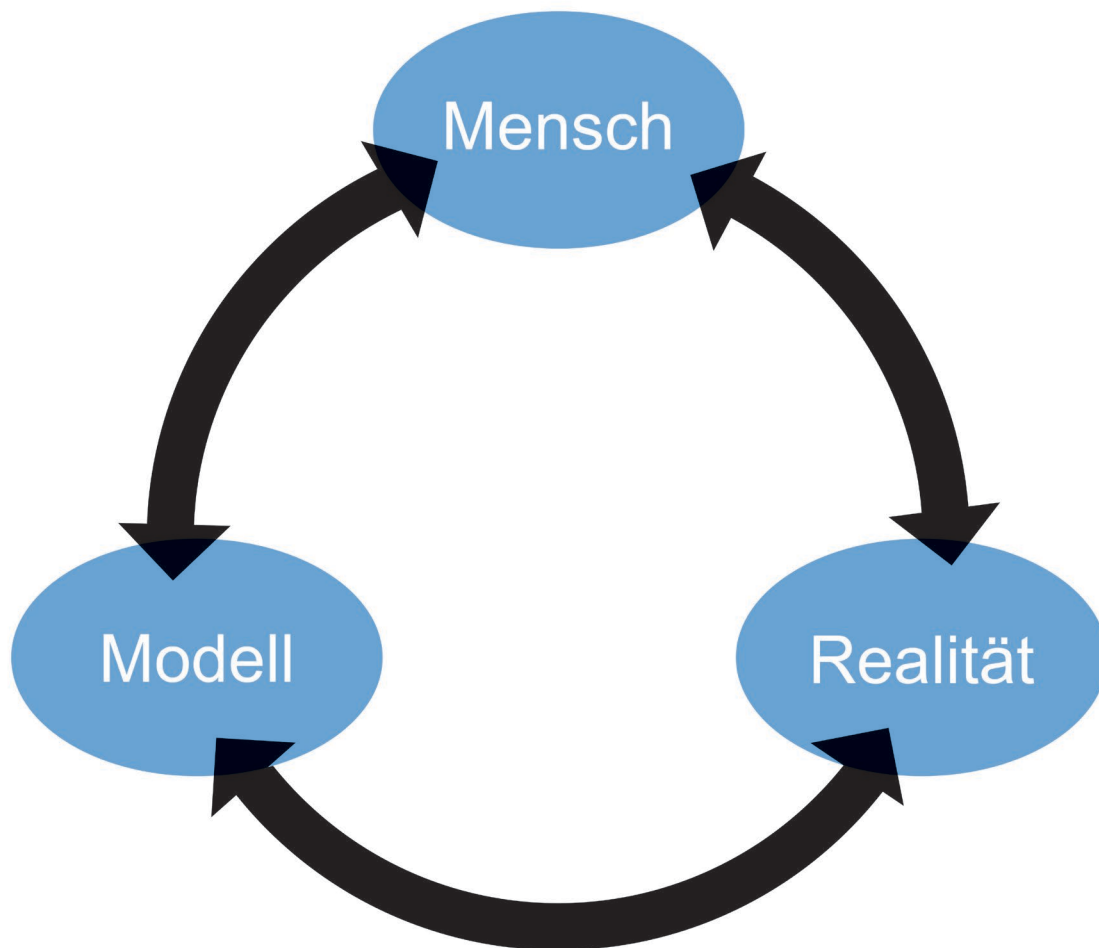


Jürgen Maaß

Modellieren in der Schule

Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des
realitätsbezogenen Mathematikunterrichts
Überarbeitete und erheblich erweiterte Neuauflage des Buches von 2015



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

**Schriften zum Modellieren
und zum
Anwenden von Mathematik**

Herausgegeben von
Stanislaw Schukajlow-Wasjutinski

Band 5

Jürgen Maaß

Modellieren in der Schule

Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des
realitätsbezogenen Mathematikunterrichts

Überarbeitete und erweiterte Neuauflage

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese
Publikation in der Deutschen Nationalbibliogra-
fie; detaillierte Informationen sind im Internet
über <http://dnb.ddb.de> abrufbar

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf
ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in
irgendeiner Form reproduziert oder unter Ver-
wendung elektronischer Systeme verarbeitet, ver-
vielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und
Medien, Ferdinand-Freiligrath-Str. 26
48147 Münster, 2022 – E-Book
ISBN 978-3-95987-202-7
<https://doi.org/10.37626/GA9783959872027.0>

Inhalt	Seite
Vorwort	5
Danksagung	7
Anschließend noch eine Anmerkung zu Bildrechten	9
Anmerkungen zur zweiten Auflage	11
Kapitel 1: Einleitung	13
Mathematisches Modellieren anhand einer konkreten Idee – Smartphone-Tarif	14
Entscheidungen zum Start	18
Erste Modellierung	20
Reflexion der ersten Modellierung	26
Zwischenfazit nach der ersten Modellierung	27
Erste Modellverbesserung im Detail: Taktung	28
Verbessertes Modell: Telefon- + SMS-Gebühren	35
Fazit Smartphoneprojekt	39
Kapitel 2: Motivation	41
Nachhaltig positives Image	42
Besseres Verständnis von Mathematik durch mehr Wissen über Mathematik	43
Zur Perspektive von Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern	46
Kapitel 3: Einige empirische Forschungsergebnisse zum Themenbereich Modellieren im realitätsbezogenen Mathematikunterricht	49
Empirie und Modellbildung	51
Ein Beispiel für eine qualitative Forschung	55
Kapitel 4: Erste Schritte – Wege zum Öffnen des Mathematikunterrichts	61
Herausforderungen beim Stellen von Mathematikaufgaben	62
Zur didaktischen Qualität von Aufgaben – neue Wege öffnen	63
Analyse des Kleingedruckten - Lesekompetenz fördern im Mathematikunterricht?	67
Noch kleinere Schritte? Selbstständiges Problemlösen lernen mit leicht veränderten Schulbuchaufgaben	69
Viele Beispiele für stärkeren Realitätsbezug aus verschiedenen Themengebieten und Schulstufen	71

Kapitel 5: Zweite Schritte: Kleine Modellierungen	77
„Roll It“	81
Welche Route nehmen wir?	82
Getränkeversorgung Elternabend/Schulfest	89
Zimmer einrichten	91
Mäuse im Getreidespeicher	93
Robotersteuerung	98
Goldener Schnitt	102
Beschreibende Statistik: Eine Firmenbilanz positiv oder negativ darstellen	106
Mogelpackungen – Volumen schätzen	110
Schatzkarte	112
Klassenraum anstreichen	113
Hinweise auf andere Ideen und Veröffentlichungen zu kleineren Projekten in der Schule	116
Das Thema Energie im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I	116
Der tropfende Wasserhahn	116
Raumheizung	117
Mathematikunterricht rund ums Auto	118
Geld als Thema für realitätsbezogenen Mathematikunterricht	123
Spiele gewinnen mit Hilfe von etwas Mathematik	123
Das Bewerten von Projektergebnissen	125
Kapitel 6: Zwei Beispiele für größere Projekte	133
Projektphasen	134
Projekt 1: Sportwetten aus mathematischer Perspektive	137
Projektstart: Wie starten wir?	139
Erste Modellierung	142
Zusatzfrage: Wetten Buchmacher mit?	145
Anmerkung zur Unterrichtsmethodik	150
Die Angst des Buchmachers vorm Risiko	155
Eine kleine Modellvariation: Reaktion auf Unerwartetes	157
Modellrechnungen zur Reaktion des Buchmachers	158
Zusätzliche Modellannahmen und Simulationen	167
Didaktische Überlegungen zur Entwicklung des Themas	
Sportwetten im Unterricht	168
Probedurchlauf	170
Projekt 2: Wettbetrug als Thema mathematischer Modellierungen und als Warnung für die Lernenden	173
Abschließende Reflexion: Suchtprävention als Unterrichtsziel?	180

Kapitel 7: Wie modellieren Profis? Und was nützt uns das für den Mathematikunterricht?	183
Magnetresonanztomographie	186
Landwirtschaft	189
Transport und Logistik	195
Hermes: Hitzeverteilung beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre	197
Wege zu Referatsthemen: Max Planck Institute	198
Andere Wege: Geschichte	198
Kapitel 8: Überlegungen zur Theorie des mathematischen Modellierens in der Schule	201
Was ist Realität? Was ist „wahr“?	201
Einige Überlegungen zum mathematischen Modellieren	210
Verantwortung?	218
Exkurs „Mathematik als Technologie“	219
Kapitel 9: Zwischenbilanz	225
Tipps zur effizienten Vorbereitung realitätsbezogenen Mathematikunterrichts	226
Wie finde ich selbst neue Beispiele? Wie finden meine Schülerinnen und Schüler Beispiele?	230
Die Welt mit mathematischen Augen sehen	232
Die Welt mit Hilfe der Mathematik besser verstehen und verändern	235
Zwischenbilanz für den Lernerfolg Ihrer Schülerinnen und Schüler	236
Ausblick	238
Ausklang	240
Literatur	241

Vorwort

Viele gute Gründe sprechen dafür, neben anderen Schwerpunkten auch *realitätsbezogenen* Mathematikunterricht in den Schulen anzubieten. Hier deute ich nur die beiden wichtigsten Gründe an: Auf der einen Seite verspricht der Realitätsbezug eine überzeugende und motivierende Antwort auf die typische Frage von Schülerinnen und Schülern: „Wozu sollen wir Mathematik lernen?“ Auf der anderen Seite gibt es durch entsprechende Ausrichtungen internationaler Vergleichstests, Lehrpläne und Kompetenzkataloge einen spürbaren bildungspolitischen Willen in dieser Richtung. Das Modellieren von Realität und das Simulieren ausgewählter Aspekte der Realität sind selbstverständliche Säulen eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts.

Aus dem Scheitern der „Neuen Mathematik“, die ja auch von einem solchen staatlichen Willen zu einer Neuorientierung des Mathematikunterrichtes vorangetrieben wurde, ist unter anderem zu lernen, wie wichtig es ist, die Lehrkräfte zu überzeugen und zu qualifizieren, selbst einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht halten zu wollen und zu können. Wie kann es gelingen, in der Aus- und Fortbildung von Mathematiklehrkräften in dieser Richtung zu wirken? Dieses Buch ist ein Bestandteil einer Antwort, ein Buch zum Verstehen, Mitmachen, Ausprobieren und zur Motivation, kurz: ein Lernbuch!

Selbstverständlich kann ein einzelnes Buch nicht eine Garantie für die Erfüllung aller Wünsche rund um eine Verbesserung des Mathematikunterrichts sein. Aber es kann mehr erreichen als nur eine Information zum Thema zu liefern. Wie? Dieses Buch weicht vom im Mathematikstudium üblichen Aufbau (Stichwort: Vorratslernen) ab und setzt didaktische Erkenntnisse in der Strukturierung und in der Art des Schreibens sowie des Umgangs mit dem Inhalt um. Das ist keinesfalls üblich; vor vielen Jahren schon kritisierte Heinz Hülsmann im Gespräch ganz zu Recht die Anonymität der Didaktik im Schreiben über Didaktik. In diesem Buch ist offensichtlich, dass Didaktik nicht nur beschrieben, sondern reflektiert zur Aufbereitung des Inhaltes eingesetzt wird.

Danksagung

Ein Buch wie dieses beruht auf vielen Erfahrungen, auf intensiver Beschäftigung mit der Thematik und auf Kooperation mit Kolleginnen und Kollegen und auf ganz konkreter Unterstützung insbesondere beim Korrekturlesen.

Viele Lehrerinnen und Lehrer, Studentinnen und Studenten ermöglichten es mir, Einblick in ihre Sicht eines „guten“ Mathematikunterrichts zu gewinnen, zu dem je nach Ausgangsposition und eigener Erfahrung Modellieren gehört oder auch nicht. In vielen Diskussionen im Rahmen von Fortbildungsveranstaltungen für Lehrerinnen und Lehrer sowie Lehrveranstaltungen zur Fachdidaktik der Mathematik konnte ich etwas darüber lernen, welche Argumente oder Beispiele meinerseits mehr oder weniger überzeugend waren.

Ich bin Gründungsmitglied von MUED (www.mued.de) und ISTRON (<https://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/istron/index.html>) MUED wie „Mathematik-Unterrichts-Einheiten-Datei“ ist eine Gruppe hauptsächlich von Lehrerinnen und Lehrern, die gern realitätsbezogen unterrichten – und auf Tagungen, per Internet und in vielen persönlichen Diskussionen darüber kommunizieren, wie sich was am besten unterrichten lässt. Meine Eindrücke über die Realität des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts beruhen hauptsächlich auf den Erfahrungen der „MUEDen“ Lehrerinnen und Lehrern (die meist voller Energie sind: Mut und Energie dazu ist eine andere Interpretation des Namens).

„Seit 1991 gibt es – als Teil dieses Netzwerkes – eine deutsch-österreichische ISTRON-Gruppe. Sie gibt diese Schriftenreihe heraus. Ihr gehören derzeit etwa sechzig Personen an: Lehrende aus Schulen und Hochschulen, Curriculumsentwickler, Schulbuchautoren, Lehrerfortbilder, Zeitschriftenherausgeber. Die Gruppe hat – ganz im Sinne der Netzwerk-Idee – wechselseitige Verbindungen sowohl mit Lehrenden auf lokaler und regionaler Ebene als auch mit der internationalen ISTRON-Gruppe. Zu den Aktivitäten der Gruppe gehören (neben dieser Schriftenreihe) die Dokumentation und Entwicklung von schulgeeigneten Materialien zum realitätsorientierten Lehren und Lernen von Mathematik sowie alle Arten

von Anstrengungen, solche Materialien in die Schulpraxis einzubringen – durch Lehreraus- und -fortbildung, über Schulbücher und Lehrpläne sowie natürlich vor allem durch direkte Arbeit vor Ort mit Lernenden.“ (<https://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/istron/istron/index.html?p=5.html>) ISTRON eröffnete mir einen wissenschaftlichen Blick aufs Thema.

Mein ganz persönlicher Dank gilt Prof. Dr. Stefan Siller (derzeit Universität Würzburg), mit dem zusammen ich als Autor und Herausgeber von vielen Beiträgen zu der ISTRON Schriftenreihe auch ein wenig zur Entwicklung von ISTRON beitragen konnte. Insbesondere das 6. Kapitel dieses Buches zum Thema Sportwetten und Wettbetrug als Beispiel für ein umfassendes und facettenreiches realitätsbezogenes Projekt beruht auf gemeinsamen Arbeiten, die wir z.T. in ISTRON Bänden veröffentlicht bzw. auf ISTRON Tagungen vorgetragen haben. Ich bin sicher, dass wir auch in Zukunft an diesem und anderen Themenkreisen gemeinsam weiter arbeiten werden. Nicht zuletzt danke ich ihm dafür, dass er das ganze Buch Korrektur gelesen und mir wertvolle Anregungen zur Gestaltung gegeben hat.

Mein Dank für Grafiken zur Modellierungen auf dem Cover und im Exkurs am Ende des Buches gilt Frau Lea Gahleitner; mein Dank für das Textlayout gilt Frau Silvia Kern.

Anschließend noch eine Anmerkung zu Bildrechten

Eine Reihe von Menschen lebt davon, Fotos zu machen, die dann z.B. im Sportteil oder im Lokalteil einer Zeitung oder in einem anderen Medium abgebildet sind oder Grafiken zu erstellen, die gedruckt oder elektronisch gespeichert im Internet zu finden sind. Um die Arbeit dieser Menschen zu schützen, gibt es rechtliche Regelungen für die Wiedergabe von Bildern, Fotos, Grafiken etc. in Büchern, die insbesondere ins Blickfeld gerückt sind, seit diese Bücher als .pdf file im Internet zum Download bereit stehen. In einigen Fällen (z.B. bei Kolleginnen oder Kollegen von Bildungseinrichtungen) freuen sich die Autorinnen und Autoren, wenn ihre Bilder und Grafiken auch in Büchern zu finden sind, in anderen Fällen (konkret: in mehr kommerziellen Zusammenhängen) kostet die Verwendung von Bildern etc. viel Geld.

Am einfachsten wäre es, ganz auf Bilder zu verzichten, aber manchmal sagt ein Bild wirklich mehr als 1000 Worte. In diesem Buch wird deshalb auf kommerzielle Bilder, Grafiken etc. mit einem LINK ins Internet verwiesen; Computergrafiken wurden selbst erstellt und einige Bilder von Kolleginnen und Kollegen mit ihrer ausdrücklichen Erlaubnis verwendet. Wozu die LINKS? Wenn Ihnen die Bildbeschreibung im Text nicht reicht, um die Argumentation zu einzu„sehen“ oder Sie einem Hinweis für ein mögliches Arbeitsblatt für so beachtenswert halten, dass Sie ihm nachgehen wollen, können Sie leicht dem LINK folgen. Nehmen wir als Beispiel dafür ein Arbeitsblatt zum Goldenen Schnitt, das ein Bild des Leipziger Rathauses zur Analyse vorschlägt. Bilder vom Rathaus gibt es viele; ein eigenes Bild haben wir leider nicht.

Anmerkungen zur zweiten Auflage

Zunächst danke ich dem WTM - Verlag und insbesondere Martin Stein persönlich für die Ehre: Die Einladung, zu einem Buch eine neue Auflage zu schreiben, ist eine Auszeichnung für das Buch!

Was habe ich geändert? Was ist neu?

Ich habe mich bemüht, den Gebrauchswert dieses Buches zu erhöhen, indem ich (hauptsächlich in Kap. 5) eine Vielzahl von Unterrichtsbeispielen, die ich an anderer Stelle veröffentlicht habe, in diesem Buch kurz skizziere und mit einem LINK darauf verweise, wo die Langversion zu finden ist.

Auf Wunsch einiger Leserinnen und Leser habe ich den Theorieteil ausgebaut. Aus einem Exkurs in Kap. 8 wird das neue Kap. 8. Inhaltliche Basis dafür waren auch Diskussionen mit I. Grafenhofer (vgl. Maaß, J., Grafenhofer, I. 2019) und S. Götz (vgl.: Maaß, J., Götz, S. 2021) im Zusammenhang mit gemeinsamen Beiträgen.

Kapitel 1: Einleitung

Was ist überhaupt Modellieren im realitätsbezogenen Mathematikunterricht? Weshalb soll ich als Mathematiklehrerin oder Lehrer realitätsbezogenen Mathematikunterricht halten? Wie geht das? Was kann ich tun, wenn meine Schülerinnen und Schüler das nicht können oder wollen? Wie fange ich einfach an? Was sind Beispiele für größere Unterrichtseinheiten? Wo finde ich mehr Beispiele?

Wir beginnen mit einer kurzen Beschreibung dessen, was in der Mathematikdidaktik als „Modellierungskreislauf“ bekannt ist, der Weg vom Wunsch, etwas besser zu verstehen oder zu verändern über die Auswahl der wichtigen Informationen und Ziele über die Verwendung von Mathematik zum Rückbezug auf die Ausgangssituation und ein mehrmaliges Beschreiten dieses Weges bis hin zum erwünschten Abschluss oder der Einsicht, dass es so mit vertretbarem Aufwand nicht geht. Im achten Kapitel dieses Buches finden Sie mehr zum theoretischen Hintergrund zum Thema Modellierung.

Am Anfang steht eine Entscheidung: der Wunsch, etwas zu erkennen, besser zu verstehen, zu verändern, schneller zu erreichen, mit wenig(er) Aufwand zu steuern oder Ressourcen möglichst effizient einzusetzen können als Motivation dienen. Nachdem wir einen Aspekt der Realität ausgewählt haben, den wir genauer mit mathematischen Methoden betrachten wollen und können, suchen wir Daten und Gesetzmäßigkeiten, mit denen diese Daten verknüpft sind. Zu Beginn sind meist nicht alle notwendigen Daten vorhanden und nicht immer ist klar, in welcher Weise die Daten mit Hilfe des mathematischen Werkzeugkastens strukturiert werden können bzw. durch einen mathematischen Zusammenhang dargestellt oder beschrieben werden können.

Im ersten Durchlauf starten wir deshalb oft mit Schätzungen und sehr einfachen Mathematisierungen. Es werden zunächst (mathematische) Modelle erstellt von denen bekannt ist, dass sie keinesfalls alle Parameter berücksichtigen. Trotzdem werden wir schon bald Berechnungen anstellen, damit wir sowohl das Ergebnis als auch den Weg dahin interpretieren können. Die Interpretation wird uns in verschiedene Richtungen führen. Die ersten Ergebnisse führen meistens zu Kopfschütteln: entweder ist das

Ergebnis nicht zufriedenstellend oder es drängt sich der Eindruck auf, dass weitere Bemühungen um die aufgegriffene Fragestellung nicht lohnenswert sind. Üblicherweise sind wir mit den Ergebnissen nicht zufrieden und können – hoffentlich! - aus der Interpretation des ersten Anlaufes schließen, wie weiter vorgegangen werden soll.

Typische Fragestellungen, die daraus resultieren, sind Fragen nach genaueren oder zusätzlichen Daten, nach komplexeren mathematischen Werkzeugen oder die Frage nach Präzisierung der Fragestellung bzw. der Zielsetzung. Sobald eine oder mehrere dieser Fragen durchdacht sind, wird ein zweiter Versuch durchgeführt, dessen Ergebnis wiederum interpretiert werden muss.

Analog zu dem ersten Durchgang müssen wir entscheiden, ob und wie es weiter geht. Nach einigen Durchgängen haben wir mit genügend großer Genauigkeit herausgefunden, was wir wissen wollten oder merken, dass wir trotz aller Bemühungen nicht weiterkommen, weil z. B. bessere Daten nicht zugänglich sind, mathematische Darstellungen unsere kognitiven Fähigkeiten übersteigen oder wir schlicht den Eindruck haben, dass weitere Bemühungen sich nicht mehr lohnen, weil der Arbeitsaufwand zu groß wird.

Das ist jedoch das tägliche Brot eines Mathematikers bzw. einer Mathematikerin in Industrie und Wirtschaft und zeigt, dass viele Details erst (mühsam) erarbeitet werden müssen. Darauf wollen wir im nächsten Schritt genauer eingehen und Sie einladen, eine erste (einfache) Modellierungsaufgabe mit uns zu bearbeiten: Suchen sie ein aktuelles Werbeangebot für einen *Smartphonevertrag* und überprüfen Sie, ob dieser tatsächlich so günstig ist, wie es in der Werbung vorgegeben wird.

Mathematisches Modellieren anhand einer konkreten Idee – Smartphone-Tarif

Am Anfang steht die Idee, ein vorhandenes Smartphone (oder ein neues Smartphone mit noch mehr technischen Möglichkeiten) möglichst preisgünstig nutzen zu können. Unterrichtseinheiten zu diesem Beispiel sind mehrfach publiziert worden (z.B. Fries u.a. 2004 oder

http://www.blick.it/angebote/modellmathe/ma0219_arb4.htm). Wir bereiten dieses Thema interaktiv auf. Viele Schritte sind bereits vorgegeben. Zu Beginn des mathematischen Modellierens sind jedoch solche Ideen in der Realität noch nicht vorhanden. Das wollen wir uns an einer ersten Aufgabe klar machen:

Suchen Sie sich ein aktuelles Werbeangebot genauer an. Falls Sie schon aus Prinzip keine Werbung zur Kenntnis nehmen, schauen Sie bitte ins Internet, z.B. auf eine Seite wie <http://www.Smartphone-tarife.at/> oder <http://www.Smartphone-tarifvergleich-xxl.de/> für Deutschland. (für Österreich: <http://www.mobilfunkrechner.de/akwien/pdf/mobilfunknetz.pdf>)

Sind Sie – wie wir – erstaunt über die Fülle an Informationen und Details in den Angeboten? Dann brauchen Sie ebenso wie wir und später ihre Schülerinnen und Schüler einen *Filter* für die Informationsflut. Es sollen möglichst wenige und klare Kriterien gefunden werden, um all die Informationen in die zwei Kategorien „wichtig“ und „unwichtig“ zu sortieren.

Deshalb werden Sie uns vermutlich zustimmen, wenn wir an dieser Stelle mit Nachdruck darauf hinweisen, dass am Beginn einer gelungenen Modellierung eine möglichst gute Präzisierung der Zielsetzung stehen soll. Je vager die Ziele sind, desto unklarer ist, welche Informationen zur Erreichung benötigt werden. Eine möglichst präzise Zielsetzung hilft sehr bei allen Entscheidungsfragen, die im Laufe der Arbeit auftreten: Soll dieser Aspekt auch noch berücksichtigt werden? Muss nicht darauf geachtet werden, dass...?

Nun werden Sie vielleicht einwenden, dass Forschung (und Modellierung ist immer ein Erforschen des Unbekannten) immer versucht, etwas noch nicht Bekanntes herauszufinden. Deshalb kann man a priori auch nicht immer sagen, wo das Ziel zu finden ist. Oder noch schärfer: Wenn man das Ziel vorher genau kennt, ist die halbe Arbeit schon geleistet. Dieser Einwand trifft fast zu!

Der Forschungsprozess im Allgemeinen und der Prozess der

mathematischen Modellierung im Besonderen haben eine wichtige Eigenschaft, die in den nachträglichen Berichten über Erfolge oft nicht erwähnt wird: Sie gehen schrittweise vor, auf eine erste Zielsetzung folgen erste Schritte. Aus den Erfolgen und Misserfolgen auf dem zunächst eingeschlagenen Weg soll und kann gelernt werden.

Ein Teil des Lernprozesses ist die Möglichkeit, aufgrund bisher erworbenen Wissens über die Zielsetzung etwas mehr und präzisere Aussagen zu treffen. Gerade im Bereich der technischen Entwicklung gibt es immer wieder Grenzen (durch Naturgesetze, Materialeigenschaften etc.), die so nicht überschritten werden können.

In diesem fiktiven Smartphoneprojekt bestimmen Sie Ihre eigene Zielsetzung! Wollen Sie für das Telefonieren möglichst wenig Geld ausgeben? Wollen Sie für eine einigermaßen genau bestimmte Anzahl von Gesprächen weniger als bisher ausgeben? Wollen Sie zusätzliche Dienste in Anspruch nehmen? Wollen Sie immer erreichbar sein und häufig telefonieren oder brauchen Sie nur eine Verständigungsmöglichkeit für Notfälle? Nutzen Sie ohnehin eine Flatrate fürs Telefonieren und suchen hauptsächlich einen günstigen Tarif für Streaming?

Haben Sie ein wenig über Ihre Ziele nachgedacht? Schreiben Sie bitte auf, was Sie sich dazu überlegt haben. Vergleichen Sie diese Aufzeichnung später mit dem (vorläufigen) Resultat.

Nun geht es direkt zur zweiten Aufgabe:

Überlegen Sie bitte, welche Daten Sie brauchen, um einen beworbenen oder aus dem Internet herausgewählten Tarif mit Ihrem aktuellen Tarif zu vergleichen. Notieren Sie dazu bitte Stichworte.

Auf den ersten Blick mag es mühsam erscheinen, Notizen zum Stichwort „Daten zu meiner aktuellen Smartphone-Nutzung“ aufzuschreiben, aber diese aktive Mitarbeit an einem ersten konkreten Beispiel in diesem Buch soll ja Ihnen (und ganz analog Ihren Schülerinnen und Schülern) zeigen, wie sich das abstrakt skizzierte Modellieren an einem

relevanten Beispiel tatsächlich durchführen lässt. Die Notizen vom Start ab sind sehr nützlich, wenn zwischendurch und abschließend darüber nachgedacht werden soll, was bisher auf welchem Weg erreicht wurde und was daraus für diese oder andere Modellierungen gelernt werden kann.

Haben Sie Ihre letzte Smartphone-Rechnung gefunden? Dort steht neben dem Endbetrag auch noch mehr oder weniger detailliert aufgelistet, welche Gespräche in welche Tarifzonen Sie geführt haben, wie viele SMS Sie in welche Tarifzonen gesendet haben und wie viel Sie dafür zahlen, dass Sie andere Dienste (z.B. Internet) in Anspruch genommen haben. Nun wird es etwas mühsamer: Haben Sie im letzten Monat ihr Smartphone so genutzt wie immer? Anders gefragt: War es ein Monat, in dem Sie für alle Nutzungsarten durchschnittliche Kosten haben? Um Ihre bisherige Smartphone-Nutzung korrekter zu erfassen, ist es sinnvoll, einen längeren Zeitraum zu betrachten. Wie lange zurück sollen Sie Smartphone-Rechnungen suchen? Das ist Ihre Entscheidung! Wollen Sie Ihre Aufmerksamkeit auf die alltägliche Nutzung konzentrieren? Dann reichen ein paar Monate. Wollen Sie auch im Urlaub besonders günstig telefonieren oder per Internet die Spiele einer Sportart verfolgen oder Filme bzw. Serien schauen? Hier hilft Ihnen jetzt die Formulierung ihrer Ziele. Lesen Sie bitte nach, was Sie notiert haben! Haben Sie die Zielsetzungen hinreichend präzise formuliert? Falls „ja“, dann haben Sie jetzt Entscheidungskriterien. Falls „nein“, dann verstehen Sie jetzt vermutlich besser, weshalb wir Sie ersucht haben, zunächst über die Zielsetzung genauer nachzudenken und ergänzen Ihre Ziele für dieses Smartphone-Projekt.

Im nächsten Schritt wollen wir ihr Interesse auf weitere Ideen lenken: nutzen Sie das Smartphone in Zukunft mit demselben oder einem anderen Vertrag mag es sein, dass es absehbare Gründe für ein geändertes Nutzungsverhalten gibt. Das ist nicht leicht zu prognostizieren, meinen Sie? Dann haben Sie eine typische Problematik für Modellrechnungen entdeckt. Die Zukunft ist nicht leicht vorher zu sagen. Die Daten aus der Vergangenheit hingegen lassen sich oft - wenngleich mit einiger Mühe - ziemlich gut zusammenstellen. Die Daten aus der Zukunft kennen wir nicht exakt, sonst gäbe es auch kein Glücksspiel wie Lotto!

Wenn Sie die Entscheidung für ein bestimmtes Angebot in Sachen

Smartphone nicht nur auf Annahmen beruhen lassen wollen, und davon ausgehen, dass alles so bleibt wie es ist, müssen Sie ein wenig Kreativität an den Tag legen und ein mögliches (zukünftiges) Benutzerverhalten festlegen: Wie soll es werden?

Schreiben Sie bitte auch dazu Stichworte auf, z.B.: Wenn ich ein neues Smartphone bekomme, möchte ich mehr als bisher das Internet am Smartphone nutzen, insbesondere für Mails oder Videos.

Wenn Sie bis hier aktiv mitgearbeitet haben, wissen Sie nun etwas mehr über sich als Smartphone-Nutzer, ihre Wünsche an einen für Sie optimalen Tarif und ihre Erwartungen an Ihr künftiges Nutzungsverhalten. Mit etwas Optimismus lässt sich das Resultat als typisch für den Versuch einer Mathematisierung charakterisieren: Ein Aspekt des alltäglichen Verhaltens wird analysiert – und vielleicht hat diese Analyse auch Folgen für das rationale Verhalten bzw. Einfluss auf Entscheidungen, die aufgrund der Analyse gefällt werden können. Wir kommen auf diesen Punkt zurück!

Vielleicht fragen Sie schon seit einiger Zeit mit wachsender Ungeduld: Was hat das Mathematik zu tun? Ich habe noch gar nichts berechnet!?

Mathematik ist weit mehr als Berechnungen durchzuführen (vgl. Fischer, Malle, 1985). Zu jedem realen Projekt gehört vorab eine gründliche Überlegung bzgl. der Zielsetzung, eine Suche bzw. Zusammenstellung und Analyse der Daten und eine Modellierung. All das findet wie angedeutet nicht nur einmal und endgültig, sondern in einem fortlaufenden Prozess statt, der aufgrund der schon gewonnenen Ergebnisse und ihrer Interpretation im Lichte der Zielsetzung und der gesammelten Daten hoffentlich schrittweise zum Ziel führt. All das ist (auch) Mathematik – übrigens auch in den Formulierungen der Schulcurricula.

Entscheidungen zum Start

Was nun? Für den Anfang ist das Arbeiten mit allen Informationen über Smartphone-nutzung doch recht kompliziert. Wir empfehlen, zunächst nur

über die am meisten genutzte Variante nachzudenken, beispielsweise die Verbindungskosten für Telefongespräche in der am häufigsten angewählten Zone oder die monatlichen Gigabyte beim Streaming.

Wir laden dazu ein, Argumente für und gegen eine solche radikale Einschränkung für den Beginn zu sammeln.

Das zentrale Gegenargument ist offensichtlich: Sie nutzen Ihr Smartphone vielfältig! Wenn Sie eine Änderung Ihres Vertrages in Betracht ziehen, dann nur in dem Fall, dass die Rechnungssumme insgesamt kleiner wird (und die Netzabdeckung mindestens so gut wie bisher ist etc.). Was hilft es, wenn die Verbindungskosten für Telefongespräche in der am meisten angewählten Zone geringer werden, die SMS oder sonstigen Dienste aber deutlich teurer?

Das zentrale PRO-Argument ist eher didaktisch: So geht es gerade am Beginn der eigenen Modellierungserfahrung viel einfacher – vermutlich für Sie und sicher für Ihre Schülerinnen und Schüler. Falls Sie dennoch direkt mit erhöhter Komplexität starten wollen, dürfen Sie das gerne tun: Wir holen Sie nach ein paar Modellierungsschritten (Reflexion der ersten Modellierungen) wieder ein.

Bevor wir mit dem ersten Modellierungsschritt beginnen, weisen wir ausdrücklich darauf hin, wie unüblich es ist, dass Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht über den Verlauf des Unterrichts nachdenken, ihre Arbeit planen und über einzelne Schritte entscheiden, bevor sie etwas ausrechnen. Das wird von Lehrerinnen und Lehrern nicht selten beklagt, dafür wird es jedoch (eher) selten geübt. Meist kommt die Lehrperson mit einem überlegten und vorgefertigten Plan für die Schulstunde ins Klassenzimmer, erläutert neuen Stoff, wiederholt bereits geübte Algorithmen oder bestimmt, dass eine ausgewählte Aufgabe aus dem Schulbuch gelöst werden soll. Diskussionen über den Lehrplan, die Abfolge der zu behandelnden Themengebiete oder die Auswahl der zu lösenden Schulbuchaufgaben sind dabei nicht erwünscht, werden als Zeitverschwendung abgetan, und stellen in der Regel auch eine Überforderung der Schülerinnen und Schüler dar.

Ganz anders ist die Situation im realitätsbezogenen Mathematikunterricht, wenn ein erstes Modell gebildet und dazu Entscheidungen getroffen werden sollen. Weshalb ist die Situation hier anders? Der wichtigste Punkt ist die unmittelbare Relevanz der Entscheidung für die eigene Tätigkeit; die Klasse denkt darüber nach und entscheidet gemeinsam, was die Schülerinnen und Schüler selbst sinnvoll als nächstes tun. Die Entscheidung betrifft sie unmittelbar selbst und ist kein folgenloses Urteil der Arbeit einer Curriculum Kommission bzw. deren Umsetzung durch das zuständige Ministerium (wie bei einer Diskussion über das Curriculum). Wenn das Thema des Unterrichts – so wie in diesem Fall bei Smartphonetarifen – so gewählt wurde, dass Schülerinnen und Schüler aufgrund ihrer Lebenserfahrung in der Lage sind, kompetent mitzureden, dann sollen sie auch die Gelegenheit dazu erhalten (vgl. Heymann, 1996). Wenn sie in solchen Fällen lernen, selbstbestimmt zu handeln, trägt der Mathematikunterricht zur Erreichung der entsprechenden Kompetenz bei. Selbstverständlich dürfen und sollen die Lehrenden auch hier die Lernenden unterstützen. Diese kann in Form einer Beratung im Hinblick auf Entscheidungsmöglichkeiten (Gibt es ein mathematisches Verfahren, so etwas zu berechnen? Gibt es dafür eine Formel?) als auch im Hinblick auf Entscheidungsverfahren (einfache Abstimmung ist bekanntlich nicht immer das ideale Verfahren) bestehen.

Erste Modellierung

Betrachten Sie bitte Ihre Smartphonerechnung oder eine Werbung für einen anderen Anbieter oder eine zur Verfügung stehende Tarifinformation. Was fällt Ihnen mit einem mathematisch geschulten Blick auf?

Wir sehen drei Typen von Tarifen für die Verbindungskosten für Telefongespräche in der am meisten angewählten Zone, eine Flatrate (es kostet unabhängig von den tatsächlich geführten Gesprächen immer eine feste Summe pro Monat, z.B. 17 Euro), einen von Null ausgehend gleichmäßig steigenden Preis (etwa 10 Cent pro Minute) oder eine Mischung von Grundkosten und gleichmäßig steigendem Tarif (etwa 10 Euro monatlich plus 3 Cent pro Minute). Wir haben diese Tarife für diesen Text

frei erfunden, weil wir natürlich nicht wissen könne, wie für Sie relevante Tarife gerade dann angeboten werden, wenn Sie diesen Text lesen.

Mathematisch gesehen sind das alles *lineare* Funktionen. Wenn Ihnen das auch aufgefallen ist, denken Sie sicher ebenso wie wir an grafische Lösungsverfahren oder an das Lösen linearer Gleichungen. Wenn Ihre Schülerinnen und Schüler gerade (z.B. numerische) Lösungsverfahren geübt haben, erkennen sie dies vielleicht auch selbst und benötigen weniger Hilfe. Wir geben im Folgenden etwas mehr Hilfe mit dem Blick auf jene Schülerinnen und Schüler, die Ihnen als Lehrkraft für mehr Hilfe dankbar sind.

Für Schülerinnen und Schüler ist es ungewohnt, aus einer mehr oder weniger umfangreichen Tariffinformation, aus einer (Monats-)Rechnung oder aus einem Werbetext Daten und Informationen herauszulesen, die benötigt werden. Textaufgaben in Schulbüchern zeichnen sich durch eine besonders präzise Sprache aus und enthalten i. d. R. genau die zur Lösung einer Aufgabe benötigten Angaben in einer Form, die eine exakte „Übersetzung“ von Aufgabentext zu mathematischer Beschreibung bzw. Formel oder Gleichung ermöglichen. Diese präzisen und genauen Texte gibt es nur in Schulbüchern. Wenn Schülerinnen und Schüler Mathematik fürs Leben lernen sollen, müssen sie auch lernen, die für sie wichtigen Informationen aus einem weniger präzisen Alltagstext herauszufiltern. Es steht die Frage nach dem, was man wissen will im Fokus!

Schreiben Sie bitte auf, mit welcher Fragestellung bzw. welchem Informationswunsch Sie den Werbetext bzw. die Internetseite studieren wollen.

Nach der vorhin getroffenen Entscheidung, uns zunächst auf Verbindungskosten für Telefongespräche in der am häufigsten angewählten Zone zu konzentrieren, suchen wir nun genau diese Tariffinformation. Dazu notieren wir weitere Auffälligkeiten bei der Informationssuche. Diese können als Hinweis für mögliche Verbesserungen unserer Modellierung in weiteren Arbeitsschritten verwendet werden.

Welche Tariffinformation haben Sie gefunden? Wir haben aus

verschiedenen Quellen die folgenden drei Typen gefunden:

Flatrate 17 Euro monatlich

10 Cent pro Minute ohne Grundgebühr

3 Cent pro Minute plus 10 Euro Grundgebühr pro Monat

Haben Sie Stichworte für mögliche Verbesserungen der Modellierung gefunden? Wir haben notiert:

1. Taktung (60 oder 30 Sekunden)
2. Fixkosten zu Beginn des Vertrages (Freischaltung, Nummer übertragen, Aktivierung – je nach Anbieter)
3. Neues Smartphone oder nicht?
4. Bindungsdauer?
5. Netzabdeckung

Diese Stichwortliste legen wir zunächst zur Seite. Selbstverständlich können Sie aus den gefundenen Tarifangaben unmittelbar mathematische Zusammenhänge erstellen und ggf. darstellen.

Falls Lernende Hilfe bei der Mathematisierung benötigen, schlagen wir vor, ganz traditionell eine Wertetabelle und eine Grafik zu erstellen. Eine Aufteilung in Kleingruppen (von max. 4 Personen) ist aus methodischen Überlegungen sicherlich hilfreich. Sie können im Laufe der Gruppenarbeit erkennen, wo allfällige Fragen und Probleme vorhanden sind bzw. was bereits gut gelingt.

Berechnet für die drei Tarife die monatlichen Kosten bei einer Gesprächsdauer von 1, 2, 3, 4 ...bis 10 Stunden im Monat, tragt die Werte in eine Wertetabelle ein und zeichnet die Werte in eine Grafik!

Wir haben eine Tabellenkalkulation verwendet und folgende Wertetabelle erzeugt: