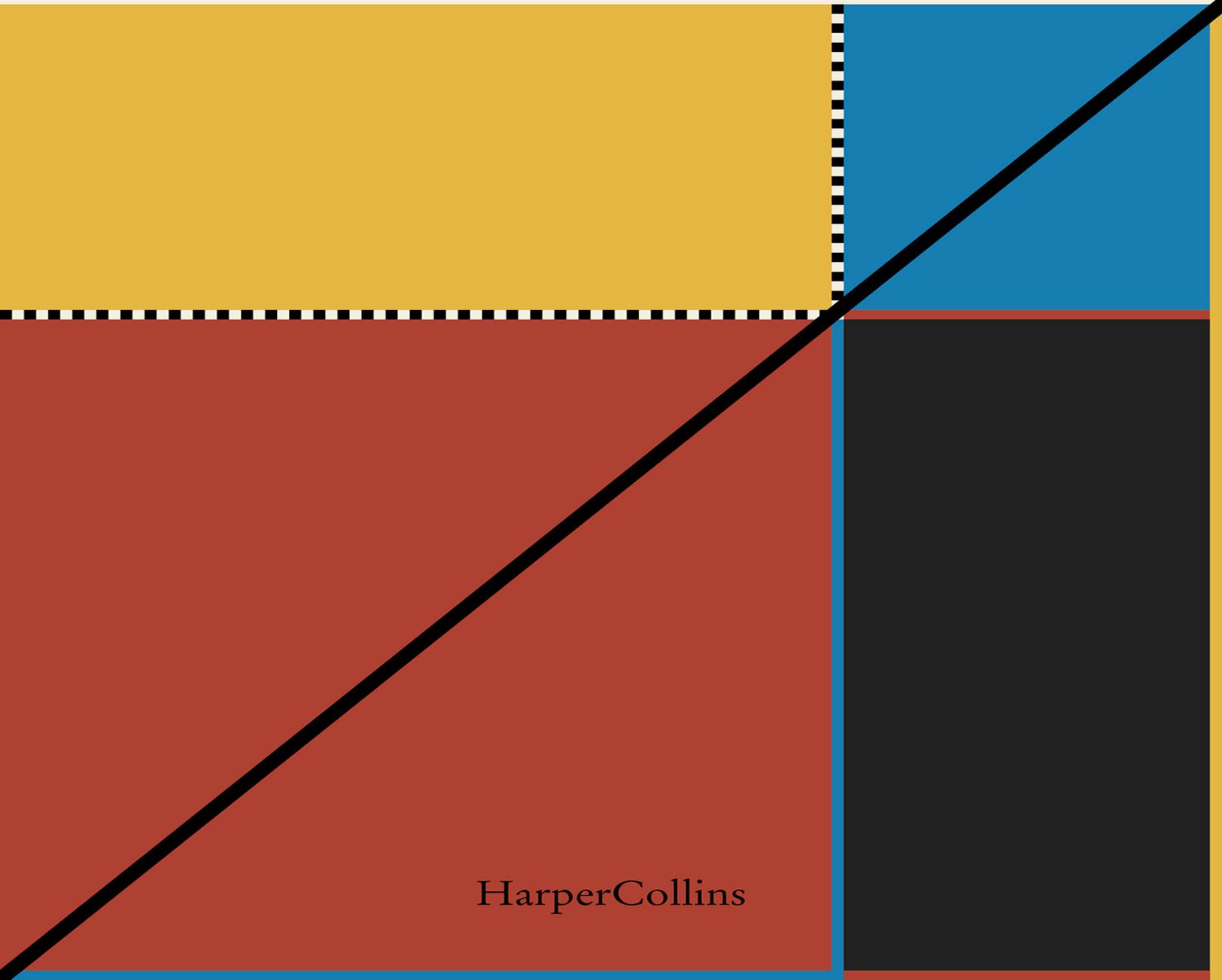


Begegnungen mit Euklid

Benjamin Wardhaugh

Wie die
»Elemente«
die Welt
veränderten

HarperCollins



Benjamin Wardhaugh

Begegnungen mit Euklid

Wie die »Elemente«
die Welt veränderten

Aus dem Englischen von Elisabeth Schmalen

HarperCollins

Die Originalausgabe erschien 2020 unter dem Titel
Book of Wonders. The Many Lives of Euclid's Elements
bei William Collins, London.

© 2020 by Benjamin Wardhaugh
© 2022 für die deutschsprachige Ausgabe
by HarperCollins in der
Verlagsgruppe HarperCollins Deutschland GmbH, Hamburg
Published by arrangement with
William Collins, an imprint of HarperCollins Publishers, UK
Covergestaltung von wilhelm typo grafisch
Coverabbildung von Kuzin & Kolling, Büro für Gestaltung, Hamburg
E-Book-Produktion von GGP Media GmbH, Pößneck
ISBN E-Book 9783749950911
www.harpercollins.de

Für meine Eltern

Prolog

Alexandria. Alexándreia. Zu Regierungszeiten von Ptolemaios, Erster der Alexandriner. Vielleicht im zehnten Jahr seiner Herrschaft, nicht lange nach 300 v. Chr.

Ankunft über das Meer, auf dessen Wasser die ägyptische Sonne scheint. Durch den Hafen geht es in die Stadt hinein, vorbei an einem Bauwerk nach dem anderen, die ausladende Kanopische Straße hinauf. Weißer Marmor, Staub und Hammerklänge - Baustellen, wohin man blickt. Die größte aller Städte. Breite Straßen, durch die man mit dem Wagen fahren kann. Gepflasterte Wege und die weißen Fassaden der Gebäude. Das Rauschen des Meeres.

An der Kreuzung links führt die Straße zum Sema: lang und kühl, der Wind pfeift hindurch. Es folgt der Palastbezirk. Tempel, Museion, Bibliothek.

Zu den Menschen, die im berühmten Kulturviertel tätig sind, gehört ein Mann namens Euklid. Eines seiner Bücher heißt *Elemente*. Wenn Ptolemaios' glorreiches Alexandria zu Staub zerfallen ist, wird dieses Buch fortbestehen.

*

Seit dreiundzwanzig Jahrhunderten verändern die *Elemente* die Welt. Die Zusammenstellung von Fakten über den Raum und seine Eigenschaften - Linien und Figuren, Zahlen und Verhältnisse - hat unzählige Leser in die grenzenlose Welt der abstrakten Schönheit und der reinen Ideen gelockt. Dabei hat das Werk eine unglaubliche Reise zurückgelegt. Nur eine gewisse Zahl von Artefakten überlebt den

Zusammenbruch der Kultur, die sie hervorgebracht hat; nur eine gewisse Zahl von Texten überlebt das Aus-dem-Gebrauch-Kommen der Sprache, in der sie verfasst sind. Den *Elementen* ist beides gelungen. Und nicht nur das – sie scheinen von der Verpflanzung in ganz unterschiedliche Kontexte sogar profitiert zu haben. Gerade aufgrund der Schlichtheit des Textes entdeckten Leser Dinge darin, die ihr Interesse weckten, Qualitäten, die ihm auch in anderen Zeiten und an anderen Orten Bedeutung verliehen.

Am rechten Portal der Westfassade der Kathedrale von Chartres gibt es ein Halbrelief, das Euklid zeigt. Die Gelehrten im abbasidischen Bagdad übersetzten sein Werk ins Arabische. Ein amerikanischer Maler überführte die Diagramme in Kunst, ein Philosoph aus Athen kommentierte sie. Die *Elemente* waren Teil der wissenschaftlichen Revolution, der schicksalsträchtigen Entscheidung, das Buch der Natur zu lesen, als sei es in der Sprache der Mathematik geschrieben.

In Peking verbrachten der Gelehrte Xu Guangqi und der italienische Jesuit Matteo Ricci zwischen August 1606 und dem darauffolgenden April ihre Zeit damit, die *Elemente*, eines der Bücher, die Ricci aus dem fernen Westen mitgebracht hatte, ins Mandarin zu übersetzen. Dabei machten ihnen sowohl die Terminologie und die Struktur des Textes als auch ihre unterschiedlichen Voraussetzungen in Bezug auf den Inhalt zu schaffen. Dreimal überarbeiteten sie ihre Fassung, bevor sie mit ihr zufrieden waren und sie zur Veröffentlichung freigaben.

Auf der anderen Seite der Erde hielt sich Anne Lister von Mai bis November 1817 jeden Vormittag dafür frei, sich gleichermaßen mit Arithmetik und Euklid auseinanderzusetzen. Bis zum Herbst hatte sie einen größeren Teil der *Elemente* durchgearbeitet als die meisten Universitätsabsolventen.

Beinahe ein Jahrtausend zuvor griff die Kanonissin Roswitha im niedersächsischen Gandersheim Euklids Definition der vollkommenen Zahlen in einem ihrer Dramen auf. Die Figur der »Weisheit« wendet diese Definition an, um sich über Kaiser Hadrian lustig zu machen, der sie und ihre Töchter der Folter unterziehen will, damit sie dem christlichen Glauben abschwören.

*

Immer wieder sind neue Generationen an neuen Orten auf die *Elemente* gestoßen und haben Neues damit gemacht. Das Werk ist durch Welten gereist, die sich die Griechen, die es als Erstes aufschrieben und lasen, nie hätten erträumen können.

Was bedeutet es für ein Buch, zweitausend Jahre und länger zu existieren? Den Untergang der Kultur zu überstehen, die es hervorgebracht hat? Immer und immer wieder neue Leser zu finden, an unterschiedlichen Orten und in unterschiedlichen Zeiten? Welch enorme Bandbreite von Bedeutungen müssen die Leser in ihm finden? Welch enorme Bandbreite an Lesern muss das Buch finden?

Begeben wir uns auf die Reise und finden es heraus.

I

Der Autor

Alexandria

Der Geometer und der König

Alexandria, um 300 v. Chr.

Ein Abendessen, sagen wir: ein Festmahl, im Palastbezirk, vielleicht im Museion. Ptolemaios selbst ist anwesend – General, Kriegsheld, König, für manche ein beinahe göttliches Wesen. Das Gespräch kommt auf die Geometrie: »Warum ist sie so schwierig? Warum gibt es keinen leichteren Weg?« Der Geometer – ein unauffälliger Mann, aber selten um Worte verlegen – antwortet: »Majestät, es gibt keinen Königsweg zur Geometrie.«

*

Die Anekdote über den brüskierten Ptolemaios ist eine dieser unwiderstehlichen Geschichten. Der Mann war ein Kindheitsfreund Alexander des Großen gewesen, einer seiner Leibwächter – vielleicht sein illegitimer Halbbruder, ein geschätzter General (sein Name soll vom griechischen Wort für »kriegerisch« herrühren), besonnen, aber ebenso begabt für die große Geste – ein Mann, der sich nichts bieten ließ.

Außerdem war er ein Überlebenskünstler. Er schaffte es, sich in dem zwei Jahrzehnte währenden Chaos durchzusetzen, das auf Alexanders Tod folgte und viele fähigere Männer das Leben kostete. Von allen Nachfolgern Alexanders, die dessen kurzlebiges, Kontinente umspannendes Reich unter sich aufteilten, schuf er die

beständigste Dynastie, den stabilsten Staat. Er entschied sich für Ägypten und setzte es nie für ein größeres Reich aufs Spiel. Auf ihn folgten vierzehn ptolemäische Herrscher, bis Kleopatra in der Schlacht bei Actium zweihundertfünfzig Jahre später alles verlor. Er war der erste König der letzten ägyptischen Dynastie: *basileus* für die Griechen, Pharao für die Ägypter, Erbe der dreitausend Jahre währenden ägyptischen Königstradition und, ja, auch ein Gott. Im Jahr 306 v. Chr. wehrte er einen Angriff auf Rhodos so entschieden ab, dass man ihm Altäre errichtete und ihm den Titel »der Retter« verlieh. Nach seinem Tod stiftete sein Sohn und Nachfolger ihm zu Ehren die Ptolemäischen Spiele, die ab 278 v. Chr. abgehalten wurden, alle vier Jahre, wie die Olympischen Spiele.



Ptolemaios I.

Die Person des Geometers hingegen – ein Mann namens Euklid, Eukleídēs – bleibt weitgehend im Dunkel der Geschichte. An der Königsweganedote ist leider nichts dran; das Gleiche erzählt man sich über einen anderen Geometer (Menaichmos) und einen anderen König (Alexander), und es gibt wenig Anlass zu glauben, dass sich das Gespräch wirklich so ereignet hat. Selbst die Annahmen zu Euklids Lebenszeit – irgendwann um 300 v. Chr. – sind bloße Vermutungen von Autoren, die Jahrhunderte später schrieben. Anders als Ptolemaios, dessen Leben äußerst gut dokumentiert ist, hinterließ Euklid keinerlei Spuren. Er begründete keine Dynastie, baute keine Paläste. Sein Erbe war ein rein intellektuelles.

Doch Welch ein Erbe das war! Die Schar seiner Schüler in Alexandria überdauerte ihn. Sein Buch überdauerte die ganze Kultur.

Was war das für eine Stadt, die einen solchen Mann und ein solches Buch hervorbrachte? Alexandria war die passende Umgebung für die *Elemente*. Sie war Ptolemaios' größte Leistung. Ihren Bau hatte Alexander selbst verfügt, an einem Ort, wo sich einst bloß ein Dorf befunden hatte, und sie trug wie Dutzende andere seinen Namen. Er selbst erlebte nicht mit, wie auch nur eine Mauer errichtet wurde, aber Ptolemaios machte die Stadt zu seiner Hauptstadt und verlegte den ägyptischen Königssitz aus Memphis hierher. Alexandria war eine griechische *polis* in einer zutiefst un griechischen Welt, eine Neugründung in einem Land, in dem die Städte auf eine zweitausendjährige Geschichte zurückblickten. Ptolemaios tat alles, um ihr zu Glanz zu verhelfen; die Stadt hatte eine Volksversammlung, einen Rat, eigene Münzen, eigene Gesetze. Es gab breite Prachtstraßen, Säulengänge, Alleen und Straßenlaternen.

321 v. Chr. brachte Ptolemaios sich in den Besitz von Alexanders Leichnam und stellte ihn in seiner neuen Königsstadt zur Schau.

Der Standort war hervorragend, an einer Stelle, an der zwei Kontinente zusammentrafen, knapp westlich des Nildeltas. Über Jahrhunderte sollte die Stadt ein wichtiges Seehandelszentrum bleiben und diente bis zum Zweiten Weltkrieg als strategisch günstig gelegener Militärstützpunkt. Außerdem begann Ptolemaios mit dem Bau des berühmten Leuchtturms: Festung und Symbol zugleich, nach seiner Fertigstellung unter seinem Sohn eines der sieben Weltwunder, 130 Meter hoch und bekrönt mit einer Statue von Zeus (oder Poseidon). Das Bauwerk stand fünfzehnhundert Jahre lang. Eine derart gesegnete Stadt zog Menschen aus der gesamten griechischen Welt an, und so war Alexandria bald nicht nur berühmt für seine Größe und Pracht, sondern auch für seine Menschenmassen und die kosmopolitische Atmosphäre; in den Straßen wimmelte es von Griechen, Makedonen, Ägyptern, Juden und Syrern wie in einem Ameisenhaufen. Innerhalb weniger Generationen stieg die Zahl ihrer Einwohner auf mehr als eine Million.

Ptolemaios kümmerte sich nicht nur um die Planung der Stadt und die Errichtung zahlloser Gebäude, sondern auch um die Kulturpolitik - und das mit einer Effizienz, die für ihn charakteristisch war. Um als ägyptischer Pharao zu überzeugen, ließ er entsprechende Skulpturen anfertigen und rief den neuen Kult des Serapis ins Leben, einer unverfroren erfundenen Gottheit mit einer hybriden Ikonografie. Wie alle seine Unternehmungen war auch der Kult langlebig: Der zugehörige Tempel, das Serapeum von Alexandria, bestand sechshundert Jahre lang.

Um das Herz und die Seele der Griechen zu erfreuen, gab es Festumzüge, Feierlichkeiten und einen Palast mit Wandteppichen, die den Neid der Götter geweckt hätten.

Alexandria verfügte über »Reichtum, Ringschulen, Macht, heitre[n] Himmel, Ruhm, stets was zu schau'n, gelehrte Herren [= Philosophen], Gold und junge Männer, der Geschwistergötter Tempel ... das Museum [= Museion], Wein - kurz alles Gute, was man nur wünschen mag«, wie es ein Zeitgenosse zusammenfasste.

All das war von unschätzbarem Wert, um einer zutiefst andersartigen Umgebung die Macht der Griechen zu demonstrieren und ihr eine Vorstellung der griechischen Kultur zu vermitteln. Es besagte: So machen wir es in der großartigen Welt der Griechen. Wir haben das Recht zu herrschen.

Ein Bestandteil dessen war das Museion, das Heiligtum der Musen. Es wurde vom König finanziert und führte Gelehrte aller möglichen Disziplinen zusammen. An der Spitze stand ein Musenpriester, und unter den Gelehrten fanden sich Dichter, Grammatiker, Geschichtsschreiber, Philosophen, Ärzte, Naturphilosophen, Geografen, Ingenieure und Konstrukteure, Astronomen und natürlich Geometer. Das Ganze ging zum Teil auf Ptolemaios selbst und zum Teil auf Demetrios von Phaleron zurück, einen berühmten Schüler von Aristoteles, der aus Athen geholt worden war, um die Entstehung der neuen Institution zu beaufsichtigen. Im Museion gab es Innenhöfe, Wandelgänge und Gärten, einen Speisesaal und eine Sternwarte. Die Anzahl der Gelehrten belief sich auf rund vierzig, und sie verbrachten ihre Zeit damit, zu forschen, zu schreiben und manchmal zu lehren. Sie veranstalteten »Symposien«, Gastmahle, an denen hin und wieder auch der König teilnahm. Es war eine bemerkenswerte Versammlung von Menschen, die gelegentlich etwas säuerlich mit der Tiersammlung, die Ptolemaios ebenfalls begründet hatte, verglichen wurde: »wohlgenährte Bücherwürmer, die endlos lange im Vogelkäfig der Musen diskutierten«. Und wo

Bücherwürmer waren, gab es natürlich auch Bücher: Die Bibliothek von Alexandria sollte die berühmteste der Welt werden, auch wenn sie in der Form wohl erst später entstand, unter Ptolemaios' Sohn.

Und so kam es, dass auch der berühmte griechische Mathematiker in Ägypten landete. Gehörte Euklid zu Ptolemaios' Sammlung, hatte man ihn geholt, um das Ansehen des Museions zu mehren? Es ist nicht gesichert, ob er in Alexandria geboren wurde oder ein Zugezogener war, auch wenn Letzteres so kurz nach Gründung der Stadt wahrscheinlicher ist. Woher kam er dann? Seine nüchternen Texte enthalten keine Hinweise auf einen Dialekt, im Gegensatz zu Archimedes, einem Vertreter der folgenden Generation, dessen Werke im dorischen Dialekt von Syrakus verfasst sind.

Was Euklid (und vielleicht auch weitere Mathematiker; es ist nicht klar, ob Euklid der einzige war) nach Alexandria mitbrachte, war die bewährte Tradition der griechischen Geometrie. Die Griechen hatten eine Vorliebe für das Nachdenken, und sie pflegten mit Begeisterung ihre Liebhabereien. Manche fuhren Wagenrennen, andere sprachen über Philosophie, wieder andere befassten sich mit Politik. Etwa ab dem späten fünften Jahrhundert v. Chr. betrieben einige von ihnen Geometrie.

Wie sah das aus? Vielleicht stellt man sich die griechische Geometrie am besten als eine Nebenerscheinung der griechischen Vorliebe für das Gespräch, genauer die Disputation, die Kunst, ein Streitgespräch zu führen, vor. Geometrie war in erster Linie eine Vorführung.

Man zeichnete eine Linie, ein Quadrat, einen Kreis. Dabei dachte man laut nach, richtete sich an das unvermeidliche Publikum. Aus diesen Anfängen entstand das langlebige Spiel der geometrischen Herleitung. Die Figur des Geometers, der in den Sand zeichnet, prägt bis heute das

Bild des antiken griechischen Mathematikers: Er bearbeitete den »gelehrten Staub«, wie es der römische Redner und Politiker Cicero nannte. Archimedes beschrieb er als Mann, der »Sandkasten und [...] Zeichenstab« nutzte. (Doch wer schon einmal versucht hat, ein detailliertes Diagramm in trockenem Sand zu skizzieren, weiß: Tafeln, ob aus ungebranntem Ton, aus Wachs oder – für Demonstrationen vor einem größeren Publikum – aus Holz, dürften wahrscheinlicher gewesen sein.)

Die Anzahl der griechischen Mathematiker war nie sonderlich groß, und sie mussten ihre Erkenntnisse über Linien und Kreise niederschreiben – es gab anscheinend nicht genügend von ihnen, damit eine rein mündliche Überlieferung gewährleistet war. So entstand eine eigene Gattung: eine bestimmte Art der mathematischen Notation. Sie sollte die westliche Mathematik für mehr als zwei Jahrtausende prägen, mit ähnlich strengen Vorgaben, wie sie für das Versmaß in der Lyrik galten, und genauso langlebig. Ihre Bestandteile waren die Behauptung (etwas, was zu beweisen war), das Diagramm, dessen einzelne Punkte mit Buchstaben markiert waren, und eine Beweiskette, die aus bereits bekannten Tatsachen neue Erkenntnisse ableitete. Die Kette endete mit dem vorgegebenen angestrebten Ergebnis, und der gesamte Abschnitt – die »Proposition« – schloss mit dem Hinweis »was zu beweisen war«: *hóper édei deîxai; quod erat demonstrandum; q. e.d. oder QED*. In manchen Fällen lautete der Schluss auch »was zu zeichnen war«. Hier ein Beispiel:

Wie man ein gleichseitiges Dreieck zeichnet

Man beginne mit einer beliebigen geraden Linie und nenne die Enden A und B.

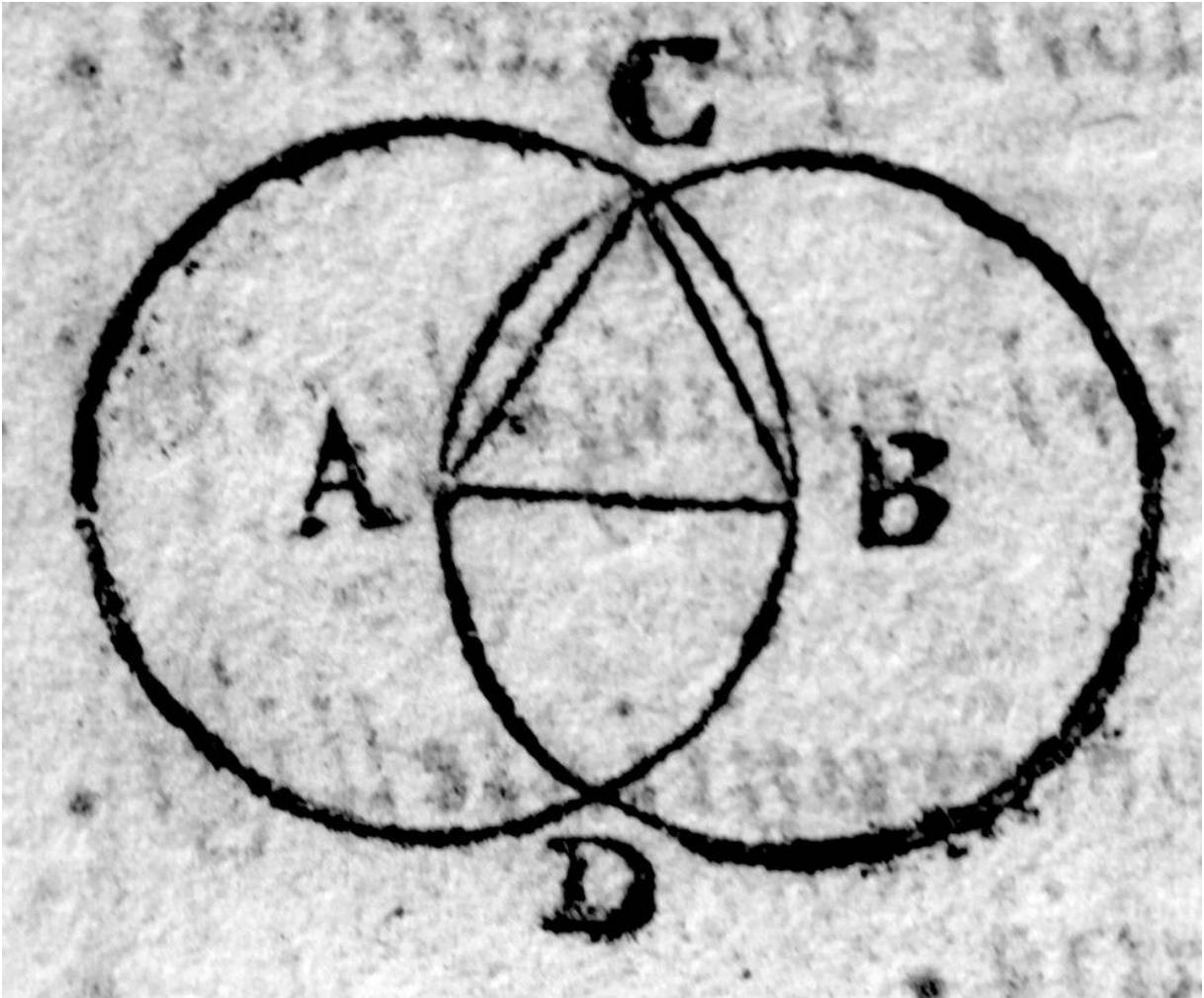
Jetzt zeichne man zwei Kreise, deren Radius jeweils der Länge der Linie entspricht – einen rund um das Zentrum A, einen um das Zentrum B.

Die beiden Kreise überschneiden sich an zwei Punkten. Man wähle einen von ihnen aus und nenne ihn C. Nun verbinde man A, B und C. Sie bilden ein gleichseitiges Dreieck.

Warum?

Weil die Entfernung zwischen A und B verwendet wurde, um C zu ermitteln. C ist genauso weit von A entfernt wie B, und C ist genauso weit von B entfernt wie A. Mit anderen Worten: Alle drei Seiten des Dreiecks – AB, BC und CA – sind gleich lang. Daher handelt es sich um ein gleichseitiges Dreieck. Was zu zeichnen war.

In den gleichen antiken Quellen, die berichten, wann Euklid lebte, ist auch die Rede von schriftlichen, auf Griechisch verfassten Sammlungen geometrischer Erkenntnisse, die etwa 400 v. Chr. entstanden sein sollen – ein Jahrhundert vor Euklid. Die Quellen beschreiben recht ausführlich, welche Themen darin behandelt wurden, und enthalten manchmal sogar einzelne Ergebnisse und Methoden. Die Werke selbst sind jedoch nicht überliefert, was Zweifel an der ganzen Behauptung aufkommen lässt. Die Versuchung ist groß, eine Geschichte der mathematischen Ideen einfach zu erfinden, weil es an Belegen mangelt. Daher gilt heute nur: Ja, vielleicht haben die Pythagoreer den Kreis studiert und vielleicht auch Zahlen und ihre Eigenschaften.



Die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks
Christophorus Clavius, *Euclidis elementorum libri XV* (Rom, 1574), fol. 21v.
(Sammlung des Autors. Foto © Benjamin Wardhaugh)

Es ist sehr wahrscheinlich, dass sich ein Geometer namens Eudoxos im frühen vierten Jahrhundert v. Chr. mit Größenverhältnissen beschäftigt hat. Ein Teil der Erkenntnisse zu den regelmäßigen Körpern ist einem Mann namens Theaitetos zuzuschreiben. Doch die Behauptung, dass es vor Euklid ausführliche Werke mit dem Titel *Elemente der Geometrie* gegeben habe, ist deutlich zweifelhafter.

Was war dann Euklids Rolle? Er führte alle einfacheren Erkenntnisse, die den griechischen Geometern seiner Zeit bekannt waren, in einem einzigen Buch zusammen. Er

organisierte das Wissen, sowohl im Großen als auch im Kleinen. Sicherlich ergänzte er es um eigenes Material, obwohl niemand mit Gewissheit sagen kann, was neu war und was nicht. Die Historiker streiten bis heute darüber – und werden es wohl weiterhin tun –, inwieweit Euklids Werk eine Kompilation oder eine Komposition war, eine Zusammenstellung oder eine Neuschöpfung. Euklid war ein Sammler wie Ptolemaios, und er, der sozusagen ein Teil des Museions war, wurde selbst zu einem Kurator und die *Elemente* zu einer Art kleinerem Museion.

Doch dieses Museion (oder Museum) enthielt eine ganze Welt. Es präsentierte den geometrischen Schreibstil, in einer unaufhörlichen, ritualisierten Abfolge von Propositionen – insgesamt vierhundert, unterteilt in dreizehn »Bücher« oder Kapitel. Alle Verben standen im Perfekt, Passiv und Konjunktiv: »Ein Kreis sei gezeichnet worden.« Das hatte einen hypnotischen Effekt und wirkte zutiefst beruhigend. Das Buch begann mit Definitionen: Was ist mit dem Begriff »Linie« gemeint? Mit »Punkt«? Mit »Kreis«? Dann folgten ganz einfache Konstruktionen aus Linien und zweidimensionalen Figuren – wie man verschiedene Dreiecke zeichnet, wie man eine Linie oder einen Winkel in zwei Hälften teilt. Die Tatsache, dass die Summe zweier beliebiger Seitenlängen im Dreieck immer größer ist als die dritte Seitenlänge. Die epikureischen Philosophen meinten, dass diese letzte Information »selbst einem Esel einsichtig« sei, denn »wenn man am Ende einer Seite Heu platziert, wird ein Esel auf der Suche nach Futter diese Seite entlanglaufen und nicht entlang der beiden anderen«.

Euklid war es ganz egal, wie offensichtlich das war. Er versammelte und erläuterte alle grundlegenden Techniken und Erkenntnisse, die zu seiner Zeit bekannt waren, samt Argumentationswegen und Beweisverläufen; Fakten, die Geometer meist als gegeben betrachteten und anwendeten,

aber selten vollumfänglich nachwiesen. Am Ende des ersten Buches platzierte er den Satz des Pythagoras: Man zeichne ein Dreieck, bei dem ein Winkel ein rechter Winkel ist. Dann zeichne man ein Quadrat über die kürzeste Seite, dessen Seitenlänge der dieser Seite des Dreiecks entspricht. Nun wiederhole man das Gleiche mit den beiden längeren Seiten, sodass man drei unterschiedlich große Quadrate erhält, die jeweils auf den Seiten des Dreiecks aufliegen. Wie sich herausstellt, entsprechen die Flächen der beiden kleineren Quadrate zusammengerechnet der des größeren – eine überraschende Erkenntnis, die nicht jedem Esel einsichtig war und die Euklid in seiner typischen genauen Art bewies.

Und so wurden die Ideen und Diagramme im Verlauf des Buches immer schwieriger und komplizierter. Es gab rein geometrische Abschnitte, etwa die Beschreibung, wie man innerhalb eines bestehenden Kreises ein regelmäßiges Fünfeck oder Sechseck zeichnet. Teile des Buches drehten sich nicht um Geometrie, sondern um Zahlen und Verhältnisse, angefangen bei den grundlegendsten Tatsachen («Wenn man eine ungerade Zahl mit einer ungeraden Zahl multipliziert, ist das Produkt ungerade.») bis hin zu einem Verfahren, die geheimnisvollen »vollkommenen« Zahlen zu ermitteln, die gleich der Summe ihrer Teiler sind.

Schließlich wandte sich Euklid den dreidimensionalen Figuren zu. Die letzten drei Bücher der *Elemente* – Buch 11, 12 und 13 – befassten sich mit Kugeln, Kegeln und Zylindern, mit Würfeln und Quadern und mit den regulären (oder platonischen) Körpern. Letztere sind wunderschöne Polyeder, deren Seitenflächen deckungsgleiche regelmäßige Vielecke sind: Dreiecke, Quadrate oder Fünfecke. Davon gab es insgesamt nur fünf Stück: das Tetraeder (vier dreieckige Seitenflächen), den Würfel (Hexaeder), das Oktaeder (acht

Dreiecke), das Dodekaeder (zwölf Fünfecke) und das Ikosaeder (zwanzig Dreiecke). Euklid zeigte, wie man einen solchen Körper konstruierte, ausgehend von beispielsweise einem Dreieck oder einem Kreis; er legte dar, wie man dessen Oberfläche und Volumen bestimmte. Seine Untersuchungen in diesen letzten Büchern waren häufig genial und bewiesen manchmal eine fast unglaubliche Fähigkeit zum unorthodoxen Denken. Obwohl die *Elemente* einfach begannen und eine Vielzahl von Tatsachen enthielten, die jeder verstehen konnte, stellten sie als Gesamtwerk eine Meisterleistung dar, einen Weg, dem nur die geometrisch Begabtesten bis zum Ende folgen konnten.

Der griechische Text umfasste insgesamt mehr als zwanzigtausend Zeilen. Euklid bewies Sorgfalt, war aber kein Übermensch, und so zeigten sich einige Nahtstellen und Lücken. Manche Definitionen (Rechteck, Raute und Parallelogramm) schienen aus älteren Quellen übernommen, aber nie geprüft worden zu sein. Nicht wenige der Begriffe wurden vorher nicht definiert. Manche der verwendeten Wörter waren mehrdeutig. Eine überraschend große Menge an Wissen über die Eigenschaften von Punkten und Linien wurde als selbstverständlich vorausgesetzt und nicht explizit in den Annahmen dargelegt. Einige Propositionen waren nur Sonderfälle vorausgegangener; andere waren streng genommen überflüssig, weil es sich um die logische Konsequenz zuvor vorgestellter handelte. Doch trotz dieser Holprigkeiten waren die *Elemente* ein solides, sogar ein Ehrfurcht gebietendes Monument für alles, was die griechische Geometrie bisher erreicht hatte.

Doch Euklid schrieb nicht nur dieses eine Buch. Es gilt als gesichert, dass er weitere Werke verfasst hat, wenngleich die zeitliche Abfolge unklar ist. Möglicherweise kommen vier weitere Bücher zu Spezialbereichen der elementaren Geometrie dazu, außerdem Bücher über die Anwendung

mathematischer Prinzipien, unter anderem in der Musik, der Astronomie und der Optik. Insgesamt werden ihm in den frühen Quellen fast ein Dutzend Werke zugeschrieben; acht Texte sind bis heute überliefert, auch wenn die Urheberschaft der meisten von ihnen unter Historikern umstritten ist.

*

Zurück ins Gewimmel von Alexandria, wo weiterhin überall gebaut wird und die Straßen voller sind als je zuvor. Als Euklids Leben zu Ende geht, ist auf Pharos der große Leuchtturm errichtet worden (ein faszinierender Gedanke: Haben sich die Architekten von Euklid beraten lassen?); die Bibliothek und das Museion sind fast fertiggestellt, und die Palastanlage ist prachtvoller denn je. Die Arbeit an den *Elementen* ist abgeschlossen: dreizehn Rollen Papyrus mit sauber angelegten Spalten voller Text und Diagrammen. Und Euklid lehrt weiterhin und nimmt immer noch neue Schüler an.

Ein Anfänger ist ungeduldig, wie einst der König. Als er die erste Proposition verstanden hat, platzt er heraus: »Und was habe ich nun gewonnen, wenn ich das gelernt habe?«

Ein verächtlicher – oder vielleicht mitleidiger – Blick. Euklid ruft einen Diener herbei. »Gib ihm eine Münze, wenn ihm alles, was er lernt, einen Gewinn einbringen muss.«

Möglicherweise ist das nur eine weitere romantische Legende, wie man sie sich später, zu Zeiten der römischen Herrschaft, in Griechenland erzählte. Wie die Anekdote vom Königsweg trug auch sie dazu bei, den Ruf der Unterwürfigkeit, der Speichelleckerei zu zerstreuen, der Euklid anhing, wie jedem, der mit dem ptolemäischen Alexandria und seinen Institutionen in Verbindung gebracht wurde. Sie unterstrich und veranschaulichte die Vorstellung,

dass die Geometrie eine Beschäftigung der Muße und der Kultur war, ein Teil des Geisteslebens. Kein gewinnbringendes Geschäft, sondern rein, wahrhaftig und schön um ihrer selbst willen.

Rund dreihundertfünfzig geometrische Propositionen in höchst trockenem Stil. Es ist seltsam, dass so etwas zu einem der beständigsten kulturellen Artefakte der griechischen Welt wurde. Das ptolemäische Alexandria ist heute größtenteils zu Staub zerfallen; gelegentlich werden ein paar Statuenreste ausgegraben oder aus dem Meer geborgen, doch der Glanz ist vergangen. Ptolemaios' Dynastie starb mit Kleopatra. Die Bibliothek ist in alle Winde zerstreut. Aber die Bücher - unter ihnen die *Elemente* -, die Bücher leben weiter.

Elephantine

Tonscherben

Auf der Nilinsel Elephantine, zu Zeiten von Ptolemaios' Enkel Ptolemaios III., der von 246 bis 221 v. Chr. herrschte. Eine griechische Garnison am Ende der Welt. Ein Mann, der gerade nicht im Dienst ist, will etwas aufschreiben.

Er schnappt sich den nächstbesten Gegenstand, der sich dafür eignet: eine Tonscherbe eines zerbrochenen Gefäßes. Ein kurzes Kratzen und Kritzeln ergeben ein schnelles Diagramm, ein paar Zeilen Text. Seine Hand bewegt sich souverän, und nur ein kleines bisschen weniger souverän ist seine Erinnerung an die mathematischen Sachverhalte. War es so? Oder so? Ja, so stimmt es.

Als sein Geist und seine Hand wieder wach sind, wandert die Scherbe, das billigste verfügbare Schreibmaterial – vielleicht das billigste überhaupt – auf den Müll, wo sie hingehört.

*

Euklids Originalmanuskripte sind uns nicht überliefert und auch nichts, was ihnen nahekäme. Der Papyrus, auf dem er schrieb, ist unter den richtigen Bedingungen durchaus haltbar. Jahrhundertealte Schriftrollen waren in der Antike gar nicht ungewöhnlich, und sie konnten selbst über einen noch längeren Zeitraum hinweg weich, biegsam und lesbar bleiben. Über einen Museumsdirektor des zwanzigsten Jahrhunderts ist die Anekdote überliefert, dass er die

Festigkeit und die Flexibilität von Papyrus demonstrierte, indem er eine dreitausend Jahre alte ägyptische Schriftrolle ungeniert auf- und abrollte (das war in den 1930er-Jahren, als man Ausstellungsstücke noch etwas weniger ehrerbietig behandelte als heute).

Doch das gilt nur unter den geeigneten Bedingungen. Die meisten Bedingungen sind ungeeignet. Ist es zu feucht, verrottet Papyrus; bei zu großer Trockenheit zerfällt er. Insektenlarven mögen Papyrus, und in der Antike ist so mancher literarische Ruhm von Würmern zerfressen worden. Oder von Ratten. Außerdem rissen die langen Rollen schnell und wurden dann weggeworfen. Das hat zur Folge, dass kaum große oder vollständige Papyri aus der Antike erhalten sind. Deutlich häufiger findet man Fragmente: weggeworfene Schriftrollen, Teilstücke, die als Mumienkartonagen wiederverwendet wurden, Fetzen von Müllhalden oder aus zerstörten Behausungen. Diese Funde, die durch die Zeit rau, dunkel und brüchig geworden sind, stammen fast alle aus Mittel- und Oberägypten, wo das trockene Klima ihre Erhaltung begünstigte. Die Fragmente wurden auf Friedhöfen im Niltal, im Fayyum-Becken und in einigen Dörfern entdeckt. Aus den großen Städten hingegen ist so gut wie nichts erhalten: Aus Alexandria selbst sind aufgrund des hohen Grundwasserspiegels keine Papyri überliefert.

Schon seit Mitte des neunzehnten Jahrhunderts gibt es Bemühungen, die vielen Papyrusfragmente systematisch zu bergen, und mittlerweile geht ihre Zahl in die Hunderttausende. Und, ja, einige von ihnen enthalten Teile von Euklids *Elementen*. Genau genommen sieben, mit insgesamt sechzig vollständig und weiteren sechzig teilweise erhaltenen Zeilen Text.

Um welche Teile der *Elemente* handelt es sich? Drei Propositionen aus Buch 1 ungefähr aus dem Jahr 100 v. Chr.

mit einem zusammenfassenden Beweis (alles in Form von Zitaten in einer philosophischen Abhandlung, die den Ausbruch des Vesuvs 79 n. Chr. in Herculaneum überstand und damit, wenn auch angesengt, eine Ausnahme darstellt, was das Überleben von Papyrus allgemein anbelangt). Außerdem eine Behauptung aus Buch 2 mit einer groben Zeichnung, festgehalten um 100 n. Chr. in der ägyptischen Stadt Oxyrhynchos. Teile zweier weiterer Propositionen aus Buch 1, niedergeschrieben in Arsinoe (dem heutigen Fayyum) in der zweiten Hälfte des zweiten Jahrhunderts. Eine Abschrift aus dem zweiten Jahrhundert, die drei Figuren und Behauptungen aus Buch 1 enthält, mit sorgfältig an geraden Linien ausgerichteten Diagrammen. Und eine im dritten Jahrhundert von einem Lehrer oder Schüler angefertigte Abschrift der zehn ersten Definitionen.

Das ist nicht viel - es handelt sich nur um kurze Abschnitte aus dem leichteren Teil des Werkes, in einem Fall ganz vom Anfang. Doch sie sagen etwas darüber aus, wie sich die *Elemente* verbreiteten. Sie verblieben nicht in Alexandria; schon wenige Jahrhunderte nach ihrer Entstehung erstellten Menschen überall in der griechischsprachigen Welt, in Hunderten Kilometern Entfernung, Abschriften des Textes oder einzelner Teile. So gelangte er aus dem kulturellen Zentrum in die Provinzen.

Euklids *Elemente* dürften auf die in der Antike übliche Weise verbreitet worden sein: Man gab den Text in die Hände von Schreibern, die mehrere Abschriften zum Verkauf erstellten. Doch die meisten der Papyrusfragmente sind nicht Teil solcher Abschriften, nur das Fragment aus Fayyum scheint das Werk eines professionellen Kopisten zu sein. Die anderen Fragmente enthalten Hinweise darauf, dass sie von Einzelpersonen stammen, die Teile des Textes zu ihrem eigenen Nutzen abschrieben, zum Lernen oder Lehren.

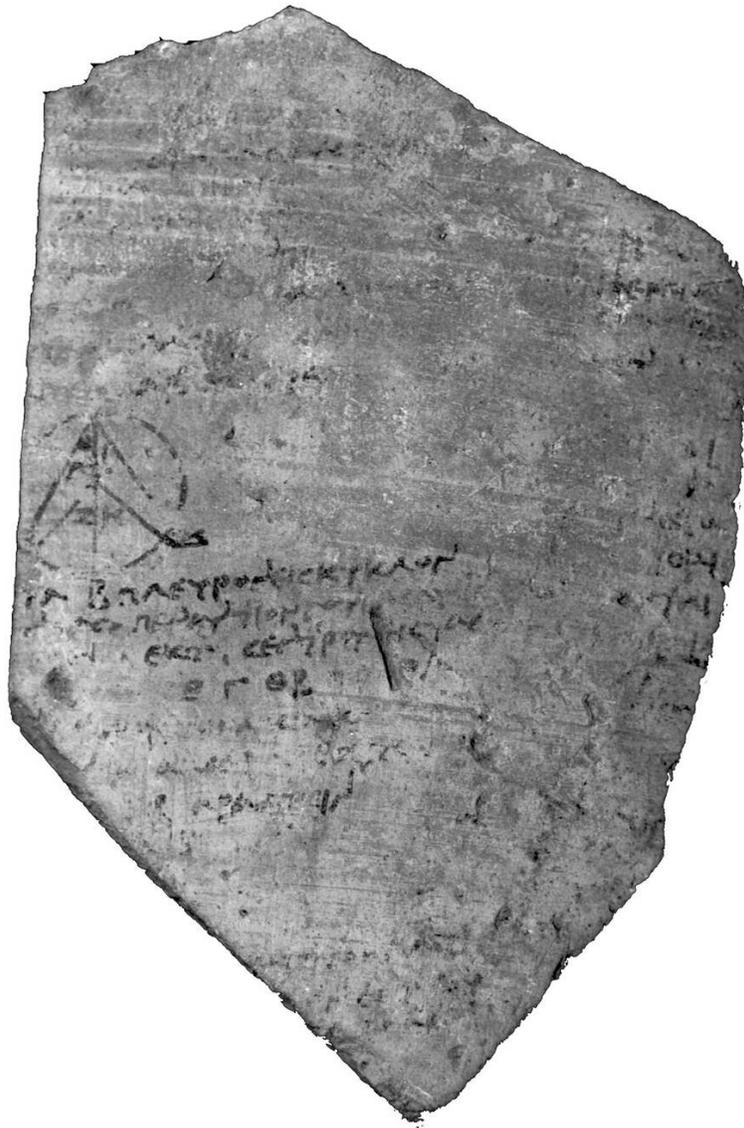
Somit stellen die Verfasser dieser Papyrusfragmente die »Zielgruppe« der griechischen Geometrie dar: eine winzig kleine Minderheit in einer Welt, in der ohnehin nur ein geringer Teil der Gesellschaft lesen und schreiben konnte. Die Leser waren Menschen, die mit Geometrie vertraut waren, die deren Konventionen akzeptierten und anerkannten, die genug über die Grundlagen und Methoden wussten, um Euklids Buch zu verstehen. Man kann davon ausgehen, dass ihre Interessen darüber bestimmten, was geschrieben wurde und wie es geschrieben wurde. Allein schon die Darstellung der mathematischen Sachverhalte in einer in sich geschlossenen Form verweist darauf, dass es diese Zielgruppe gab. Doch das ist es auch schon, was man über sie weiß.

Außerdem sagen die Funde nur etwas über die Orte aus, an denen es trocken genug war, dass die Papyrusfragmente die Zeit überstanden. Über den Rest der griechischen Welt – etwa die Inseln und das Festland nördlich des Mittelmeeres – weiß man aus Mangel an Funden nichts, weder positiv noch negativ. So gelangten die *Elemente* beispielsweise sicherlich nach Athen, doch Beweise dafür haben wir erst Jahrhunderte später.

*

Neben Papyrus existierte auch ein billigeres Schreibmaterial: Ostraka (Einzahl: Ostrakon), also Tonscherben. Es handelte sich um die Überreste zerbrochener Gefäße – Abfall und daher umsonst. Ostraka wurden in Ägypten schon vor den Ptolemäern und bis zum Ende der Antike benutzt, in Athen ab dem siebten Jahrhundert v. Chr. Man schrieb mit Tinte darauf oder ritzte etwas in sie ein – Bilder und Texte, in hieratischer oder demotischer Schrift, auf Griechisch, Koptisch oder Arabisch. Schüler, Soldaten, Priester und

Steuerbeamte - alle verwendeten Ostraka. (Außerdem fungierten sie als eine Art »Stimmzettel« - wem das Wort vage bekannt vorkommt, der hat vielleicht schon einmal vom Ostrakismos, dem »Scherbengericht«, gehört: ein Verfahren, mit dem ein Mann, der im Verdacht stand, sich illoyal verhalten zu haben, für zehn Jahre aus der Stadt verbannt werden konnte; die Abstimmung lief mittels Tonscherben, in die der Name eingeritzt wurde. Das Scherbengericht wurde über weite Teile des fünften Jahrhunderts v. Chr. in Athen und auch in anderen Städten Griechenlands praktiziert.)



Ein euklidisches Ostrakon

Ostrakon, Elephantine, 3. Jhd. v. Chr. Berliner Papyrusdatenbank P. 11999. (© bpk-Bildagentur)

Ein Satz Ostraka, der in Elephantine mit einem geometrischen Text versehen wurde, schaffte es, nicht durch das Sieb der Geschichte zu fallen. Die Scherben wurden in den beiden Wintern 1906 und 1907 von dem deutschen Archäologen Otto Rubensohn ausgegraben und befinden sich heute in der Berliner Papyrussammlung. Ihr Inhalt wurde in den 1930er-Jahren transkribiert und

veröffentlicht. Bei ihnen handelt es sich um den ältesten erhaltenen Nachweis für Euklids *Elemente* überhaupt.

Elephantine liegt mehr als 800 Kilometer südlich von Alexandria - eine Insel am nördlichen Ende des ersten Katarakts. Im dritten Viertel des dritten Jahrhunderts v. Chr., als die Ostraka beschrieben wurden, verlief hier die Grenze des ptolemäischen Reiches. Die schon seit Urzeiten besiedelte »Elfenbeininsel« oder »Elefanteninsel« war traditionell die Hauptstadt des ersten oberägyptischen Gaus, also Verwaltungsbezirks, und kontrollierte den Handel mit den Steinbrüchen in der Kataraktregion und die Handelsstraße nach Nubien. Die Garnisonsstadt war weit entfernt von den Zentren der griechischen Kultur und ständig von Räufern bedroht.

Elephantine hatte Tempel, Priester und recht aufwendig konstruierte Bauwerke, und es war durchaus etwas los - als es zum Byzantinischen Reich gehörte, gab es dort sogar einen öffentlichen Kamelhof. Doch die überlieferten Dokumente aus der Zeit - erneut hauptsächlich Papyri - sind von den typischen Sorgen von Soldaten geprägt, die fernab ihrer jeweiligen Heimatregion stationiert waren. Im dritten Jahrhundert v. Chr. lebten in Elephantine Männer aus griechischen Städten, von Inseln wie Kreta und Rhodos, aus Alexandria und Festlandsregionen wie Euböa und Phokis - eine wahrhaft homerische Mischung. Sie mieden den Kontakt zu den einheimischen Ägyptern, nannten ihre Stadt »die Festung« und nutzten Papyri, um Testamente zu verfassen, zu heiraten, Paten zu bestimmen, ihren Vorgesetzten Bericht zu erstatten oder Gerechtigkeit zu erbitten. Das ist keine Umgebung, in der man die frühesten Nachweise für das Werk Euklids erwartet hätte.

Auf den Ostraka - sechs Stück, von denen eines eindeutig an allen Seiten Bruchkanten aufweist - steht geschrieben, wie man ein reguläres Polyeder konstruiert. Das entspricht

den Propositionen 10 und 16 aus dem dreizehnten Buch der *Elemente*, fast ganz am Ende des Werkes. In diesen Propositionen wird mithilfe eines Fünfecks, eines Sechsecks und eines Zehnecks ein Ikosaeder geschaffen, ein regelmäßiger Körper mit zwanzig Seitenflächen aus deckungsgleichen gleichseitigen Dreiecken. Das unvermeidliche Diagramm ist, samt der Buchstaben, klar auf einem der Ostraka zu erkennen, und man erhält den Eindruck, dass jemand diese Scherben genutzt hat, um das zu tun, was jeder griechische Geometer tat: ein Bild zu zeichnen und eine Geschichte dazu zu erzählen.

Die Propositionen in den *Elementen* bauen aufeinander auf, in einer komplexen, baumähnlichen Struktur: Jede bezieht sich implizit auf eine ganze Reihe der vorausgehenden. Ein souveräner Umgang mit einem Abschnitt so weit hinten im Buch war nur möglich, wenn man bereits vieles von dem, was davor kam, durchgearbeitet hatte. Doch einen direkten Beweis dafür liefern die Ostraka nicht. Die Handschrift darauf ist zielstrebig und fließend – das Werk eines erfahrenen Schreibers, der Grammatik und Rechtschreibung sicher und fehlerfrei beherrschte.

Wer war der Verfasser? Dass wir die Antwort darauf nicht kennen, ist äußerst frustrierend. Die Mathemathikhistorikerin Serafina Cuomo, deren Spezialgebiet die Antike ist, bemerkt zu den Ostraka: »Während ihr Inhalt auf einen hohen Bildungsgrad hinweist, scheinen sowohl das bescheidene Material als auch der Fundort (ein abgelegener Außenposten im Herzen des ›ägyptischen‹ Ägyptens) dieser Schlussfolgerung zu widersprechen.« Priester, Lehrer, Soldat oder jemand aus dem Umfeld des Militärs? Wir werden niemals wissen, wessen Hand das älteste überlieferte Fragment des euklidischen Werkes in den Ton ritzte.