziehungen nutzen <i>nach</i> der Umsetzung	250

6.2.4	Begründen von Rechenwegen am 400er-Punktfeld <i>nach</i> der Umsetzung	256
6.2.5	Mehrere Rechenwege für eine Aufgabe	261
6.2.6	Welcher Rechenweg ist der einfachste?	264
6.2.7	Begründungen für den einfachsten Rechenweg	265
6.2.8	Ein Vergleich der Ergebnisse <i>vor</i> und <i>nach</i> der Umsetzung	274
6.3	Typisierung nach Rechenwegen <i>nach</i> der Umsetzung des Lernarrangements	276
6.3.1	Festlegung der relevanten Vergleichsdimensionen	276
6.3.2	Gruppierung der Fälle und Analyse der inhaltlichen Zusammenhänge	280
6.3.3	Von Gruppierungen zu Typen	286
6.3.4	Charakterisierung der Typen	290
6.3.5	Einzelfalldarstellung 1: Kind nutzt überwiegend fehlerhafte Rechenwege	307
6.3.6	Einzelfalldarstellung 2: Kind nutzt Rechenwege, die im Hinblick auf die auftretenden Aufgabenmerkmale nicht als aufgabenadäquat bezeichnet werden können ...	310
6.4	Hürden in der Umsetzung und Hinweise für eine Überarbeitung	313
6.4.1	Fehlerhafte Rechenwege	313
6.4.2	Übergeneralisierung	323
6.4.3	Gefahr der Überforderung leistungsschwächerer Kinder	325
6.4.4	Hürden durch Einflüsse aus dem Elternhaus oder dem sozialen Umfeld	326
6.4.5	Hinweise für eine weitere Überarbeitung des Lernarrangements	328
7	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse	335
7.1	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse <i>vor</i> der Umsetzung des Lernarrangements	335
7.1.1	Rechenwege für Mult_1 × 2_ZR <i>vor</i> der Thematisierung	336
7.1.2	Typisierung nach genutzten Rechenwegen <i>vor</i> der Thematisierung	338
7.1.3	Die Besonderheit der Stichprobe	339

7.1.4	Transfer von Ableitungswegen aus der Einmaleinserterarbeitung auf $\text{Mult}_1 \times 2_{\text{ZR}}$	339
7.1.5	Fazit der Ergebnisse <i>vor</i> der Thematisierung	342
7.2	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse nach der Umsetzung des Lernarrangements	343
7.2.1	Rechenwege für $\text{Mult}_1 \times 2_{\text{ZR}}$ <i>nach</i> der Umsetzung	344
7.2.2	Typisierung nach genutzten Rechenwegen <i>nach</i> der Umsetzung	348
7.2.3	Zur Umsetzung der Ziele des Lernarrangements	350
7.2.4	Strategiewahlmodell oder Emergenzmodell?	360
7.2.5	Sichtweisen zum Begriff <i>aufgabenadäquat</i>	362
7.2.6	Abschließende Bemerkungen	366
	Literaturverzeichnis	369

Abkürzungsverzeichnis

Ankeraufgabe	Rechenwege unter Nutzung der Verzehnfachung des einstelligen Faktors als Ankeraufgabe mit anschließendem additiven Weiterrechnen
Gegensinniges Verändern	Rechenwege unter Nutzung des Gesetzes von der Konstanz des Produktes
Halbieren	Rechenwege unter Einbezug von Halbierungen des Zehnfachen
Mult_1x2_ZR	Multiplikationen einstelliger mit zweistelligen Zahlen im Bereich des Zahlenrechnens
Verdoppeln	Rechenwege unter Einbezug von Verdoppelungen
Vollständiges Auszählen	Rechenwege unter Nutzung des vollständigen Auszählens mithilfe ikonischer Hilfsmittel
Wiederholte Addition	Rechenwege unter Nutzung der wiederholten Addition eines Faktors
Zerlegung in eine Differenz	Rechenwege unter Nutzung des Distributivgesetzes auf Grundlage einer Zerlegung eines Faktors in eine Differenz
Zerlegung in eine Summe	Rechenwege unter Nutzung des Distributivgesetzes auf Grundlage einer Zerlegung des zweistelligen Faktors in eine Summe

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1	Kyrellos' und Lauras Rechenwege und Begründungen für $4999 \cdot 5$	1
Abbildung 1.2	Gegenüberstellung: schriftliches Verfahren und Zerlegen in eine Summe	18
Abbildung 1.3	Veranschaulichung des Gesetzes von der Konstanz der Produktes am Punktefeld	20
Abbildung 2.1	Ebenen des Lösungsprozesses nach Rathgeb-Schnierer (2011, S. 16)	29
Abbildung 3.1	Veranschaulichung des Kommutativgesetzes für $7 \cdot 18 = 18 \cdot 7$	39
Abbildung 3.2	Veranschaulichung des Assoziativgesetzes für $(7 \cdot 2) \cdot 9 = 7 \cdot (2 \cdot 9)$ anhand der Anzahlbestimmung von Würfeln in einem Quader	40
Abbildung 3.3	Veranschaulichung des Distributivgesetzes der Multiplikation bezüglich der Addition für $7 \cdot 18 = 7 \cdot 10 + 7 \cdot 8$	41
Abbildung 3.4	Veranschaulichung des Distributivgesetzes der Multiplikation bezüglich der Subtraktion für $7 \cdot 18 = 7 \cdot 20 - 7 \cdot 2$	41
Abbildung 3.5	Veranschaulichung des Gesetzes von der Konstanz des Produktes für $5 \cdot 14 = 10 \cdot 7$	42
Abbildung 3.6	Beispiele schrittweisen Rechnens bei der halbschriftlichen Multiplikation nach Padberg und Benz (2021, S. 206)	44
Abbildung 3.7	Stellenweises Rechnen für $15 \cdot 12$	44

Abbildung 3.8	Stellenweises Rechnen für 15·12 mithilfe des Malkreuzes	45
Abbildung 3.9	Stellenweises Rechnen für 6·18 mithilfe des Malkreuzes und Veranschaulichung am Punktefeld ...	45
Abbildung 3.10	Stellenweises Rechnen für 12·14 mithilfe des Malkreuzes und Veranschaulichung am Punktefeld ...	46
Abbildung 3.11	Beispiele Ableiten – Vereinfachen nach Padberg und Benz (2021, S. 209)	47
Abbildung 3.12	<i>Direct Modeling with partitioning of the multiplicand into tens and ones</i> für 6·18	53
Abbildung 3.13	<i>Doubling Strategy</i> für 7·34	54
Abbildung 3.14	Danas <i>Complex Doubling Strategy</i> für 47·34 (Ambrose et al., 2003, S. 55)	55
Abbildung 3.15	<i>Building up by other factors</i> für 24·32 (Ambrose et al., 2003, S. 57)	56
Abbildung 3.16	Cristóvão's Lösung für 25·48 in Mendes et al. (2012, S. 5)	62
Abbildung 3.17	Aufgabenstellung zur Thematisierung operativer Beziehungen bei Mendes (2012, Anhang 5)	63
Abbildung 3.18	Kategorisierung der Rechenwege bei Mendes et al. (2012, S. 3)	64
Abbildung 3.19	<i>Multiplying successively from a product of reference</i> zur Lösung der Aufgabe $__ \cdot 7 = 224$ (Mendes, 2012, S. 254)	66
Abbildung 3.20	<i>Column calculation</i> für 25·24 als $25 \cdot 4 + 25 \cdot 20$ (Mendes, 2012, S. 255)	67
Abbildung 3.21	Verteilung der Rechenwege zu den drei Messzeitpunkten (Hirsch, 2001, S. 287)	69
Abbildung 3.22	Gegenüberstellung von Kategorisierungen zu multiplikativen Rechenwegen im Bereich des Zahlenrechnens	78
Abbildung 4.1	Unterrichtspraktische Empfehlungen zum Einstieg nach Radatz et al. (1999, S. 102) sowie Fosnot und Dolk (2001, S. 40)	89
Abbildung 4.2	400er-Punktefeld	93
Abbildung 4.3	Zerlegung in eine Summe (stellenwertbasiert) veranschaulicht am 400er-Punktefeld für $6 \cdot 18 = 6 \cdot (10 + 8) = 6 \cdot 10 + 6 \cdot 8$	93

Abbildung 4.4	Zerlegung in eine Summe (nicht stellenwertbasiert) veranschaulicht am 400er-Punktfeld für $7 \cdot 12 = (5 + 2) \cdot 12 = 5 \cdot 12 + 2 \cdot 12$ und $6 \cdot 18 = 6 \cdot (9 + 9) = 6 \cdot 9 + 6 \cdot 9$	94
Abbildung 4.5	Zerlegung beider Faktoren in eine Summe (stellenwertbasiert) für $12 \cdot 14 = (10 + 2) \cdot (10 + 4) = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 4 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 4$	95
Abbildung 4.6	Zerlegung eines Faktors in ein Produkt für $8 \cdot 15 = 2 \cdot (4 \cdot 15)$	95
Abbildung 4.7	Zerlegung eines Faktors in eine Differenz (stellenwertbasiert) für $6 \cdot 18 = 6 \cdot (20 - 2) = 6 \cdot 20 - 6 \cdot 2$	96
Abbildung 4.8	Tausenderstreifen – an der Lasche zusammenzukleben	97
Abbildung 4.9	$6 \cdot 18$ mit Stellenwertmaterial veranschaulicht	98
Abbildung 4.10	Empfehlungen zur Form der Notation nach Schipper et al. (2017, S. 94)	101
Abbildung 5.1	Beschreibung eines Zyklus nach <i>Educational Design Research</i> (Plomp 2013, S. 17)	128
Abbildung 5.2	Kärtchen zur Begründung von Zerlegen in eine Summe am 400er-Punktfeld	148
Abbildung 5.3	Kärtchen zur Begründung von Zerlegen in eine Differenz am 400er-Punktfeld	149
Abbildung 5.4	Darstellung des Merkmalsraumes in einer Kreuztabelle (Kelle & Kluge, 2010, S. 96)	155
Abbildung 5.5	Stufenmodell empirisch begründeter Typenbildung (Kelle & Kluge, 2010, S. 92)	157
Abbildung 5.6	Arbeitsblatt 1 – Operative Zusammenhänge entdecken	174
Abbildung 5.7	400er-Punktfeld	175
Abbildung 5.8	Verdeutlichen der Malaufgaben 15·8 und 9·13 am Punktfeld mittels Strichen	176
Abbildung 5.9	Arbeitsblatt 4 – Aufgreifen eigener, informeller Rechenwege für einstellig mal zweistellige Multiplikationen im Rahmen einer Rechenkonferenz	177
Abbildung 5.10	Arbeitsblatt 7 – <i>Zerlegen und Plus</i> am 400er-Punktfeld darstellen und begründen	179

Abbildung 5.11	Zerlegung in eine Summe am Punktefeld verdeutlichen	179
Abbildung 5.12	Aufgaben zur Festigung des Rechenweges <i>Zerlegen und Plus</i>	180
Abbildung 5.13	Arbeitsblatt 8 – Anknüpfen an die Ableitungsstrategie für 9mal-Aufgaben des kleinen Einmaleins	181
Abbildung 5.14	Arbeitsblatt 9 – <i>Zerlegen und Minus</i> am 400er-Punktefeld darstellen und begründen	182
Abbildung 5.15	<i>Zerlegen und Minus</i> für $19 \cdot 7 = 20 \cdot 7 - 1 \cdot 7$ – Verschieben des Malwinkels nach oben	183
Abbildung 5.16	<i>Zerlegen und Minus</i> für $7 \cdot 19 = 7 \cdot 20 - 7 \cdot 1$ – Verschieben des Malwinkels nach links	183
Abbildung 5.17	Aufgaben zur Festigung des Rechenweges <i>Zerlegen und Minus</i>	183
Abbildung 5.18	Arbeitsblatt 10 – Weitere Rechenwege anregen	184
Abbildung 5.19	Arbeitsblatt 11 – Zahlenblick 1	185
Abbildung 5.20	Arbeitsblatt 12 – Anknüpfen an die Ableitungsstrategie für 4mal-Aufgaben des kleinen Einmaleins	186
Abbildung 5.21	Arbeitsblatt 13 – <i>Verdoppeln</i> am 400er-Punktefeld darstellen und begründen	187
Abbildung 5.22	Aufgaben zur Festigung des Rechenweges <i>Verdoppeln</i>	187
Abbildung 5.23	Gegensinniges Verändern – <i>Verdoppeln und Halbieren</i> im Zahlenhaus begründen	188
Abbildung 5.24	Arbeitsblatt 14 – <i>Verdoppeln und Halbieren</i> am Punktefeld darstellen und begründen	189
Abbildung 5.25	Aufgaben zur Festigung von <i>Verdoppeln und Halbieren I</i>	190
Abbildung 5.26	Aufgaben zur Festigung von <i>Verdoppeln und Halbieren II</i>	190
Abbildung 5.27	Arbeitsblatt 15 – Zahlenblick 2	191
Abbildung 5.28	Arbeitsblatt 16 – Rechnen nach Beispiellösungen	192
Abbildung 5.29	Arbeitsblatt 17 – Rechnungen nach Aufgabenmerkmalen sortieren und Sortierungen begründen	193
Abbildung 5.30	Arbeitsblatt 18 – Mehrere Rechenwege finden und begründen	194

Abbildung 5.31	Arbeitsblatt 19 – Aufgaben mit besonderen Aufgabenmerkmalen geschickt lösen	195
Abbildung 6.1	Kathrins Rechenweg für 5·14 unter Nutzung vollständigen Auszählens mithilfe ikonischer Hilfsmittel	209
Abbildung 6.2	Mias Rechenweg für 19·6 über wiederholte Addition eines Faktors	209
Abbildung 6.3	Valentinas Rechenweg für 19·6 über wiederholte Addition des kleineren Faktors (die letzte 6 der ersten Zeile wurde am Tisch notiert)	210
Abbildung 6.4	Johannas Rechenweg für 19·6 unter Einbezug von Verdoppelungen mit Rechenfehler (fehlerhafte Zehnerüberschreitung bei der Addition)	210
Abbildung 6.5	Ajanas Rechenweg für 5·14 unter Einbezug von Verdoppelungen	211
Abbildung 6.6	Leonies Rechenweg für 5·14 unter Einbezug von Verdoppelungen	211
Abbildung 6.7	Leas Rechenweg für 4·16 unter Nutzung von 4·10 als Ankeraufgabe mit anschließender fortgesetzter Addition von 4	212
Abbildung 6.8	Eileens Rechenweg für 4·16 unter Nutzung von 4·10 als Ankeraufgabe mit anschließender fortgesetzter Addition (sie fasste dabei je zwei 4er zu einem 8er zusammen)	212
Abbildung 6.9	Viviens Rechenweg für 19·6 unter Verwendung von 10·6 als Ankeraufgabe mit anschließender Fortsetzung der 6er-Reihe	213
Abbildung 6.10	Linus' Rechenweg für 5·14 durch Zerlegen unter Verwendung des Distributivgesetzes	214
Abbildung 6.11	Nicoles Rechenweg für 4·16 durch Zerlegen unter Verwendung des Distributivgesetzes	214
Abbildung 6.12	Martins Rechenweg für 19·6 durch Zerlegen unter Verwendung des Distributivgesetzes in drei Teilprodukte (die Addition von $60 + 30 + 24$ führte er im Kopf durch)	215
Abbildung 6.13	Daniels Rechenweg für 19·6 durch Zerlegen unter Verwendung des Distributivgesetzes. 19·4 löste er fehlerhaft durch Verdoppeln von 19·2, wobei er für 19·2 das Ergebnis 28 erhielt	216

Abbildung 6.14	Elias Rechenweg für 19·6 durch Zerlegen unter Verwendung des Distributivgesetzes	216
Abbildung 6.15	Julias Rechenweg für 5·14 unter Einbezug von Verdoppelungen mit Rechenfehler (56 + 14)	217
Abbildung 6.16	Nonis fehlerhafter Rechenweg für 5·14 als 5·10 + 4	217
Abbildung 6.17	Elmas fehlerhafter Rechenweg für 4·16 als 4·10 + 6	218
Abbildung 6.18	Moritz' fehlerhafter Rechenweg für 5·14 als 5·10 + 40	218
Abbildung 6.19	Sophias fehlerhafter Rechenweg für 19·6 als 6·10 + 19·6	219
Abbildung 6.20	Leons Rechenweg für 5·14 durch Zerlegen in eine Summe mit Rechenfehler	220
Abbildung 6.21	Lösungsrichtigkeit in Bezug zu den genutzten Rechenwegen vor der Umsetzung	221
Abbildung 6.22	Emelys Rechenweg für 5·14 durch gegensinniges Verändern	243
Abbildung 6.23	Amelies Rechenweg für 4·16 durch gegensinniges Verändern	244
Abbildung 6.24	Nadias fehlerhafter Rechenweg für 65·4 als 5·4 + 6·4	245
Abbildung 6.25	Timos fehlerhafter Rechenweg für 8·29 als 8·30 – 30	245
Abbildung 6.26	Martins fehlerhafter Rechenweg für 5·14 als (5·4)·10	246
Abbildung 6.27	15·7 als 10·7 + 5·7 (Bild 1) – Überlappende Zeigeweise in den Interviews (Bild 2)	258
Abbildung 6.28	Tianas Rechenwege für 5·24	264
Abbildung 6.29	Festlegung der besonderen Aufgabenmerkmale für die Aufgaben 5·14, 4·16, 19·6, 17·4, 5·24, 9·23, 15·6, 65·4, 5·17, 8·29	278
Abbildung 6.30	Genutzte Kombinationen besonderer Aufgabenmerkmale der Gr3b	285
Abbildung 6.31	Elmiras Rechenwege für die Aufgaben 5·14, 4·16 und 19·6 durch Zerlegen in eine Summe	294
Abbildung 6.32	Romans Rechenwege für die Aufgabe 5·24 durch Zerlegen in eine Summe und durch gegensinniges Verändern	296

Abbildung 6.33	Johannas Rechenwege für die Aufgabe 5-24 durch Zerlegen in eine Differenz und durch Zerlegen in eine Summe	296
Abbildung 6.34	Elenias Rechenwege für 19-6 und 9-23 – einmal korrekt und einmal fehlerhaft durch Subtrahieren des falschen Faktors	299
Abbildung 6.35	Genutzte Rechenwege und Anzahl der erkannten Aufgabemerkmale für den Subtypus B3 (Kreuztabelle)	304
Abbildung 6.36	Entwicklung des Subtypus B3 <i>vor</i> und <i>nach</i> der Umsetzung	305
Abbildung 6.37	Annas Rechenweg für 8-29 durch gegensinniges Verändern	306
Abbildung 6.38	Veronikas korrekter Rechenweg für 19-6 unter Nutzung der Verelffachung als Ankeraufgabe und Veronikas fehlerhafter Rechenweg für 5-24	308
Abbildung 6.39	Veronikas fehlerhafte Rechenwege für 9-23 und 15-6	308
Abbildung 6.40	Veronikas fehlerhafter Rechenweg für 9-23 <i>vor</i> der Umsetzung	310
Abbildung 6.41	Julias Rechenwege für 5-14 und 4-16 durch Zerlegen in eine Differenz – bei der zweiten Aufgabe verrechnete sie sich (anstatt 16 zu subtrahieren, subtrahierte sie 10 und addierte 6)	311
Abbildung 6.42	Julias fehlerhafter Rechenweg für 19-6 durch gegensinniges Verändern	312
Abbildung 6.43	Erzanas fehlerhafter Rechenweg für 9-23 durch Zerlegen in eine Differenz mit Subtraktion des falschen Faktors	317
Abbildung 6.44	Hannas Rechenwege für 8-29 und 9-23 durch Zerlegen in eine Differenz – einmal fehlerhaft durch Subtraktion des falschen Faktors und einmal korrekt	317
Abbildung 6.45	Stelles fehlerhafter Rechenweg für 65-4 durch Vermischung von Zerlegen in eine Summe und Zerlegen in eine Differenz	321
Abbildung 6.46	Nadias Rechenwege für 17-4 – einmal korrekt durch Zerlegen in eine Summe und einmal fehlerhaft durch Zerlegen in eine Differenz	321

Abbildung 6.47	Daniels fehlerhafter Rechenweg für 9·23 als 10·22 ...	322
Abbildung 6.48	Emelys fehlerhafter Rechenweg für 8·29 durch fehlerhaftes wiederholtes Verdoppeln	323
Abbildung 6.49	Julias Rechenweg für 6·40 durch gegensinniges Verändern in 12·20	324
Abbildung 6.50	Lenas Rechenwege für 6·18 durch gegensinniges Verändern, wobei die Rechnung nicht erkennbar leichter wurde	324
Abbildung 6.51	Zusatzarbeitsblatt zum Erkennen operativer Beziehungen in den Zahlenhäusern	331
Abbildung 6.52	Zusatzarbeitsblatt zu Übergeneralisierungen bei Zerlegen in eine Differenz	332
Abbildung 6.53	Zusatzarbeitsblatt zu Übergeneralisierungen bei gegensinnigem Verändern	333
Abbildung 7.1	Verteilung der Rechenwege für die Aufgaben 5·14, 4·16 und 19·6 <i>vor</i> der Thematisierung	337
Abbildung 7.2	Typenbildung nach genutzten Rechenwegen <i>vor</i> der Umsetzung	339
Abbildung 7.3	Verteilung der Rechenwege für die Aufgaben 5·14, 4·16, 19·6, 17·4, 5·24, 9·23, 15·6, 65·4, 5·17, 8·29 <i>nach</i> der Umsetzung	345
Abbildung 7.4	Typenbildung nach genutzten Rechenwegen und Aufgabenmerkmalen <i>nach</i> der Umsetzung (inklusive Subtypen)	350
Abbildung 7.5	Lernziele des Lernarrangements mit steigendem Anspruchsniveau	352
Abbildung 7.6	Verteilung der gestuften Lernziele für das umgesetzte Lernarrangement	356
Abbildung 7.7	Objektive und subjektive Sicht auf den Begriff <i>aufgabenadäquat</i>	363

Tabellenverzeichnis

Tab. 2.1	Passung Rechenweg – besondere Aufgabenmerkmale	34
Tab. 4.1	Tabellarische Aufstellung der Ergebnisse der Schulbuchanalyse	110
Tab. 5.1	Konzeption der vorliegenden Untersuchung	133
Tab. 5.2	Übersicht – Charakterisierung der Lehrkräfte	136
Tab. 5.3	Anzahl der untersuchten Kinder nach Zyklus, Klasse, Geschlecht und Einzugsgebiet der Schule	140
Tab. 5.4	Aufgabenadäquate Rechenwege für 17-4 und 5-24	150
Tab. 5.5	Fragetypen in den klinischen Interviews	160
Tab. 5.6	Kategorienschema zu <i>Art des Rechenweges</i>	161
Tab. 5.7	Kategorienschema zu <i>Operative Beziehungen nutzen</i>	162
Tab. 5.8	Kategorienschema zu <i>Begründen von Zerlegen in eine Summe am 400er-Punktefeld</i>	163
Tab. 5.9	Kategorienschema zu <i>Begründen von Zerlegen in eine Differenz am 400er-Punktefeld</i>	163
Tab. 5.10	Kategorienschema zu <i>Begründung des einfachsten Rechenwegs bei Nennung mehrerer Rechenwege zu einer Aufgabe</i>	164
Tab. 5.11	Interviewleitfaden für die Lehrkräfte	165
Tab. 5.12	Anzahl der aufgewendeten Unterrichtseinheiten für das Lernarrangement in Zyklus 2	202
Tab. 6.1	Verteilung der Rechenwege zu den Aufgaben 5-14, 4-16 und 19-6 vor der Umsetzung	207
Tab. 6.2	Lösungsrichtigkeit zu den Aufgaben 5-14, 4-16 und 19-6 vor der Umsetzung	220

Tab. 6.3	<i>Hilft die Rechnung $2 \cdot 15 = 30$ für $4 \cdot 15$? vor der Umsetzung</i>	222
Tab. 6.4	<i>Hilft die Rechnung $20 \cdot 4 = 80$ für $19 \cdot 4$? vor der Umsetzung</i>	224
Tab. 6.5	Dimensionalisierung der <i>Art des Rechenweges</i> vor der Umsetzung	227
Tab. 6.6	Typisierung der Kinder nach den genutzten Rechenwegen zu $\text{Mult}_1 \times 2_{\text{ZR}}$ vor der Umsetzung	231
Tab. 6.7	Verteilung der Rechenwege für die Aufgaben 5-14, 4-16, 19-6, 17-4, 5-24, 9-23, 15-6, 65-4, 5-17, 8-29 nach der Umsetzung	237
Tab. 6.8	Lösungsrichtigkeit für die Aufgaben 5-14, 4-16, 19-6, 17-4, 5-24, 65-4, 9-23, 15-6, 65-4, 5-17, 8-29 nach der Umsetzung	250
Tab. 6.9	<i>Hilft die Rechnung $2 \cdot 15 = 30$ für $4 \cdot 15$? nach der Umsetzung</i>	251
Tab. 6.10	<i>Hilft die Rechnung $20 \cdot 4 = 80$ für $19 \cdot 4$? nach der Umsetzung</i>	252
Tab. 6.11	<i>Hilft die Rechnung $8 \cdot 10 = 80$ für $16 \cdot 5$? nach der Umsetzung des Lernarrangements</i>	252
Tab. 6.12	Mehrere Rechenwege für 5-24	262
Tab. 6.13	Mehrere Rechenwege für 17-4	263
Tab. 6.14	Einfachster Rechenweg für die Aufgaben 5-24 und 17-4	264
Tab. 6.15	Dimensionalisierung der <i>Art des Rechenweges</i> nach der Umsetzung	277
Tab. 6.16	Passung Rechenweg – besondere Aufgabenmerkmale (Kopie von Tab. 2.1)	277
Tab. 6.17	Dimensionalisierung der <i>Art des Rechenweges</i> nach weiteren, bei freier Wahl des Rechenweges nicht gezeigten Rechenwegen	279
Tab. 6.18	Erste Gruppierung nach der Art des Rechenweges	282
Tab. 6.19	Gruppen nach genutzten Rechenwegen nach der Umsetzung und Lösungsrichtigkeit (Kreuztabelle)	284
Tab. 6.20	Typisierung der Kinder nach den genutzten Rechenwegen zu $\text{Mult}_1 \times 2_{\text{ZR}}$ nach der Umsetzung	289
Tab. 7.1	Zusammenfassende Charakterisierung der Kinder nach genutzten Rechenwegen zu $\text{Mult}_1 \times 2_{\text{ZR}}$ nach der Umsetzung	348

Einleitung

Inhaltliche Einbettung und Forschungsinteresse

In einem für diese Arbeit geführten Interview wurde Stella gebeten, zur Aufgabe 5·24 möglichst viele Rechenwege zu finden. Stella fand stolz fünf unterschiedliche Rechenwege:

The image shows five hand-drawn boxes, each containing a different calculation for the product 5·24. The boxes are arranged in a roughly rectangular pattern. The calculations are as follows:

- Top-left box: $10 \cdot 24 = 240 - 5 \cdot 32 = 120$
- Top-middle box: $5 \cdot 30 = 150 - 6 \cdot 5 = 30$
 $150 - 30 = 120$
- Top-right box: $5 \cdot 12 = 60 + 60 = 120$
- Bottom-left box: $3 \cdot 24 = 72 + 2 \cdot 21 = 48$
 120
- Bottom-middle box: $10 \cdot 22 = 220 - 5 \cdot 22 = 110$
 $+ 2 \cdot 5 = 10 = 120$

Abbildung 1 Stellas Rechenwege für 5·24

Vielleicht hätten Sie zusätzlich noch den sehr naheliegenden Rechenweg $5 \cdot 24 = 5 \cdot 20 + 5 \cdot 4$ gefunden?

Bei genauerer Betrachtung der fünf von Stella genannten Rechenwege hinsichtlich zugrundeliegender mathematischer Gesetze ergibt sich, dass Stella für alle fünf Rechenwege eigentlich immer das Distributivgesetz¹ nutzt und den Faktor 5 in $10 - 5$, $3 + 2$ bzw. den Faktor 24 in $30 - 6$, $12 + 12$ und $22 + 2$ zerlegt.

Im Grunde erprobt sie das entdeckte Rechengesetz, indem sie die Faktoren in solche Summen bzw. Differenzen zerlegt, deren Teilprodukte für sie leicht auszurechnen sind, und belegt dadurch ihre Einsicht in die zugrundeliegenden Strukturen.

¹ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ bzw. $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

Das Rechengesetz steht fest, „aber der Natur mathematischer Gesetze entsprechend ist ihre Anwendung frei“ (Wittmann und Müller 2017b, S. 73).

Aus Sicht der Mathematikdidaktik geht es dabei nicht darum, dass jedes Kind möglichst viele unterschiedliche Rechenwege schnell und korrekt anwenden kann, sondern das Beispiel Stella steht stellvertretend für folgende Sichtweisen auf die Nutzung unterschiedlicher Rechenwege:

Es geht darum,

- „sich der Existenz verschiedener mathematisch sinnvoller Wege bewusst“ zu werden „und dieses Wissen für sich individuell“ zu nutzen (Wittmann und Müller 2017b, S. 73).
- Einsichten in Beziehungen und Strukturen zu erlangen.
- die erlangten Einsichten in Beziehungen und Strukturen zu nutzen, um Rechenwege aufgrund besonderer Aufgabenmerkmale aufgabenadäquat zu wählen.

Die Mathematikdidaktik ist sich weitgehend einig, dass Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule mehr lernen sollten als das korrekte und möglichst schnelle Lösen von Rechenaufgaben. Das Durchschauen der zugrundeliegenden Strukturen sollte in den Fokus gerückt werden, oder wie Hiebert (1990) formuliert: *„If we want students to remember procedures, we should ask them to step back and think about the procedures they are using rather than practicing more exercises“* (Hiebert 1990 zitiert nach Krauthausen 1993, S. 195).

Doch wie schaut es in der Realität aus? Eine Analyse gängiger Schulbücher in Abschnitt 4.4 zeigt, dass die Thematisierung von Rechenwegen für die Multiplikation mehrstelliger Zahlen sehr oft wie folgt aufgebaut ist:

- (1) Ein Hauptrechenweg (stellengerechtes Zerlegen in eine Summe mittels Distributivgesetzes) wird erarbeitet und eingeübt.
- (2) Weitere Rechenwege werden in den meisten Schulbüchern erwähnt, aber sehr selten begründet oder in Bezug auf die Adäquatheit bei bestimmten Aufgaben verglichen.
- (3) Möglichkeiten für Kinder, selbst Rechenwege zu finden, zu vergleichen und zu begründen, werden selten geboten.
- (4) Das schriftliche Verfahren zur Multiplikation wird direkt im Anschluss erarbeitet und löst in Folge dann im Schulbuch das Rechnen nach unterschiedlichen Rechenwegen ab.

Nimmt man die Schulbücher als Indiz dafür, was in der Praxis des Mathematikunterrichts geschieht, so scheint es hier eine Kluft zwischen Theorie und Praxis zu geben.

Vor diesem Hintergrund stellt sich die zentrale Frage, wie Unterricht gestaltet werden kann, damit möglichst viele Kinder Einsicht in verschiedene Rechenwege und in die zugrundeliegenden Strukturen erlangen und Rechenwege in Folge auch sicher und aufgabenadäquat anwenden können. Darüber hinaus fehlen – im Gegensatz zur mehrstelligen Addition und Subtraktion – Ergebnisse aus der Forschung, die den Einfluss unterschiedlicher Fokussierungen im Unterrichtsgeschehen auf die (aufgabenadäquate) Verwendung von Rechenwegen für die Multiplikation und auf zugrundeliegende Einsichten beschreiben (siehe Abschnitt 3.3 und Padberg und Benz (2021, S. 214)).

Im Sinne von E. Ch. Wittmann, der es als Kernaufgabe der Mathematikdidaktik sieht, „inhaltsbezogene theoretische Konzepte und praktische Unterrichtsbeispiele“ zu entwickeln und zu erforschen, mit der zentralen Absicht, den realen Unterricht zu verbessern (Wittmann 1998, S. 330), ist es Ziel dieser Arbeit, praxisnahe Entwicklungsarbeit mit empirischer und theoretischer Absicherung zu verknüpfen. So liegt der Fokus der vorliegenden Studie einerseits auf der Entwicklung und Umsetzung eines fachdidaktisch untermauerten Lernarrangements zum Zahlenrechnen im Bereich der Multiplikation (einstellig mal zweistellig). Andererseits werden die von den Kindern genutzten Rechenwege und gezeigten Einsichten in zugrundeliegende Konzepte und Strukturen *vor* und *nach* der Umsetzung eines lernförderlichen Lernarrangement untersucht. Aus den Ergebnissen wird in weiterer Folge eine Typisierung der Kinder nach genutzten Rechenwegen vorgenommen. Aus dieser Typisierung sollen Aussagen

- zur sicheren Anwendung der Rechenwege,
- zu Einsichten in zugrundeliegende operative Beziehungen und
- zur Nutzung besonderer Aufgabenmerkmale für Rechenvorteile abgeleitet werden.

Weitere Schwerpunkte der Studie liegen auf den Hürden in den Lernprozessen im Zuge der Umsetzung des Lernarrangements und auf den Sichtweisen der Kinder im Hinblick auf die Bedeutung aufgabenadäquaten Rechnens.

Forschungsmethodologische und forschungsmethodische Einbettung

Die Studie ist der qualitativen empirischen Sozialforschung zuzuordnen und im Design einer *Educational Design Research* Studie (Plomp 2013; Van den Akker et al. 2006a) angelegt. Kennzeichnend für diese Art der Forschungskonzeption ist

eine enge Verzahnung zwischen Praxis und Forschung. So liegen die Schwerpunkte von *Educational Design Research* Studien im Zuge des Forschungsprozesses auf zwei Ebenen. Einerseits werden im Forschungsprozess Erkenntnisse im Hinblick auf die Entwicklung von Unterrichtsaktivitäten angestrebt und andererseits werden aus den Ergebnissen wissenschaftliche Theorien über das Lehren und Lernen des spezifischen Lerngegenstandes weiterentwickelt.

Vor diesem Hintergrund wurden zur Datenerhebung qualitative Interviews nach der revidierten klinischen Methode durchgeführt (Selter und Spiegel 1997, S. 110 f.). Die Auswertung der Interviews erfolgte am Material selbst mittels induktiver Kategorienbildung als auch auf Basis von Theorien durch deduktive Analyseschritte (Mayring 2001, S. 5 f.). Ferner wurden Leitfadenterviews mit den Klassenlehrkräften geführt. Zur Erhebung von Rechenwegen wurden aus forschungsökonomischen Gründen zusätzlich noch schriftliche Erhebungen genutzt.

Gliederung der Arbeit

Die folgenden Kapitel 1 bis 4 erörtern literaturbasiert und den aktuellen Forschungsstand einbeziehend die theoretischen Hintergründe der Arbeit. Zu Beginn werden jene theoretischen Grundlagen dargelegt, die sich allgemein auf Rechenwege aller Operationen beziehen. Das Kapitel 1: *Einteilung von Rechenwegen* thematisiert die Kategorisierung von Rechenwegen. Dabei werden die unterschiedlichen Formen des Rechnens (Zahlenrechnen, Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, Ziffernrechnen bzw. schriftliches Rechnen) und deren Charakteristika beschrieben, um den Begriff *Zahlenrechnen* für die vorliegende Arbeit zu definieren. Weiters wird das Zahlenrechnen aus fachdidaktischer Sicht analysiert. Kapitel 2: *Flexible und aufgabenadäquate Rechenwege* befasst sich mit den Begriffen *Flexibilität* und *Aufgabenadäquatheit* in Bezug auf die Wahl eines Rechenweges und entwickelt in Folge eine Definition dieser Begriffe für die vorliegende Studie. Kapitel 3: *Multiplikation mehrstelliger Zahlen – fachlicher und empirischer Rahmen* grenzt die Operation und der Zahlenraum auf das Multiplizieren einstelliger mit zweistelligen Zahlen ein und fixiert die Form des Rechnens auf das Zahlenrechnen. Es werden einerseits die Rechenwege für die Multiplikation hinsichtlich zugrundeliegender Rechengesetze mathematisch analysiert und andererseits gängige Kategorisierungen von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen aus der mathematikdidaktischen Literatur diskutiert. Der letzte Teil fasst die Forschungsergebnisse zu Entwicklung und Verwendung von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen zusammen.

In Kapitel 4: *Multiplikation mehrstelliger Zahlen – unterrichtliche Umsetzung* wird die unterrichtliche Realisierung des multiplikativen Zahlenrechnens erörtert.