

Álgebra

Un enfoque moderno

PETERS \ SCHAAF

EDITORIAL REVERTÉ

ALGEBRA

un enfoque moderno

Max Peters
William L. Schaaf.



**EDITORIAL
REVERTÉ**

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:

ALGEBRA

a modern approach

Edición original en lengua inglesa publicada por

D. Van Nostrand Company Inc.

450 West 33rd Street, New York, N. Y.

Copyright © Van Nostrand Company Inc.

Versión española por

Ing. Roberto Treviño González

Profesor en la Universidad Regiomontana

Monterrey, N. L. Méx.

Edición en papel:

© Editorial Reverté, S. A., 1972

ISBN: 978-84-291-5105-3

Edición e book (PDF):

© Editorial Reverté, S. A., 2012

ISBN: 978-84-291-9672-6

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15. Local B

08029 Barcelona. ESPAÑA

Tel: (34) 93 419 33 36

reverte@reverte.com

www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, queda rigurosamente prohibida, salvo excepción prevista en la ley. Asimismo queda prohibida la distribución de ejemplares mediante alquiler o préstamo públicos, la comunicación pública y la transformación de cualquier parte de esta publicación (incluido el diseño de la cubierta) sin la previa autorización de los titulares de la propiedad intelectual y de la Editorial. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (Art. 270 y siguientes del Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO) vela por el respeto a los citados derechos.

Prefacio

Esta obra, ALGEBRA, UN ENFOQUE MODERNO, basada en la filosofía del S. M. S. G. (*Grupo para el estudio de las matemáticas*), es una presentación al día de los conceptos básicos de Algebra. En ella, los autores dan el énfasis adecuado a los sistemas numéricos, a las estructuras algebraicas, a la racionalización lógicas de las operaciones y procedimientos matemáticos y a la precisión del idioma.

El objetivo principal es que el estudiante comprenda perfectamente los conceptos fundamentales por su propio descubrimiento y generalización, así como que adquiera la habilidad necesaria para manejarlos fácilmente. En realidad, según la experiencia de los autores, los conceptos y las habilidades se adquieren simultáneamente. De acuerdo con este enfoque se proporciona en este libro mucho material práctico, tanto para ilustrar los conceptos como para dar al alumno un firme dominio sobre su habilidad.

Durante los últimos diez años, los estudios de matemáticas en los grados elemental y superior han experimentado cambios dinámicos pero se han introducido estos cambios en forma poco sistemática. Como resultado, los estudiantes llegan a los últimos grados con una gran diversidad de conocimientos fundamentales de matemáticas. Ello ha sido reconsiderado al preparar la primera edición de *Algebra, un enfoque moderno*.

Con grupos de alumnos más uniformemente preparados es posible dar mayor énfasis al desarrollo axiomático del sistema de los números reales.

Desde el punto de vista matemático se han tenido presentes los principios siguientes:

- 1o. No omitir ni tratar superficialmente, ningún tópico que deba conocer un estudiante del grado medio.
- 2o. La estructura del Algebra. No solamente se han establecido claramente las leyes algebraicas, sino que son usadas en forma coherente.
- 3o. Dar en forma clara y precisa las definiciones y axiomas y la demostración de los teoremas importantes.
- 4o. Usar de la teoría de conjuntos como un elemento unificador a través de todo el texto.
- 6o. Poner, dentro del desarrollo, las propiedades de las desigualdades y el concepto de valor absoluto en su lugar adecuado.
- 6o. Usar con todo rigor el lenguaje algebraico, la terminología usada es la de la matemática moderna. Cuando el alumno continúe hasta estudios más avanzados, tendrá poco que aprender sobre vocabulario matemático.

Desde el punto de vista pedagógico, se ha puesto especial atención a los hechos siguientes:

- 1o. El estilo es informal y el lenguaje es simple. El alumno tendrá poca dificultad en leer y entender el texto.
- 2o. La organización y exposición están hechas de manera que pueda servir al autodidacta, no en forma mecánica como el material "programado", sino de un modo reflexivo y que se entienda lo estudiado.
- 3o. Los ejemplos ilustrativos se han hecho con explicaciones paso a paso, para que el alumno pueda trabajar sobre ellos.
- 4o. El gran número de ejercicios, además de los de Repaso y los Acumulativos, dan suficiente material para obtener la destreza necesaria.

Por último, se ha puesto atención para cuidar de las diferencias individuales:

- 1o. Por principio de cuentas el alumno promedio del primer año, debe ser capaz para adquirir en primer lugar, maestría en el manejo del material presentado. Los párrafos "Opcionales" pueden omitirse para los alumnos con menor preparación sin perder la secuencia del libro.
- 2o. Los "Temas Extraordinarios" están escritos para los estudiantes sobresalientes que pueden trabajar por sí mismos o que tienen una aptitud matemática especial. Se incluyen al final de cada capítulo como unidades independientes, en forma breve, y relacionados o no con el tema del capítulo. Después de una exposición corta de los principios, se dan unos cuantos ejercicios para incitar la aptencia intelectual del alumno. La capacidad matemática se adquirirá solamente por la aplicación de los conceptos encontrados inicialmente.
- 3o. Se da la Bibliografía para los estudiantes que tengan un interés serio en las matemáticas, aun cuando les falte la capacidad creadora de los matemáticos potenciales. El campo de los temas e ideas se varía con toda intención. Las referencias bibliográficas son específicas y dan un rango amplio de fuentes de lectura para exploración y enriquecimiento de conocimientos. Se debe animar a los alumnos a exponer oralmente resúmenes o trabajos breves de los temas sugeridos. Obviamente el material es muy flexible y puede permitir al maestro, descubrir talentos latentes. Puede servir también como motivación, incremento de conocimientos y apreciación de cualidades.

En conclusión, los autores expresan su deuda con muchas fuentes, incluyendo las sugerencias de muchos colegas, así como el material que se ha publicado debido a varios grupos profesionales y experimentales.

Peters y Schaaf

Contenido

1 CONJUNTOS Y RELACIONES

Generalidades, 2 Familiarizándonos con los números, 17 Frases y proposiciones, 23 Familiarización con variables, 28 Tema extraordinario; Operaciones con conjuntos, 50

2 LOS NUMEROS NATURALES; OPERACIONES Y PROPIEDADES

Hipótesis básicas, 18 La propiedad conmutativa, 62 La propiedad asociativa, 67 La propiedad distributiva, 73 Propiedades del 0 y el 1, 79 Tema extraordinario; Base de un sistema de numeración, 90

3 LOS NUMEROS ENTEROS Y SUS PROPIEDADES

Números positivos y negativos, 96 Adición de enteros, 110 Multiplicación de enteros, 120 Sustracción de números enteros, 128 División de enteros, 134 Repaso acumulativo I, 146 Tema extraordinario; Congruencias y aritmética modular, 150

4 NUMEROS RACIONALES Y NUMEROS REALES; OPERACIONES CON FRACCIONES

Números racionales y números reales, 155 Operaciones con fracciones, 169 Revisión acumulativa II, 191 Tema extraordinario; Uso de los conjuntos para resolver problemas, 194

5 ECUACIONES, PROBLEMAS, FORMULAS, Y DESIGUALDADES

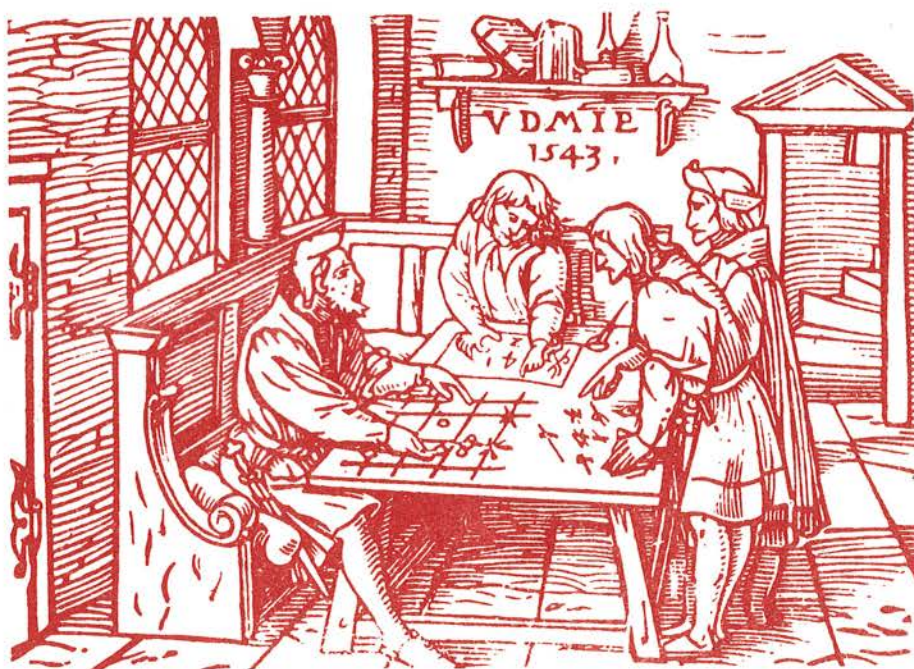
El lenguaje y la matemática, 201 Resolución de ecuaciones, 208 Resolución de problemas, 221 La fórmula, 231 Uso de desigualdades, 236 Ejercicio acumulativo III, 250 Tema extraordinario; Desigualdades absolutas, 253,

6 POLINOMIOS, PRODUCTOS Y FACTORES

Factores y exponentes, 258 Polinomios, 270 Productos y factorizaciones notables, 284 Ecuaciones cuadráticas simples, 302 Tema extraordinario; El algoritmo euclidiano 317,

- 7 EXPRESIONES RACIONALES**
Operaciones con expresiones racionales, 325 Ecuaciones e inecuaciones, 337 Razones y proporciones, 346 Repaso acumulativo IV, 359 Tema extraordinario; Propiedades de las operaciones con números racionales, 362
- 8 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**
Proposiciones abiertas con dos variables, 367 Más con respecto a ecuaciones lineales; pendiente e intercepción, 381 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales, 393 Revisión acumulativa V, 428 Tema extraordinario; ecuaciones lineales diofánticas, 431
- 9 NUMEROS IRRACIONALES Y RADICALES**
El conjunto de los números reales, 438 Potencias y raíces, 445 Propiedades de los radicales, 448 Transformación de radicales, 453 Raíces cuadradas aproximadas, 462 Más con respecto a números irracionales, 470 Ejercicio acumulativo VI, 484 Tema extraordinario; Triples pitagóricos, 488
- 10 RELACIONES Y FUNCIONES;
ECUACIONES Y FUNCIONES CUADRÁTICAS**
Conjuntos relacionados y funciones, 493 Funciones y gráficas, 504 La función cuadrática, 542 Ecuaciones de parábolas, 520 Resolución de ecuaciones cuadráticas, 524 Revisión acumulativa VII, 551 Tema extraordinario; Campos numéricos, 555
- 11 TRIGONOMETRIA DEL TRIANGULO RECTANGULO**
Triángulos semejantes, 562 Tangente de un ángulo, 571 Seno y coseno de un ángulo, 582 Revisión acumulativa VIII, 615 Tema extraordinario; Más con respecto a razones trigonométricas, 619
- 12 USO DE LA MATEMATICA EN LA CIENCIA**
Electricidad, 625 Calor, 637 Repaso acumulativo IX, 651 Tema extraordinario; Problemas sobre máximas y mínimos, 654 Repaso final, 657 Práctica complementaria en resolución de problemas, 665 Glosario, 673

Instrucciones en el arte del cálculo en 1543. Es enseñanza para el uso de los barcos.



¿Qué son los Números?

Los números son como las ideas; no puedes verlos ni manejarlos. Solamente existen en nuestra mente. Los símbolos que escribimos son numerales; son representantes de la idea de número. No son los números.

El concepto moderno de número es fundamental en la matemática. Sin él la matemática no existiría. Durante siglos se ha ido extendiendo el uso de los números y ha sido una parte básica de nuestra cultura. A medida que la matemática ha venido a ser una herramienta más útil a la ciencia y a la tecnología ha sido indispensable entender el papel de los números en la civilización moderna.

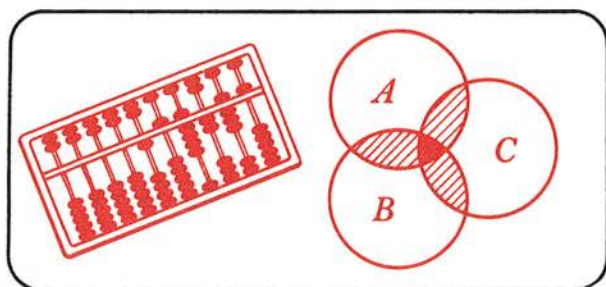
No siempre se ha entendido con toda claridad el concepto de número. En la antigüedad se creyó que los números tenían una cualidad misteriosa. Fue un trabajo muy arduo desarrollar los primeros sistemas de numerales. Se construyeron dispositivos mecánicos, como el ábaco, para computación. De repente salió un sistema de fácil manejo. Escasamente hace 600 años que nuestro sistema actual de numerales indoarábigos se estableció en Europa.

Ideas básicas relacionadas con el concepto de número son las de sucesión y correspondencia. Estas ideas son fundamentales en la matemática moderna. No solo son ideas muy útiles, sino que también fáciles de entender. Sabemos que al “contar”, todo número es seguido inmediatamente por otro que es “una unidad mayor” que el precedente. Aún niños de muy tierna edad muestran un conocimiento práctico de correspondencia cuando reparten una bolsa de canicas o una caja de dulces diciendo: “una para mí, y otra para tí”, etc.

Sin embargo fue solo al final del último siglo cuando los matemáticos comenzaron a explorar las grandes posibilidades de estas ideas tan “simples”. Muchos de los primeros trabajos sobre esto se debieron al matemático alemán Georg Cantor (1845-1918). Veremos algo sobre estas ideas en el primer capítulo.

1

Conjuntos y Relaciones



GENERALIDADES

1.1 IDEA DE CONJUNTO

En nuestra conversación diaria hablamos frecuentemente de colecciones de objetos. Usamos a menudo frases como una manada de caballos, un manejo de lápices, un grupo de niños, un paquete de cartas, o una flotilla de barcos. En matemáticas usamos la palabra conjunto para designar a una colección de objetos. Un conjunto debe ser descrito en tal forma que no haya duda acerca de los objetos que forman parte del conjunto; en este caso decimos que el conjunto está bien definido. Como ejemplos de conjuntos tenemos:

- (a) El conjunto de tus libros escolares.
- (b) El conjunto de los equipos de beisbol de liga mayor.
- (c) El conjunto de los 50 Estados que forman la Unión Americana.
- (d) El conjunto de los meses del año.
- (e) El conjunto de los nombres que aparecen en un directorio telefónico.

Decimos que los objetos que forman parte de una colección pertenecen al conjunto. Los llamados miembros o elementos del conjunto. Los elementos de un conjunto pueden ser cosas de muy diferentes clases: objetos, gentes, nombres, lugares, letras del alfabeto, números, puntos, figuras geométricas. Por ejemplo, hablamos del conjunto de los números impares; el conjunto de los números divisibles por 5; el conjunto de círculos; etc.

En las próximas secciones aprenderemos cómo usar los conjuntos. A medida que avancemos en el estudio del Álgebra, hallaremos que el conocimiento de los conjuntos es una herramienta muy útil.

1.2 FORMAS DE DESIGNAR A LOS CONJUNTOS

Un conjunto debe ser descrito en tal forma que no haya duda acerca de los elementos que lo componen. Esto puede hacerse en cualquiera de las tres formas siguientes:

- (1) Haciendo una lista completa de todos los elementos.
- (2) Mediante una frase apropiada.
- (3) Especificando una propiedad común a todos los elementos del conjunto.

Cuando se usa la primera forma, se escribe la lista de los elementos entre llaves, y al conjunto se le designa por una letra mayúscula. Por ejemplo:

$A = \{ \text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo} \}$, en donde A designa al conjunto de los días de la semana.

$$P = \{1, 3, 5, 7, 9\},$$

en donde P designa al conjunto de números impares menores que 10. Al conjunto de los números que usamos al contar se le llama el conjunto de los números naturales. Se representa por N es decir, $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

En el conjunto P , "7" es uno de sus elementos. Esto se puede escribir en forma más simple como sigue:

$$7 \in P \text{ (se lee "7 es un elemento de } P \text{" o bien "7 pertenece a } P \text{")}$$

En el mismo ejemplo, "2" no es un elemento de P . Se escribe

$$2 \notin P \text{ (se lee "2 no es un elemento de } P \text{" o "2 no pertenece a } P \text{")}$$

En la segunda forma, describimos los elementos del conjunto en forma verbal usando una frase apropiada. **Ejemplos:**

E = conjunto de los maestros de inglés en tu escuela.

D = conjunto de vasijas en tu gabinete de cocina.

R = conjunto de todas las muchachas pelirrojas de tu clase.

N = conjunto de números naturales entre 5 y 12.

A veces es más conveniente describir un conjunto verbalmente que hacer una lista completa de sus elementos. Esto es especialmente cierto cuando un conjunto tiene un gran número de elementos. En estos casos se abreviará la escritura. Por ejemplo,

$$S = \{ 5, 10, 15, 20, \dots, 100 \},$$

es el conjunto de todos los números de 5 a 100 inclusive, que son múltiplos de 5. Recordemos que un múltiplo de 5 es el producto de cualquier número natural, por 5.

Si deseamos representar un conjunto que consta de infinitos elementos usamos tres puntos suspensivos y escribimos:

$$Q = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \},$$

Q es el conjunto de todos los números pares.

Cuando usamos el tercer método, debemos llamar la atención sobre una propiedad que sea común a todos los elementos del conjunto y usamos la siguiente anotación:

$$A = \{ x | x \text{ es un número par menor que } 10 \}.$$

Esto puede leerse “ A es igual al conjunto de números x , tales que x es un número par menor que 10”.

Esta notación llamada “constructor de conjuntos”, será expuesta con mayor detalle en la sección 1.17.

Algunas veces un conjunto carece de elementos. Por ejemplo:

V = conjunto de los Senadores de Estados Unidos que tienen 15 años de edad.

C = conjunto de números naturales entre 5 y 6.

B = conjunto de bates de acero para beisbol.

M = conjunto de meses de 32 días.

Un conjunto que no tiene elementos se llama conjunto vacío, o conjunto nulo. El símbolo ϕ es el que se usa para designar al conjunto vacío. También podemos usar $\{ \}$

Ejercicio 1-1

1. Dar un ejemplo de un conjunto en que los elementos son:

- (a) edificios (b) lagos (c) números (d) letras del alfabeto
(e) estudiantes de tu clase.

2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos están bien definidos?

- (a) Los elementos del equipo de basquetbol de tu escuela en este período escolar.
(b) manzanas.
(c) Los pasajeros en un vuelo particular en un día dado, de Chicago a Los Angeles.

- (d) Las muchachas bonitas de tu escuela.
(e) Todos los ciudadanos que viven en el Estado de Pensylvania.
(f) Los jardineros estrellas del equipo de beisbol de los Dodgers.
3. (a) Dar dos ejemplos de conjuntos que se puedan describir en forma conveniente haciendo la lista de todos sus elementos.
(b) Dar dos ejemplos de conjuntos que puedan describirse en forma conveniente usando una frase.
4. Cada una de las oraciones siguientes describe un conjunto. Escribir los nombres de los elementos de cada conjunto dentro de llaves.
- (a) El conjunto de tus maestros de este año.
(b) El conjunto de los números naturales menores que 6.
(c) El conjunto de meses de año cuyos nombres comiencen con "M".
(d) El conjunto de números naturales menores que 50 que son divisibles por 7.
(e) El conjunto de números naturales entre 1 y 15.
(f) El conjunto de días festivos legales en el mes de julio.
5. En cada uno de los ejercicios siguientes, se han enlistado dentro de llaves todos los elementos de un conjunto. Describir cada conjunto mediante una frase. Dicha descripción puede hacerse de diferentes formas.
- (a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,\}$
(b) $\{\text{primavera, estío, otoño, invierno}\}$
(c) $\{\text{un centavo, una moneda de 5 centavos, una de 10 centavos, una de 25 y una de medio dolar}\}$
(d) $\{a, e, i, o, u\}$
(e) $\{5, 10, 15, 20, 25,\}$
(f) $\{\text{delantero derecho, delantero izquierdo, centro, defensa derecha, defensa izquierda}\}$
6. Determinar cuáles de los conjuntos que se dan a continuación es el conjunto vacío. Escribir los elementos de aquellos conjuntos que no son el vacío dentro de llaves.
- (a) El conjunto de directores de la escuela.
(b) El conjunto de estados que limitan tanto con el Océano Atlántico como con el Pacífico.
(c) El conjunto de números impares naturales divisibles por 2.
(d) El conjunto de colores de la bandera nacional.
(e) El conjunto de números naturales menores que 1.
(f) El conjunto de miembros de una familia.

7. Dados los conjuntos:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$$

$$C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$$

Completar lo siguiente: (*no se escriba en el libro*)

(a) $5 \in$ _____ (c) $10 \in$ _____ (e) $11 \notin$ _____

(b) $7 \notin$ _____ (d) $49 \in$ _____ (f) $9 \in$ _____

8. Escribir dentro de llaves los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) El conjunto de números naturales pares entre 40 y 52. (Recuérdese que “entre” indica que los extremos no están incluidos).

(b) El conjunto de números naturales impares del 21 a 23 inclusive.

(c) El conjunto de todas las combinaciones posibles de una de las tres letras A , B y C con uno de los tres números 1, 2, 3, sin tomar en cuenta el orden; esto es “A1” es la misma combinación que “1A”.

9. Enlistar dentro de llaves los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) Los múltiplos de 7, comenzando con 14 y terminando con 84.

(b) El conjunto de los cuadrados de números naturales entre 1 y 12.

(c) El conjunto de cantidades de dinero que pueden obtenerse combinando dos monedas cualesquiera de los Estados Unidos, es decir, una de centavo, una de 10, una de 25 y una de 50 centavos.

(d) Los cuadrados de los primeros cuatro números naturales.

10. (a) Escribir los elementos del conjunto de todos los números naturales de 3 a 30 inclusive, que son divisibles por 3.

(b) Escribir los elementos del conjunto de todos los números naturales de 3 a 30 inclusive, en que la suma de los dígitos es divisible por 3.

(c) ¿Cuál es la relación que existe entre el conjunto del ejercicio (b) y el conjunto del ejercicio (a)?

11. Un número primo es cualquier número natural que no tiene como factor a ningún otro número primo exceptuando 1 y sí mismo. (El número 1 no se considera como número primo). Escribir el conjunto de números primos entre 1 y 30.

12. Describir en palabras cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{x, y, z\}$

(b) $B = \{12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$

- (c) $C = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$
 (d) $D = \{10, 100, 1,000, 10,000\}$
 (e) $E = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$
 (f) $F = \{1952, 1956, 1960, 1964\}$

1.3 SUBCONJUNTOS

Cierta orquesta escolar consta de 40 elementos en total: 15 violines, 4 violas, 4 cellos, 4 clarinetes, 3 flautas, 2 oboes, un contrabajo, tres cornos, 2 trompetas, 2 tambores. Podemos considerar el conjunto de los 15 violines como un conjunto separado dentro del conjunto total de los 40 instrumentos. A este le llamamos subconjunto del conjunto entero. De una manera semejante el conjunto de los 4 clarinetes constituye otro subconjunto, así mismo lo es el de las 3 flautas, el de los 3 cornos, o el de las 2 trompetas. Aún un conjunto de un solo elemento como el del contrabajo es un subconjunto. Podemos también considerar de los 23 instrumentos de cuerda como un subconjunto; o los 10 de viento; o los 5 de latón o los 2 tambores; o la orquesta completa.

Si todos los elementos de un conjunto A pertenecen al conjunto B , decimos que A es un subconjunto de B .

La notación " $A \subset B$ " se lee " A es un subconjunto de B ".

Ejemplo 1. Consideremos los conjuntos siguientes:

$$X = \{5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

$$Y = \{5, 7, 11\}$$

Puesto que cada elemento del conjunto Y es también un elemento del conjunto X , entonces $Y \subset X$.

Ejemplo 2. Consideremos los conjuntos siguientes:

$$P = \text{al conjunto de elementos de un equipo de beisbol.}$$

$$Q = \text{el conjunto de jardineros de este equipo.}$$

Puesto que cada elemento del conjunto Q es también un elemento del conjunto P , entonces $Q \subset P$.

¿Puedes nombrar otros subconjuntos del conjunto P ?

Ejemplo 3. Consideremos el conjunto siguiente:

$$M = \{\text{Guillermo, Juan Paco, Carlos}\}$$

¿Podemos decir que M es un subconjunto de sí mismo? ¿Corresponde esto a la definición de subconjunto? (Recordemos que la definición de un subconjunto nos dice que cualquier elemento de un subconjunto debe ser elemento del conjunto original. Por lo tanto en conexión con esto, “sub”no necesariamente significa “menor que” o “más pequeño”).

Ejemplo 4. Podemos disponer de tres profesores para formar un comité escolar: El Sr. García, el Sr. Martínez, y el Sr. Rodríguez. ¿Cuántos comités diferentes son posibles? En otras palabras, ¿cuántos subconjuntos podemos hacer del conjunto $C = \{\text{García, Martínez, Rodríguez}\}$?

Comité I	=	García, Martínez, Rodríguez
Comité II	=	García, Martínez,
Comité III	=	García, Rodríguez
Comité IV	=	Martínez, Rodríguez
Comité V	=	García
Comité VI	=	Martínez
Comité VII	=	Rodríguez
Comité VIII	=	ϕ

No es muy común tener un “comité de uno solo”, como todos lo sabemos. Pero también parece muy raro llamar a VIII un comité, puesto que es el conjunto vacío. Se ha convenido entre los matemáticos considerar al conjunto vacío como un subconjunto. Todo elemento de ϕ es un elemento del conjunto C , puesto que ϕ no tiene elementos. En este sentido ϕ está “contenido” en cualquier otro conjunto. En otras palabras, el conjunto vacío es un subconjunto de otro cualquiera.

-
- (1) **Cualquier conjunto es un subconjunto de sí mismo.**
 (2) **El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier otro.**
-

Ejercicio 1-2

- Si $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ escribir con esta misma notación:
 - El subconjunto de B que contiene sus números pares.
 - El subconjunto de B que contiene sus números impares.
 - El subconjunto de B que contiene sus cuadrados perfectos.
- Si $R = \{a, b, c\}$
 - Escribir todos los subconjuntos de R que tienen un solo elemento.
 - Escribir todos los subconjuntos de R que tienen dos elementos.
 - Escribir los otros dos subconjuntos de R .

3. Si $A = \{\text{Juanita, Eduardo}\}$, escribir todos los subconjuntos de A . (Se tienen cuatro subconjuntos).
4. Escribir un conjunto C del cual son subconjuntos los siguientes conjuntos: $A = \{b, d, f\}$ y $B = \{k, l, s, t\}$. ¿Cuál es el número mínimo de elementos de C ?
5. Enlistar el conjunto cuyos elementos son:
 - (a) Todos los números naturales impares del 1 al 15 inclusive; después de esto escribir el subconjunto que contiene los números de dicho conjunto que son divisibles por 3.
 - (b) Todos los números naturales del 1 al 10 inclusive, que son cuadrados de números naturales; después de esto enlistar el subconjunto formado por los números impares de dicho conjunto.
 - (c) Todos los números naturales del 1 al 10 inclusive, que son raíces cuadradas de números naturales impares; escribir el subconjunto que contiene los números primos que pertenezcan a aquel conjunto. (Recordar que raíz cuadrada de un número es uno de los dos factores iguales cuyo producto es ese número. Por ejemplo, $\sqrt{16} = 4$.)
 - (d) Todos los números naturales de 2 cifras, cuya cifra de las decenas es el doble de la cifra de las unidades; después escribir el subconjunto que contiene los números de dicho conjunto que son divisibles por 3.
6. Enlistar el conjunto cuyos elementos son:
 - (a) Los números naturales menores que 20 que son cuadrados de números naturales; después escribir el subconjunto de números tales que contengan números pares.
 - (b) Todos los múltiplos de 6, de 12 a 48, inclusive; escribir después el subconjunto de números que son divisibles por 4.
 - (c) Todos los números naturales mayores que 20 y menores que 30; escribir después el subconjunto formado por los números pertenecientes a dicho conjunto que sean divisibles por 3.
 - (d) Los cuadrados de todos los números naturales menores que 10; escribir después el subconjunto de números tales que sean números pares.
7. Formar un subconjunto, de tres elementos, de cada uno de los siguientes conjuntos:
 - (a) El conjunto de maestros de cierta escuela.
 - (b) El conjunto de los días de semana.
 - (c) $\{u, v, x, y, z\}$
8. Dado $S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

- (a) ¿Cuál es el subconjunto de números primos en S ?
- (b) ¿Cuál es el subconjunto de números divisibles por 2 en S ?
- (c) ¿Cuál es el subconjunto de S formado por números divisibles por 3?
- (d) ¿Cuál es el subconjunto de S formado por números divisibles por 5?
9. Dado $P = \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$, ¿cuáles de los siguientes son subconjuntos de P ?
- (a) El conjunto de números naturales de 1 al 10 inclusive.
- (b) $\{1, 2, 3, 25\}$
- (c) $\{1, 2, 3, 20\}$
- (d) $\{0\}$
- (e) $\{1, 3, 5, \dots, 19\}$
- (f) El conjunto de todos los múltiplos de 4 que son menores que 20.
10. Explicar la diferencia en significado, si la hay, de cada uno de los siguientes:
- (a) ϕ y $\{0\}$
- (b) ϕ y $\{ \}$
- (c) $\{0\}$ y $\{ \}$
11. Dado $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{1, 4, 9, 16\}$.
- (a) Formar el conjunto P que contenga a todos los elementos que están tanto en Q como en R .
- (b) ¿Es 2 un elemento de P ?
- (c) ¿Es P un subconjunto de Q , o es Q un subconjunto de P ? Explicar por qué.
12. ¿Cuáles de los siguientes son el conjunto vacío?
- (a) El conjunto de números naturales menores que 2.
- (b) El conjunto de números pares cuyos cuadrados son números pares.
- (c) El conjunto de números impares cuyos cuadrados son números pares.
- (d) El conjunto de todos los números primos que sean pares.
- (e) El conjunto de todos los ángulos rectos que tengan menos de 90 grados.

1.4 SUBCONJUNTOS PROPIOS

Hemos aprendido: (1) cualquier conjunto es un subconjunto de sí mismo y (2) el conjunto vacío es un subconjunto de otro cualquiera. Si hacemos una lista de todos los posibles subconjuntos de un conjunto dado y excluimos, de esta lista, al conjunto mismo, entonces los subconjuntos restantes (incluyendo el conjunto vacío) son llamados subconjuntos propios.

Un subconjunto propio de un conjunto S es cualquier subconjunto de S que no contenga *todos* los elementos de S .

Ejercicio 1-3

1. Escribir todos los posibles subconjuntos de cada uno de los siguientes conjuntos. No olvidar el conjunto vacío. ¿Cuáles de éstos son subconjuntos propios?

- (a) $\{5, 6\}$
 (b) $\{x, y, z\}$
 (c) $\{\text{Juan, Pedro, Guillermo}\}$
 (d) $\{a, b, c, d\}$

2. Copiar y completar la tabla:

Conjunto	Número de subconjuntos posibles
(a) $\{k\}$	
(b) $\{m, n\}$	
(c) $\{x, y, z\}$	
(d) $\{r, s, t, u\}$	

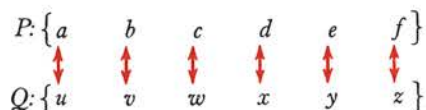
3. Si un conjunto tiene 5 elementos, ¿puedes decir el número de subconjuntos que se puedan formar?
- *4. ¿Cuántos subconjuntos se pueden formar de un conjunto que tenga n elementos?
- *5. Un conjunto A tiene 6 elementos. ¿Cuántos subconjuntos se pueden formar? ¿Cuántos subconjuntos propios tiene?
- *6. ¿Cuántas sumas diferentes de dinero se pueden obtener seleccionando una o más monedas de 1 centavo, una de a 5, una de 10, una de 25 y una de 50?
- *7. ¿Cuál es el número total de posibles comités que pueden formarse seleccionando una o más personas de un grupo de 6?
- *8. (a) ¿Es el conjunto vacío, un subconjunto de sí mismo?
 (b) ¿Es el conjunto vacío un subconjunto propio de sí mismo? ¿Por qué?

1.5 CONJUNTOS EQUIVALENTES

Los conjuntos podemos compararlos con dos propósitos: (1) para ver si tienen exactamente los mismos elementos o (2) para ver si tienen el mismo número de elementos.

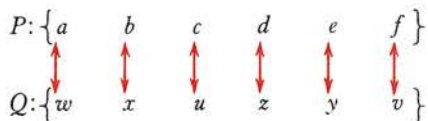
Consideremos $R = \{1, 5, 7\}$ y $S = \{5, 1, 7\}$, que tienen *exactamente los mismos elementos*. Decimos que estos dos conjuntos son iguales, y escribimos $R = S$. El hecho de que los elementos de R aparezcan en diferente orden de los elementos de S no tiene importancia. Cuando decimos que $R = S$, simplemente decimos que “ R ” y “ S ” son dos nombres diferentes para el mismo conjunto.

Consideremos ahora el conjunto $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $Q = \{u, v, w, x, y, z\}$. Los elementos del conjunto P no son los mismos que los elementos del conjunto Q , los dos conjuntos no son iguales. Sin embargo es fácil ver, que cada uno de los conjuntos tiene el mismo número de elementos, porque cada elemento del conjunto P puede hacerse corresponder con un elemento del conjunto Q , y cada elemento del conjunto Q puede hacerse corresponder con un elemento del conjunto P como se muestra a continuación.



Este apareamiento que hicimos con estos dos conjuntos muestra que existe una correspondencia de uno a uno entre los dos conjuntos. Cuando los elementos de 2 conjuntos pueden ponerse en correspondencia biunívoca, o sea de uno a uno, decimos que los conjuntos tienen el mismo número cardinal; tales conjuntos son llamados conjuntos equivalentes. Escribimos entonces $P \leftrightarrow Q$, que se lee “el conjunto P es equivalente al conjunto Q ”.

Debe notarse que los elementos de dos conjuntos equivalentes pueden ser puestos en correspondencia biunívoca en más de una forma diferente. Por ejemplo, los elementos de P y Q podemos también ponerlos en correspondencia como sigue:



Ejercicio 1-4

1. Demostrar que cada uno de los ejemplos siguientes ilustra la idea de correspondencia biunívoca. Puede usarse un diagrama.
 - (a) El conjunto de Estados de la Unión Americana y el conjunto de las Capitales de Estados de la misma.

- (b) El conjunto de automóviles que existen en nuestra ciudad y el conjunto de números de placas en él.
- (c) El conjunto de letras del alfabeto y el conjunto de números naturales del 1 al 26 inclusive.
- (d) El conjunto de equipos de liga mayor de beisbol y el conjunto de gerentes de equipos de liga mayor de beisbol.
2. ¿Cuáles de las siguientes parejas de conjuntos son iguales? ¿Cuáles parejas son equivalentes?
- (a) $\{a, e, i, o, u\}$ y $\{e, u, a, o, i\}$
- (b) $\{\text{Juan, Enrique, María, Guillermo}\}$ y $\{\text{Enrique, Guillermo, Juan, Eduardo}\}$
- (c) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
- (d) $\{1, 5, 7, 9\}$ y el conjunto de números naturales pares menores que 10.
- (e) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y el conjunto de números primos menores que 17. (Recordar que 1 no es un número primo.)
- (f) $\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{\text{lunes, martes, miércoles, jueves}\}$
3. ¿Cuáles de las siguientes parejas de conjuntos son equivalentes?
- (a) $\{95, 96, 97, 98, 99, 100\}$ y $\{a, e, i, o, u\}$
- (b) $\{\text{Francisco, Eduardo, Guillermo}\}$ y $\{\text{María, Adelina, Juanita}\}$
- (c) El conjunto de números impares menores de 14, y el conjunto de números menores de 14.
- (d) El conjunto de números naturales pares menores que 19, y el conjunto de números naturales impares menores que 18.
4. ¿Qué significa cada una de las siguientes proposiciones?: ¿Son ciertas? Dar un ejemplo para ilustrar cada una de ellas. Cada letra mayúscula representa un conjunto. (Recordar que la doble flecha, \leftrightarrow , significa "equivalente".)
- (a) Si $A \leftrightarrow B$, entonces $B \leftrightarrow A$
- (b) Si $A \leftrightarrow B$, y $B \leftrightarrow C$, entonces $A \leftrightarrow C$
- (c) $A \leftrightarrow A$
5. (a) Si dos conjuntos son iguales, ¿son necesariamente equivalentes? Da un ejemplo para ilustrar tu respuesta.
- (b) Si dos conjuntos son equivalentes, ¿necesariamente son iguales? Da un ejemplo para ilustrar tu respuesta.
6. Demostrar que hay exactamente 6 formas diferentes de establecer una correspondencia biunívoca de los elementos $\{A, B, C\}$ con los elementos de $\{1, 2, 3\}$.
7. Mostrar cómo los elementos del conjunto de fracciones unitarias $\{1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}$ pueden ser puestos en correspondencia con los elementos del conjunto de los números naturales.

- *8. Demostrar como los elementos del conjunto infinito de números naturales pares $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$, pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los elementos del conjunto infinito de números naturales $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$.
- *9. (a) Si dos conjuntos son equivalentes y cada uno de ellos tienen 5 elementos, ¿de cuántas maneras diferentes pueden ponerse en correspondencia biunívoca los dos conjuntos?
- (b) Si dos conjuntos son equivalentes y cada conjunto tiene 10 elementos, ¿de cuántas formas diferentes podemos poner en correspondencia "uno a uno" los elementos de los dos conjuntos?
- (c) Si tenemos dos conjuntos equivalentes cada uno de ellos con n elementos (n es cualquier número natural), ¿en cuántas formas diferentes podemos poner en correspondencia biunívoca los elementos de los dos conjuntos?

1.6 CONJUNTOS FINITOS Y CONJUNTOS INFINITOS

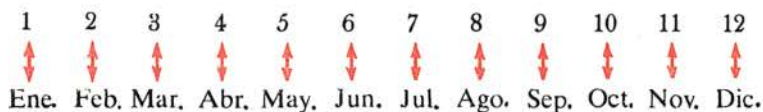
Un conjunto puede tener muchos elementos. Por ejemplo, las letras de alfabeto forman un conjunto; pero no es cómodo escribirlas todas; escribimos entonces $\{a, b, c, \dots, x, y, z\}$, donde los puntos suspensivos indican que las letras de d hasta w están incluidas en el conjunto, pero no han sido escritas.

Sabemos cuántos números naturales hay entre 1 y 50 ó de 1 a 100, ó de 1 a 1000, etc. Se pueden contar y la cuenta tiene fin. En otras palabras el conjunto de números naturales de 1 a 1000 ó de 1 a 1000000 tiene un primer y un último elemento. Consideramos el conjunto de gente que vive en una Nación en un momento particular. ¿Pueden contarse el número de elementos de este conjunto? Desde luego, aunque no sea una cosa fácil. En efecto, los elementos de este conjunto se cuentan aproximadamente cada 10 años por los Departamentos de censo.

Decimos que un conjunto es un conjunto finito, si podemos contar los elementos que lo componen, o si es el conjunto vacío. Cuando no es este caso, decimos que el conjunto es un conjunto infinito. Podemos decir o decimos que un conjunto infinito tiene un número infinito de elementos.

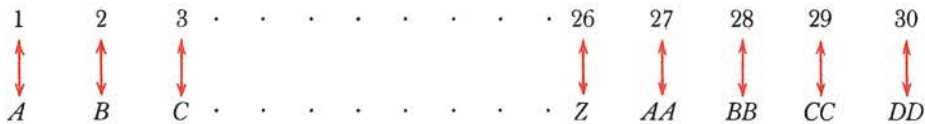
Los elementos de un conjunto finito pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los elementos de un subconjunto finito de los números naturales.

Ejemplo 1. El conjunto de meses del año puede ser puesto en correspondencia biunívoca con el conjunto de los primeros 12 números naturales, como sigue:



Ejemplo 2. El conjunto de 30 filas de asientos de un cinematógrafo puede

ponerse en correspondencia biunívoca, con el conjunto de números naturales como sigue:



Consideremos ahora el conjunto de los números naturales pares. ¿Podemos contar el número de elementos? Si tratamos de contar todos los números pares, ¿podemos terminar alguna vez de contar? Este es un ejemplo de un conjunto infinito. Podemos escribirlo como $\{2, 4, 6, \dots\}$. Vemos algunos otros ejemplos de conjuntos infinitos:

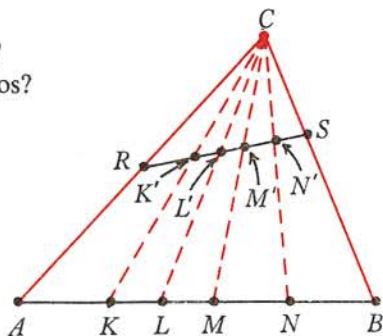
- (1) El conjunto de números impares.
- (2) El conjunto de múltiplos de 3.
- (3) El conjunto de los cuadrados de los números naturales.
- (4) El conjunto de fracciones cuyo numerador es 1.

Ejercicio 1.5

1. ¿Cuáles de los siguientes son conjuntos infinitos?
 - (a) Todos los estudiantes de nuestra escuela.
 - (b) Todos los árboles en el parque nacional Yellowstone.
 - (c) Todos los números naturales mayores que 100.
 - (d) Toda la gente que vive en Asia.
 - (e) El conjunto de números naturales divisibles por 17.
 - (f) El conjunto de moléculas en los gases de la atmósfera que rodean la Tierra.
 - (g) El conjunto de líneas que puedan pasar por un punto dado.
2. Clasificar como finito e infinito cada uno de los siguientes conjuntos:
 - (a) Todos los números pares entre 0 y 2 000 000.
 - (b) Los cuadrados de todos los números naturales.
 - (c) Todos los números naturales mayores que 100 billones.
 - (d) Todos los números naturales menores que 100 billones.
 - (e) La población total de la tierra en 1962.
3. Clasificar cada uno de los siguientes conjuntos como finito o infinito. Expresar todos aquellos cuyos elementos se puedan escribir entre llaves, usando puntos suspensivos cuando sea necesario:
 - (a) Todos los múltiplos de 5.
 - (b) Todos los números naturales que no son múltiplos de 5.

- (c) Todos los múltiplos de 5 que son menores que 75.
 (d) Todos los números naturales que son menores que 6.
 (e) Las edades de los alumnos de tu clase, con aproximaciones al año.
 (f) Los números de las gavetas en tu gimnasio.
 (g) Los granos de una mazorca de maíz.
4. Demostrar que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los Estados de los Estados Unidos ordenados alfabéticamente y los primeros 50 números naturales.
- *5. Explicar cómo se pueden poner en correspondencia “uno a uno” el conjunto de números naturales pares $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ con el conjunto de todos los números naturales
- (a) ¿Son infinitos los dos conjuntos?
 (b) ¿Son equivalentes los dos conjuntos?
 (c) Explicar por qué la proposición siguiente puede usarse como una definición de un conjunto infinito.
- “Un conjunto infinito es aquel cuyos elementos pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los elementos de un subconjunto propio de sí mismo.”*
- (d) Usar la definición anterior para demostrar que el conjunto de los números naturales impares es un conjunto infinito.
- *6. Demostrar como podemos poner en correspondencia biunívoca el conjunto C de números naturales con el conjunto M de los múltiplos de 5.
- (a) ¿Es M subconjunto de C ?
 (b) ¿Es M un subconjunto propio de C ?
 (c) ¿Son C y M conjuntos finitos o infinitos?

- *7. Demostrar que hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto de puntos en la base \overline{AB} del triángulo ABC y el conjunto de puntos en el segmento \overline{RS} , con sus extremos en los lados \overline{AC} y \overline{BC}



- *8. Explicar e ilustrar la proposición:

“Un conjunto infinito no deja de serlo si se suprimen un número finito de elementos.”

Resumen

Veamos lo que hemos aprendido acerca de los conjuntos:

- (1) Un conjunto es una colección bien definida de objetos.
- (2) Los objetos que pertenecen a un conjunto se llaman elementos o miembros del conjunto.
- (3) Un conjunto puede tener cualquier número de elementos.
- (4) Un conjunto que no tiene elementos se denomina el conjunto vacío; los símbolos para el conjunto vacío son $\{ \}$ y \emptyset .
- (5) El conjunto vacío $\{ \}$, no debe ser confundido con el conjunto $\{0\}$, que es un conjunto que tiene un solo elemento, el número 0.
- (6) Si todos los elementos del conjunto A pertenecen al conjunto B , entonces A es un subconjunto de B , o $A \subset B$.
- (7) Cualquier conjunto es un subconjunto de sí mismo.
- (8) El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto.
- (9) Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos.
- (10) Dos conjuntos son equivalentes si y sólo si tienen el mismo número de elementos.
- (11) Dos conjuntos pueden ser equivalentes sin ser iguales; pero si dos conjuntos son iguales, son también equivalentes.
- (12) Un subconjunto propio de un conjunto S es cualquier subconjunto de S que no contiene todos los elementos de S .

FAMILIARIZANDONOS CON LOS NUMEROS

1.7 LOS NUMEROS NATURALES


Otro nombre para el conjunto formado por los números que sirven para contar es el conjunto de números naturales. Podemos agregar siempre 1 a cualquier número natural y se obtiene el siguiente, o sea, el número que lo sigue inmediatamente.

Si escribimos los números naturales en su orden usual, a cada número le sigue otro. Al 7 le sigue el 8; al 369 el 370; al 1000 el 1001, etc. A todo número natural le sigue otro. Piensa ahora en el mayor número natural que puedas nombrar. ¿Puedes pensar en otro número mayor que ese? ¿Cuál le sigue? ¿Te das cuenta que el conjunto de números naturales no tiene fin? Siempre hay un número natural mayor que otro, es decir, ninguno es el más grande. Los matemáticos expresan esta idea diciendo que hay un número infinito de números naturales. Otra forma de expresar la idea es decir que la sucesión de números naturales "continúa indefinidamente".

1.8 NUMEROS Y NUMERALES

Desde el punto de vista histórico sabemos que los números pueden ser representados de muchas formas diferentes. Cuando contamos los votos en una

elección en el salón de clases, se escribe generalmente |||| ; o sea una raya por cada voto; el símbolo anterior es un modo de representar el 7. Los antiguos egipcios usaban figuras para representar números. Por ejemplo, \cap (el hueso de talón) representaba diez y \wp (una cuerda enrollada) representaba 100. A continuación ponemos diferentes formas de representar el "5":

$$\begin{array}{cccccc}
 5 & V & \text{||||} & \text{fünf} & (4+1) \\
 \frac{10}{2} & \text{cinq} & \text{||||} & \text{||||} & (3+2)
 \end{array}$$


Podemos ver que una marca sobre un papel (8, XV, \cap , |||| , etc.) no es un número, puesto que un número es una idea. Es meramente un diseño para representar o simbolizar un número. En este sentido "5" no es un número, sino un símbolo para la idea del 5. Así la idea del 5 puede tener varios símbolos tales como V, $(4 + 1)$, $15/3$, etc., en la misma forma que a un muchacho puede llamársele "Guillermo", "Memo", "Pelirrojo", "chaparro", etc. Al nombre para un número se le llama numeral.

(1) Un numeral es un símbolo o un nombre que se usa para designar a un número; es lo que escribimos.

(2) Un número es un concepto abstracto; es lo que pensamos.

1.9 LOS NUMEROS CARDINALES

Hemos visto que el conjunto de números que sirven para contar $\{1,2,3,4, \dots, 98,99,100, \dots\}$, que contiene un número infinito de elementos, forma el conjunto de los números naturales.

El número (0) es muy útil en matemáticas. Al escribir el numeral 307, el "0" nos dice que el número está expresado sin decenas. ¿Se considera al 0 un número para contar? Al contar los estudiantes en un salón de clases, se señala al primer estudiante diciendo: "este es el estudiante cero"? Desde luego que no contamos en esta forma. El 0 no es un número para contar, y por lo tanto el 0 no pertenece al conjunto de números naturales, tal como lo definimos. Al conjunto formado por el 0 y los números naturales lo llamamos el conjunto de los números cardinales. De aquí en adelante, cuando digamos "número cardinal", queremos significar el 0 ó cualquier otro número natural.

(N del E) No existe uniformidad sobre este término. Otros autores llaman al conjunto de los números para contar más el cero, "*conjunto de los números enteros no negativos*".

En México, con la aprobación de la Secretaría de Educación el cero forma parte del conjunto de los números naturales.

El conjunto de números cardinales = $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Ejercicio 1-6

- ¿Cuál es el número natural que sigue al 99? ¿y al 909? ¿y al 1 003? ¿y al 1 000 020?
- El número natural que sigue al 3 es $3 + 1$. Si representamos por n a un número natural cualquiera, ¿cómo podríamos representar al inmediato siguiente? ¿Cuál es el que sigue al $n + 10$? ¿y al $a + 2$?
- Decir cuáles de las proposiciones siguientes son ciertas y cuáles son falsas. Razonar las respuestas.
 - El conjunto de números naturales contiene un número infinito de elementos.
 - El conjunto de números cardinales es un subconjunto del conjunto de números naturales.
 - Cualquier número puede ser representado exactamente por un numeral.
 - El único número del conjunto de números cardinales que no tiene siguiente es 0.
 - Un numeral es un símbolo y un número es una idea.
 - 0 es el menor de los números naturales.
 - El conjunto de números para contar y el conjunto de números naturales son conjuntos iguales.
 - El conjunto de números cardinales es un conjunto finito.
 - El que sigue a cualquier número cardinal es un número natural.
 - El conjunto de números naturales y el conjunto de números cardinales son conjuntos equivalentes pero no son iguales.
 - El inmediato siguiente a cualquier número natural es un número cardinal.

1.10 LA RECTA NUMERICA Y GRAFICAS DE CONJUNTOS

Cuando pensamos en números, encontramos útil asociarlos con puntos en una recta. Primero, dibujemos una recta y pensemos en ella como un conjunto infinito de puntos. Como la recta “continúa indefinidamente”, tanto a la izquierda como a la derecha, lo sugerimos poniendo una flecha en cada extremo. De esta manera indicamos que no hay ni “un primer punto” ni un “último punto”.

Asociar dos cosas significa hacerlas corresponder, o aparearlas una a la otra.



Podemos asociar algunos de estos puntos con números en la forma siguiente. Escogemos dos puntos convenientes sobre la recta y le ponemos al punto de la izquierda el número 0 y al punto de la derecha el número 1 (ver el diagrama siguiente):



Usamos la distancia entre 0 y 1 como unidad de medida y marcamos esta unidad en forma repetida a la derecha del punto que hemos designado "1" para localizar otros puntos a los que llamaremos 2, 3, 4, etc. Ahora la recta queda así:



Puesto que esta recta podemos extenderla hacia la derecha sin límite, hay un número infinito de puntos que podemos asociar con los números cardinales. Claramente vemos que todo número cardinal puede ser asociado ahora con algún punto sobre la recta. Una recta cuyos puntos los hemos asociado con números se llama recta numérica o escala numérica. En una recta numérica, al número asociado con un punto particular se le llama coordenada de dicho punto. Al punto asociado con un número se le llama gráfica de ese número.

Sobre una recta numérica, podemos comparar (mayor o menor) dos números. Por ejemplo, todos los números asociados con puntos a la *izquierda* de 3 son menores que 3; todos los números asociados con puntos a la *derecha* de 3 son mayores que 3. Esto ilustra el hecho de que el conjunto de números cardinales es un conjunto ordenado. Esto es, podemos ordenar los elementos del conjunto de números cardinales en orden de magnitud.

Recordemos que todo número cardinal puede asociarse con un punto de una recta numérica. Esto nos permite localizar elementos del conjunto de números cardinales sobre una recta numérica. El conjunto de puntos asociados con los elementos de un conjunto de números forma la gráfica del conjunto. Los ejemplos siguientes ilustrarán el método de dibujar la gráfica de un conjunto de números dados.

Ejemplo 1. Dado $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, dibujar la gráfica de A . Dibujamos una escala numérica.



Sobre la recta numérica localizamos los elementos del conjunto y marcamos los