Los problemas de matemática en la práctica didáctica

Bruno D´Amore

MAGISTERIO
EDITORIAL

Los problemas de matemática en la práctica didáctica

Bruno D´Amore

MAGISTERIO
EDITORIAL

Los problemas de matemática en la práctica didáctica

Bruno D'Amore

Prefacios de
Gérard Vergnaud y de Silvia Sbaragli

Título: Los problemas de matemática en la práctica didáctica
Autor: Bruno D'Amore
ISBN:978-958-20-1420-9
Primera Edición: 2021
Diagramación y portada: Jonnatha Moncaleano Ovalle
Traducción: Diana Rocío Pérez Blanco

Diagonal 36 bis No. 20-70
Celular: (+57) 312 4354489
Bogotá D.C Colombia
www.magisterio.com.co
info@magisterio.com.co

Los destinatarios de este libro son los docentes de Matemática, cuyos alumnos tienen dificultad para resolver los problemas que les son planteados.

La investigación en Didáctica de la Matemática ha reflexionado mucho sobre cuáles podrían ser los factores que determinan este problema. Muchas de estas dificultades son de carácter psicológico y otras de carácter didáctico. En este libro se hace un largo y detallado análisis de este tipo de estudios, para mostrar a los docentes el origen y la causa de las dificultades de los alumnos. Se proponen varios ejemplos y muchas soluciones para ayudar a los alumnos superar esta dificultad.

Este libro está dedicado a los padres que ven a sus hijos sufrir al momento de resolver problemas de Matemática; es una fuente densa de ideas para ayudar a sus estudiantes y a los profesores en esta difícil pero necesaria tarea.

Este libro está destinado a los cultores de Didáctica de la Matemática, estudiantes universitarios de maestría y de doctorado, quienes desean profundizar en la bibliografía y los estudios críticos sobre este el tema, siendo esto este uno de los argumentos más estudiados a nivel mundial. La selección bibliográfica es notable y las citaciones son profundas y oportunas, clásicas y contemporáneas; tanto en el campo psicológico como en el campo didáctico

Bruno D'Amore es doctor en Investigación (PhD) en Mathematics Education; en 2013 la Universidad de Chipre le otorgó el doctorado de Investigación (PhD) honoris causa en Social Sciences and Education. Actualmente es profesor experto titular catedrático en el Doctorado Interinstitucional en Educación (DIE) (énfasis matemático), en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, donde dirige tesis de doctorado y dicta seminarios para los estudiantes de doctorado.

https://es.wikipedia.org/wiki/Bruno_D'Amore

Wikipedia, The Free Encyclopedia. Bruno D'Amore. Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Bruno_D'Amore

La página web de: Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla. Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla. Recuperado de http://www.incontriconlamatematica.net/sitoufficialebm/

Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica e Divulgazione della

Matematica. Bruno D’Amore. Recuperado de https://rsddm.dm.unibo.it/chi-siamo/bruno-damore/
Incontri con la Matematica. Recuperado de http://www.incontriconlamatematica.org/ita/organizzazione.php

Dedico esto libro a Martha que discutió cada palabra conmigo
con inmensa competencia, cultura y disponibilidad
poniendo preguntas terribles que me obligaban a pensar por días
el autor

Contenido

Los problemas de matemática en la práctica didáctica

Prólogo

Prefacio

Premisa

1. Problemas, ejercicios y aprendizaje
1.1. Problemas y ejercicios
1.2. Resolución de problemas, formación de conceptos y “teoremas en acto”
1.3. *Problem solving* y *problem posing*
1.4. *Problem solving, problem posing* y descubrimiento
1.5. Tipos de aprendizaje
1.6. Aprendizaje operativo
1.7. Jerarquías de aprendizaje y problemas de “inmersión total”

2. El papel fundamental de la motivación
2.1. La motivación
2.2. Motivación y resolución de problemas
2.3. Motivación, volición y afectividad
2.4. El contrato didáctico en el laboratorio

3. La intuición
3.1. La capacidad de resolver problemas con un golpe de intuición
3.2. Entonces, ¿qué es la intuición?
3.3. ¿Se puede educar la intuición?

4. Aprendizaje, desarrollo y problemas
4.1. Relación entre desarrollo y aprendizaje 1
4.2. Relación entre desarrollo y aprendizaje 2

4.3. Relación sobre desarrollo y aprendizaje 3
4.4. Relación entre desarrollo y aprendizaje 4
4.5. Capacidades iniciales, condiciones del aprendizaje y problemas
4.6. ¿Es útil hacer varias veces el mismo ejercicio?
4.7. Sobre los aprendizajes de base que se poseen con anterioridad

5. La resolución de problemas: actitudes al respecto
5.1. Tiempo de latencia y actitud de los profesores
5.2. Estudios sobre las estrategias de resolución
5.3. Resolución de un problema y formas de aproximación al mismo
5.4. Otras condiciones al respecto

6. Problemas
6.1. Introducción
6.2. Problemas
6.3. Más sobre los problemas

7. Problemas y lenguaje
7.1. La importancia de los aspectos lingüísticos
7.2. Una experiencia sobre el texto de los problemas
7.3. Una clasificación semántica y clásica de los problemas verbales

8. Modelos, campos conceptuales y resolución
8.1. Siempre «5+7», pero (...)
8.2. El campo conceptual de las estructuras multiplicativas
8.3. Otras clasificaciones de los problemas de multiplicación y división
8.4. Números-medida y números-transformación
8.5. Modelos intuitivos en la multiplicación y en la división

9. Conflictos y obstáculos antes de la resolución
9.1. ¿En qué fase se manifiesta el fracaso?
9.2. Modelos mentales de las operaciones aritméticas básicas
9.3. Un primer acercamiento al problema de la metacognición

10. Conflictos y obstáculos durante la resolución
10.1. Leer el texto del problema

10.2. Representar el texto del problema
10.3. Cómo transformar la solución de un problema en un algoritmo

11. Procesos metacognitivos y actividades de reflexión
11.1. Importancia de las reflexiones sobre su propio trabajo
11.2. Redefinición de un problema, creación de la pregunta
11.3. Problemas y fórmulas

12. Modelos en y de los procedimientos de resolución
12.1. Modelos adecuados y modelos formados
12.2. Modelos normativos y modelos descriptivos
12.3. Cómo ayudar a imaginar modelos
12.4. Modelos para la didáctica de los problemas
12.5. Modelos mentales

13. *Problem solving*
13.1. Las fases y las condiciones "externas"
13.2. Las condiciones internas y las diferencias individuales
13.3. Enfoques psicológicos sobre el estudio y la investigación en el *problem solving*. La Gestalt
13.4. La contribución de Polya
13.5. Enfoque psicométrico y conductista
13.6. El enfoque conocido como informático y la teoría de las redes semánticas
13.7. Imágenes y representaciones mentales
13.8. Conclusión (...) circular

Referencias bibliográficas

Prólogo

El aprendizaje de la matemática se ha convertido en una necesidad para todos los jóvenes de hoy. Los retos a los cuales son llamadas las sociedades contemporáneas han llevado progresivamente a elevar el nivel de la educación hasta los 16 años, después hasta los 18 y aún más allá. En esta educación la parte de la ciencia, de la técnica y de la matemática no ha hecho más que crecer. En dos generaciones se pasó del modelo de la escuela primaria al de la educación superior: ya no basta con saber leer, escribir y hacer cuentas, es oportuno saber expresarse oralmente y por escrito sobre temas complejos y en condiciones de discusión delicadas; es oportuno también comprender técnicas sofisticadas, para las que se requieren conocimientos matemáticos concernientes a las grandes estructuras de la aritmética, el álgebra, el análisis y la geometría, que hace un siglo estaban reservadas un estrecho círculo.

Así, es cada vez menos posible, y será imposible para un alumno de los años futuros, afirmar que la matemática no tiene nada que ver con nosotros directamente.

El fracaso en matemática no es una fatalidad. Cuando se enseña bien, la matemática interesa a todos los alumnos; no se llegará al punto de darles la vocación de convertirse en matemáticos naturalmente, pero sí lo suficiente para darles la fuerza y el deseo de obtener la cultura de base que es necesaria hoy en día. La didáctica y la psicología de la matemática nacieron a partir de la preocupación por entender mejor las dificultades encontradas por los alumnos y por ayudarlos a superarlas. La competencia profesional de un profesor no radica solo en el conocimiento de su materia o de las materias que enseña: radica también en su cultura general y en sus conocimientos en cuanto a la psicología, la pedagogía y la didáctica.

Estoy sorprendido por la importancia que Bruno D'Amore, un matemático, ha querido conferir, en esta obra, a cuestiones que no se refieren de hecho a la matemática sino a la psicología. Él consagra páginas muy interesantes a la teoría de la Gestalt, a las teorías del aprendizaje y del desarrollo cognitivo, a la psicología de la resolución de problemas. Y da al mismo tiempo un impresionante número de ejemplos que serán de utilidad para los profesores y quizás para algunos padres de familia. Leyendo el manuscrito, me sorprendí por la variedad y la riqueza de las fuentes de información a las que Bruno D'Amore cuidadosamente hace referencia. Este hecho hace de su obra a su vez una obra de referencia y una introducción a aquellos campos del conocimiento cuales la didáctica de la matemática y la psicología de la matemática.

No hay dominios que la ciencia no pueda penetrar, incluidos aquellos en los cuales el objeto de la investigación parece complejo, variable y poco perceptible. Es éste el caso del aprendizaje de la matemática. Hoy en día no es presuntuoso decir que se empieza a tener una idea relativamente clara del modo en el cual los niños aprenden y comprenden la matemática, desde las etapas que atraviesan, los errores en los que caen con bastante frecuencia, las dificultades que encuentran y la manera en la que llegan a superarlos, con la ayuda de los profesores.

Un concepto es un objeto complejo. Se forma en un largo periodo de tiempo; implica en general una diversidad de propiedades y está asociado a varios tipos de teoremas, algunos de los cuales pueden ser comprendidos también por niños de muy corta edad, mientras que algunos son estudiados con dificultad aún por jóvenes de 15 años. Sin las situaciones que le dan sentido y sin problemas para resolver, un concepto es casi nada. Sin embargo, el censo y la clasificación de los problemas a los que responde un concepto son difíciles y requieren una investigación profunda. Lo mismo en lo referente a los procedimientos a los que recurren los alumnos, espontáneamente o después del aprendizaje. Lo mismo también en lo que se refiere a las formas lingüísticas y no lingüísticas (gráficas, algebraicas) que les permiten expresar estos conocimientos. El trabajo sistemático de la investigación científica no es en absoluto una cosa fácil.

Bruno D'Amore ha estudiado y reflexionado mucho sobre todas estas cuestiones. Su obra hace un buen análisis sobre el estado de nuestros conocimientos al respecto.

Le deseo un gran éxito entre los profesores.

Gérard Vergnaud

Prefacio

Bruno D'Amore es una de las personas que en el curso de los años ha contribuido mayormente a convertir una didáctica disciplinaria, la didáctica de la matemática, en una disciplina propiamente dicha, reconocida en el ámbito académico; además ha insistido internacionalmente por más de cuarenta años para lograr que esta disciplina consienta una lectura crítica de las situaciones en el aula, convirtiéndose de tal manera en un poderoso instrumento en las manos de los profesores de todos los niveles escolares.

Un punto de partida verdaderamente certero para esta recopilación que se propone «presentar estudios y propuestas derivadas de la didáctica de diversas disciplinas con el fin de proporcionar a los profesores en etapa de formación inicial y en servicio, de todos los niveles escolares, una lectura útil para alcanzar profesionalismo e interpretar las situaciones del aula».

Recuerdo cuando el prof. D'Amore presentó este libro en su primera versión italiana en la Universidad de Bologna, una tarde, a los docentes de diversos niveles escolares, en un apasionante encuentro con la presencia de Franco Frabboni, noto pedagogo, quien mantuvo a todos entretenidos por un buen rato, mostrando la importancia pedagógica y didáctica de tal tratado. Para mí y para los otros presentes fue un momento importante para entender aún más el mundo de la didáctica, al cual empezaba a dedicarme profesionalmente.

Este libro ha representado por años un instrumento indispensable en las manos de quienes, como yo, se disponían a entrar en el mundo de la investigación en la didáctica de la matemática y por demás ha representado un instrumento útil para los profesores que cotidianamente deben interpretar lo que sucede en el salón de clase.

La fuerza de este libro está legada también a la capacidad de su autor de saber considerar e interpretar las contribuciones derivadas de otras disciplinas, como la pedagogía, la didáctica general y la psicología del aprendizaje, integrándolas al mundo de la matemática, con el fin de entender con más consciencia el delicado proceso de enseñanza/aprendizaje de la matemática. Competencias y fuerza que caracterizan ciertamente todo el trabajo llevado a cabo por Bruno D'Amore en todos estos años.

En esta ocasión, el autor ha revisado todo el texto original italiano, eliminando párrafos superados, agregando muchos nuevos, enriqueciendo la bibliografía que, entre 1993 y 2020, ha aumentado de manera considerable, en cantidad y en calidad. Por lo tanto, se trata de un libro absolutamente nuevo, moderno, que enfrenta la cuestión de la resolución de problemas de matemática en el aula desde una óptica muy actual, nueva y completa, mirando al futuro.

Leyendo el texto se despierta el interés de profundizar, de conocer, de ir más allá, de no detenerse en una primera lectura superficial de las respuestas de los alumnos, sino de querer sumergirse profundamente para lograr aprehender lo que se esconde detrás de una estrategia dada o de una aplicación fallida, qué se deriva, qué implica, y cómo todo varía dependiendo de la solicitud ... Curiosidades que permiten a cualquier lector convertirse en interprete siempre más crítico de los procesos internos que se encuentran a la base de las elecciones de los alumnos y también y sobre todo en la base de sus propias metodologías didácticas.

El tema de los problemas de matemática en la práctica didáctica representa un argumento fundamental, ya que resolver problemas se constituye en una de las actividades más significativas del género humano, tal como afirma Polya. Para diversos autores, de hecho, el componente más importante y delicado del pensamiento y de la actividad matemática está relacionado con la capacidad de saber captar, comprender, interpretar y resolver situaciones problemáticas. De tal manera que el docente debe prestar particular atención didáctica a este tipo de aprendizaje, buscando la manera de aprovechar eficazmente los resultados que emergen del mundo de la investigación. Desde este punto de vista, D'Amore traslada e interpreta con absoluta y bien nota competencia los resultados derivados de numerosos estudios sobre este tema publicados entre los años 80 y los primeros dos decenios de este siglo XXI, logrando también abrir escenarios de reflexión actuales y de investigaciones futuras. Al mismo tiempo, este texto ofrece numerosas ideas didácticas absolutamente concretas a los profesores para reflexionar de manera crítica sobre las propuestas y los enfoques usados en clase cuando se enfrenta este tema, logrando así satisfacer plenamente las exigencias de la recopilación, es decir proveer una contribución con fuerte carácter tanto teórico como empírico que apunte hacia la reflexión investigativa, la que se transforma en herramientas eficaces para la construcción de “buenas” situaciones de enseñanza/aprendizaje.

Tengo plena certeza que este texto será utilizado con éxito tanto de los investigadores en didáctica de la matemática como de los profesores, que desean entender profundamente el complejo y fascinante mundo de la resolución de problemas de matemática en la praxis didáctica.

Silvia Sbaragli

Premisa

Con algo de titubeo me dispongo a presentar al público el argumento de la reflexión de estas últimas décadas. El titubeo está ciertamente legado al hecho que mi formación de base es la de matemático, mientras que los temas de investigación en los cuales me adentré están en los confines de la pedagogía y de la psicología. Por otro lado, ¿cómo es posible ocuparse de la didáctica y dejar por fuera la pedagogía y la psicología, como quisieran algunos? Me parece una posición un poco miope y deletérea. Sin embargo, hubiese podido reservar para mí el fruto de mis estudios y de mis reflexiones y no llegar a proponer estos resultados, si no hubiese motivos de fondo que me parecieran válidos y que expongo a continuación.

Los motivos que me llevaron a dedicar (mucho) tiempo a este volumen son tres.

Primer motivo, banalmente editorial. Mi proyecto Ma.S.E.[1] tuvo en Italia un éxito tal en ventas que el pedido explícito, más de una vez, por parte de los lectores, de afrontar el tema "Problemas" no se podía eludir. En realidad, en el curso del Ma.S.E., hay más de una referencia a esta importante actividad. Pero hacía falta un discurso específico, lo más coherente y completo posible.

Segundo motivo, más profundo. No hay quien, ocupándose a cualquier nivel de la Didáctica de la Matemática, no reconozca en la actividad de resolución de problemas una característica "fuerte", central: hacer Matemática es en primera instancia afrontar problemas. Por otro lado, el Núcleo de Investigación de la Matemática de Bolonia (del cual soy fundador y responsable director científico desde 1984 hasta hoy) hace años se ocupa de una sub-sección particular propia de esta problemática: la resolución de problemas con estrategias ingenuas (es decir no formales). Llegó el momento de exponer las ideas que se encuentran en la base de esta investigación y algunos resultados en forma explícita y difusa.

Tercer motivo, más personal. En cuanto matemático profesional involucrado en la investigación en Didáctica de la Matemática, decidí graduarme en Pedagogía; por lo tanto ¡tenía que escribir una tesis de grado! Este tema tuvo una gran acogida por parte de un querido amigo mío, el famoso pedagogo Franco Frabboni quien fue mi director de tesis. Mi tesis de grado es un subconjunto (muy reducido) precisamente de este volumen[2].

El Ma.S.E. ha tenido varias aplicaciones concretas, más allá de aquellas que he seguido en primera persona; es obvio que un producto editado en miles de copias se salga de las manos del autor y que cada lector se apropie de él a su manera.

Otro impulso decisivo llegó del sector didáctico en el cual se mueve el Núcleo de Bologna, es decir los "Laboratorios de Matemática". Como ya he ampliamente escrito en otras ocasiones, también durante los laboratorios la actividad tiene como eje principal la resolución de problemas, por lo que una puntualización de tipo teórico se vuelve esencial[3].

Buscaré inmediatamente un fundamento autorizado para dar importancia a este tema:

> Una vez adquiridas ciertas reglas, el hombre puede usarlas con diferentes objetivos en su relación con el ambiente. Puede también hacer algo más importante: puede pensar. Esto significa fundamentalmente estar en capacidad de combinar las reglas aprehendidas a una gran variedad de reglas nuevas de orden superior. Esto se puede hacer por auto estimulación y también respondiendo a diversos tipos de estimulación del ambiente. Mediante el proceso de combinación de reglas viejas y reglas nuevas, la persona resuelve problemas que le son nuevos, adquiriendo así un patrimonio aún mayor de nuevas capacidades.

De esta manera se expresa R. M. Gagné (1973, p. 83). Y, del mismo modo, más adelante (p. 86):

> El *problem solving* se resuelve a partir de la adquisición de nuevas ideas que multiplican la aplicabilidad de las reglas ya aprehendidas. Como sucede en otras formas de aprendizaje, ésta se funda sobre las capacidades ya obtenidas; y no se ubica en el vacío, en la ausencia de cada conocimiento ulterior. La condición más importante para impulsar al sujeto a pensar y asegurarse de tener algo en lo cual pensar. El aprendizaje mediante problem solving lleva a nuevas capacidades ulteriores del pensamiento.

Sin abandonar a este autor (pp. 257-58):

> Ciertamente una de las mayores razones para aprender reglas es su uso en la resolución de problemas. La actividad de problem solving es de tal suerte una extensión natural del aprendizaje de reglas, en la cual la parte más importante del proceso se desarrolla al interior del sujeto. La resolución puede ser guiada por una cantidad mayor o menor de comunicación

> verbal, proveniente del exterior, pero las variables más esenciales son internas. Es particularmente importante notar que los componentes que parecen posibilitar el problem solving son las reglas obtenidas precedentemente. El problem solving puede ser concebido como un proceso de descubrimiento por parte del sujeto de una combinación de reglas ya notas que éste puede aplicar para alcanzar la solución de una situación nueva y problemática. Sin embargo, no se trata solo de aplicar las reglas ya sabidas. El proceso también genera un nuevo aprendizaje. El sujeto está bajo o se encuentra en una situación problemática y recuerda las reglas precedentemente aprehendidas en el tentativo de encontrar una "solución". Durante este proceso del pensamiento, éste probará cierto número de hipótesis verificando su aplicabilidad. Cuando encuentra una combinación particular de reglas que se adaptan a la situación, no solamente ha "resuelto el problema", sino que también ha obtenido algo nuevo.

"Regla" sin embargo se debe entender en este contexto en sentido más amplio del que puede comúnmente venir a la mente, como veremos difusamente a lo largo del libro. Todavía una citación de la misma fuente (p. 265):

> [...] la resolución de un problema jamás surge de la nada, sino que depende siempre de la experiencia precedente del sujeto.

Por lo tanto, la resolución de los problemas (o, como se dice habitualmente, también en los países de idioma español, el problem solving) es una condición óptima para el aprendizaje. Ésta es la tesis que acepto, aunque tendré que entrar en particularidades delicadas para analizarla profundamente, lo que requerirá varias decenas de páginas.

Sin embargo, hay que decir explícitamente que hasta aquí el *problem solving* se ha descrito de manera genérica (...) Surge espontáneamente la pregunta: ¿Qué caracteriza el problem solving en Matemática? En otros términos: resolver problemas no es una característica de las actividades matemáticas únicamente y nada nos impide pensar esta misma problemática en otros campos. Se pueden proponer dos tipos de actitudes:

1. el "contenido" es el que caracteriza; en esta acepción, "nuestro" *problem solving* es matemático porque nos ocupamos de problemas (a veces ejercicios) en el campo de la Matemática;
2. la "forma" en la cual el solucionador se propone es la que caracteriza; en esta acepción, paradójicamente, podremos tener *problem solving*

matemático con contenidos no necesariamente matemáticos, o problem solving no matemático, pero con contenidos matemáticos.

La primera posición parece un poco débil, pero la segunda es difícilmente definible.

La posición asumida en el contexto de las investigaciones del Núcleo de Bolonia (y la mía personal) emergerá, lentísimamente, de las páginas de este libro y se trata de una especie de término medio entre las dos. Hay quien se ocupa del *problem solving* poniendo toda la atención a los procesos de "descubrimiento" y que parece al final más interesado en la actividad de resolución de ejercicios y no de problemas en el verdadero sentido de la palabra. Nos parece que se puede "descubrir" algo también frente a un ejercicio y que las "condiciones alrededor" sean las que determinan si se trata de descubrimiento o de otra cosa. Por otro lado, hay solucionadores de problemas para quienes el contexto es tal que su actividad no comporta de hecho descubrimiento sino mera aplicación.

Es obvio que en este punto se vuelve esencial definir bien el concepto de *"problema"*; ahora, si es cierto que en el primer capítulo enfrentaré un primer estudio sin profundizar sobre este punto fundamental, a vuelo de pájaro, también es cierto que la problemática no se extingue de hecho en el primer capítulo (el cual, en cambio, de acuerdo con mis intenciones, debe crear más (...) problemas de tipo interpretativo de los que puede resolver).

Como diré más adelante, *el libro fue concebido a manera de espiral*: qué es un problema es el argumento afrontado en el primer capítulo y NO resuelto allí. En cierto sentido, todo el libro es un intento por responder esta pregunta.

Cuando se habla de problemas, se disparan, entre los profesores de la escuela primaria, discusiones a propósito de:

- automatismos de cálculo (por ejemplo: tablas de multiplicar y similares);
- uso de las máquinas de cálculo (por ejemplo: ábacos, calculadoras, [...]) (a favor, contrarios, más o menos, depende, [...]);
- uso de otros instrumentos de cálculo más sofisticados (TIC).

A propósito de los automatismos de cálculo, sugiero la siguiente posición que exhibo desde siempre: si a las dificultades de resolución de un problema (de la comprensión textual a la elección de una estrategia resolutiva, como veremos de manera amplia y detallada) se agrega la dificultad de recordar cuánto es 7×8, ¡entonces sí que la actividad matemática se torna pesada! El aparente conservadurismo de quien propone adquirir automatismos de cálculo (*acusación* muy difundida en los primeros años de la década de los 70) se puede entender, en últimas, como un aligeramiento a favor de actividades más significativas. Luego, en cuanto al "cómo" (las tablas de multiplicar de memoria, o carteleras en las paredes que los niños u otra persona llenan diariamente, o algo más), el "estilo" del profesor y de los niños individualmente, podrían ser decisivos. Regresaré mucho más decididamente, en varias ocasiones, al problema de los automatismos de cálculo.

En cuanto a las máquinas calculadoras, he dicho y escrito mil veces, alborotando a veces avisperos, que el uso de las máquinas calculadoras no necesariamente lleva a la pérdida de la capacidad de hacer cálculos. Se puede incluso fácilmente demostrar que un uso inteligente y creativo de tal instrumento mejora las condiciones de la actividad escolar y facilita los cálculos; y lo demostramos con varias publicaciones (AA. VV., 1977).

A propósito de las calculadoras, en cambio, aquí un fragmento significativo:

> Supongamos que debemos calcular: 0,18×75200+36500; digitando en orden las cifras y los signos de las operaciones, y al final la tecla =, una calculadora cualquiera de bajo costo puede dar el resultado correcto. Supongamos en cambio que debemos resolver el siguiente problema: Ángela dice a su papá: *«Mido un metro y 32 centímetros»; el papá responde: «Yo soy 41 centímetros más alto que tú». ¿Qué tan alto es el papá de Ángela?* Ninguna calculadora, ni siquiera una computadora, es capaz hoy de interpretar y resolver autónomamente un problema como éste, puesto en el teclado ¡tal como está "escrito"! La resolución de problemas matemáticos es tal vez la actividad matemática en la cual se constata con más claridad la brecha enorme de prestaciones que todavía separa el razonamiento humano del razonamiento que podemos "incorporar" en las máquinas. Esta constatación no es poco importante si se piensa en la importancia que tiene la resolución de problemas en la vida de todos los días y en muchas profesiones para comparar dos cotizaciones de seguros, hacer un presupuesto de gastos para unas vacaciones familiares, etc., es necesario individuar y resolver problemas en general bastante más complejos que aquel apenas citado; las calculadoras pueden ser de ayuda en la ejecución de los cálculos, pero las decisiones sobre los datos a tener en cuenta y sobre los cálculos a efectuar ¡no pueden ser delegadas a las máquinas existentes hoy en día! (Boero, 1990, p. 23)

No puedo más que hacer mía la posición de Paolo Boero expuesta aquí de manera muy convincente. Es extremadamente importante leer en el mismo texto también otros párrafos.

Una advertencia de gran importancia para la lectura de este libro. Se retorna una y otra vez sobre la misma cuestión; por lo que no se puede considerar cerrada una problemática en los primeros capítulos del libro, ya que será retomada ciertamente más adelante, de manera más profunda, una vez se pueda hacer uso de otros conocimientos. Lo anterior depende de la naturaleza de la temática evaluada: he imaginado una espiral cilíndrica que, después de cada giro, retorna a los mismos argumentos, enriquecida de experiencia. Tal y como es la característica de mucha didáctica (en forma de espiral) también este libro fue, y lo repito, escrito en espiral. Al leerlo no se puede olvidar, ni por un segundo, esta condición.

Agradecimientos

Doy las gracias a Martha Fandiño por la presencia constante y las críticas constructivas que fueron necesarias durante la escritura de este trabajo tan complejo, que a menudo excedió mis competencias y me obligó entonces a enfrentarme a una persona de plena confianza, del más alto nivel cultural y crítico. Y para ayudar a escribir este libro en español.

Doy las gracias a la traductora de esta obra, Diana Rocío Pérez Blanco.

Doy las gracias a Gianfranco Arrigo por su asistencia técnica en la creación de las imágenes, las figuras y los esquemas que ha creado con experiencia y amistad.

Nota bibliográfica

Indicaciones bibliográficas ulteriores sobre los laboratorios, además de las ya citadas (D’Amore, 1988a, 1988b, 1990-91; Caldelli, D’Amore, 1986; D’Amore, Marazzani, 2011).

Sugiero al lector interesado en la investigación dos lecturas, si es posible, preliminares (Boero, 1986; Boero, Ferrari, 1988). La rica bibliografía allí contenida será de gran ayuda para quien tenga intenciones de entrar a fondo en este campo de estudio.

Sugiero la lectura de (Pellerey, 1991a, 1991b).

Están también los "clásicos" del *problem solving*, el primero entre todos George Polya que citaré varias veces en este libro y sobre cuyo trabajo equivocadamente interpretado como didáctico discutiré muy críticamente al final del libro; entre todos los autores posibles, sugiero (Aebli, 1961; Lester, Garofalo, 1982; Schoenfeld, 1987a) porque su visión ha influido y no poco sobre las diversas elecciones descritas en este libro, aunque no siempre serán citados de manera explícita.

Recuerdo también el libro (Cofman, 1990).

Sobre la *"didáctica a manera de espiral"* tengo en mente el famoso modelo de Bruner (1962).

Hoy, en el 2020, frente a la posibilidad de sacar a la luz una nueva edición muy ampliada y muy enriquecida, tendré el deber de revisar algunas posiciones, de tomar en cuenta nuevas contribuciones que señalaré cada vez que lo considere necesario. Por ejemplo, citaré tesis y estudios publicados entre el ya lejano 1993 y el actual 2020. Pero lo haré de manera oportuna y específica a su debido tiempo.

Permanece el firme deseo de presentar esta obra que recoje los estudios sobre este delicado e interesantísimo problema didáctico, pero que no sea solo teórico (para investigadores en Didáctica de la Matemática), sino una fuente de rica estimulación concreta para los profesores de la escuela primaria, sobre todo, en su quehacer cotidiano.

Vale la pena recordar aquí la formidable aventura del Proyecto MaSE, sobre la cual he escrito tantas veces y que, por su magnitud histórica en el ámbito nacional italiano, obtuvo un lugar también en una famosa Enciclopedia, como lo he dicho anteriormente. Para la lista completa de los ejemplares, se puede consultar la bibliografía final (D'Amore, 1986-1993).

En tiempos mucho más recientes, dados los rápidos y fantásticos progresos de la Didáctica de la Matemática, con Martha Isabel Fandiño Pinilla y Silvia Sbaragli hemos concebido un nuevo megaproyecto dirigido a profesores de la escuela primaria, llevado a cabo por la casa editorial Pitagora de Bolonia, *Matemática en la escuela primaria, recorridos para aprender* (D'Amore, Fandiño Pinilla, Sbaragli, 2011). En la bibliografía se retoma la lista completa de libros de diversos autores.

1 El Proyecto Ma.S.E. constaba de 12 volúmenes y tuvo un éxito fulgurante en los años 90 en Italia, entre los profesores de la escuela primaria; el éxito fue tal, que el proyecto terminó con una amplia voz en la Enciclopedia Pedagógica (2002) dirigida por Mauro Laeng, Brescia: La Scuola Editrice, páginas 1228-1230.

2 Unos años después decidí de graduarme también en filosofía ya que me di cuenta de necesitar bases filosóficas para mi trabajo de investigador en didáctica de la matemática. La idea era de incluir lo que necesita de pedagogía, filosofía y psicología al interior de la didáctica de la matemática, así que esta, al final sea autónoma y completa. Como hoy es.

3 He publicado mucho desde un punto de vista teórico sobre las actividades de laboratorio de matemática, también a propósito de la teoría de las situaciones de Guy Brousseau, por lo tanto al interior de teorías didácticas fundamentales, desde 1986 (como se sustrae de la lista de publicaciones que aparece en www.dm.unibo.it/rsddm).

1. Problemas, ejercicios y aprendizaje

1.1. Problemas y ejercicios

Consideremos la siguiente conjetura:

Cada número par mayor de 2 es la suma de dos números primos.

Verifiquemos: 14 es 11+3; 26 es 13+13; 80 es 7+73; (...) Por cuantas verificaciones se hagan, con números pares grandes o pequeños, con un poco de paciencia se encuentra una pareja de adendas primos que cumplen dicha condición.

¿Es éste un problema?

Una primera respuesta ingenua de un profesor de primaria fue: «No, no es un problema porque no hay una pregunta». Quien piensa esto o bien deja de leer este libro o lo debe leer con mucha atención. No hay una pregunta explícita, pero se trata de un problema, claro está.

Se trata de:

- demostrar esta afirmación (y entonces la conjetura se vuelve un teorema, es decir una afirmación verdadera en cuanto demostrada); o en cambio
- encontrar un ejemplo que contradiga la afirmación, o sea "exhibir" un número n par mayor de 2 y demostrar que no existen dos números primos cuya suma sea n.

Se resuelve el problema en uno u otro caso[4].

Otra conjetura:

Estamos en una clase de 18 alumnos y queremos ir de excursión viajando en un autobús que cuesta 250.000 pesos; sin embargo, 2 de nosotros no pueden pagar. Si los 16 restantes contribuyen con 40.000 pesos cada uno, lo podremos hacer.

También en este caso la pregunta es implícita: ¿Es cierto o no que lo podremos hacer?

Esta vez es fácil transformar la conjetura y darle un valor de verdad: basta con hacer una multiplicación y verificar. ¿Se trata de un problema? No hay pregunta explícita, pero hay una situación que pone de presente una cuestión que hay que resolver. Podríamos llamarla *"situación problemática"*.

Aún otro ejemplo:

Juanito va al mercado con 600 pesos, compra huevos a 30 pesos cada uno y gasta todo. Regresando, rompe 3. ¿Cuántos huevos lleva a casa?

He ahí todos los ingredientes en el lugar preciso para obtener lo que en la escuela se llama *problema:* datos numéricos, una situación ficticia aun cuando comprensible e imaginable, una sugerencia semántica sobre las operaciones necesarias. Un verdadero y típico *problema escolar*. También con datos inútiles.

Sugiero una clasificación banal pero útil y muy difundida, entre

- problemas
- ejercicios.

Tanto los problemas como los ejercicios implican situaciones problemáticas causadas por varios factores: la propuesta del profesor (más o menos motivada), el test, la situación real y efectiva en la cual se encuentran el alumno o la clase, (...) Pero los *ejercicios* se pueden resolver utilizando reglas ya obtenidas, o en vía de consolidación y que, por lo tanto, entran en las categorías: refuerzo o evaluación inmediata. En cambio, los *problemas* involucran el uso de más reglas (algunas deben ser explicitadas precisamente en el momento) o una sucesión de operaciones cuya elección es un acto estratégico, a veces creativo, del alumno mismo.

Se entiende bien que las anteriores no son definiciones propiamente dichas: hay casos límite que se pueden interpretar en las dos posiciones. A mi modo de ver, se trata de un comportamiento que juega con los roles relacionales profesor-alumno, más que de una verdadera línea divisoria.

Tanto así que una situación problemática puede dar lugar a un problema o ejercicio según la situación didáctica. Veamos un ejemplo: se entrega un objeto circular plano (por ejemplo, la tapa de una olla) y se pide al alumno evaluar la longitud del contorno (una circunferencia).

En el primer año de primaria éste es un problema; en el grado octavo es (debería ser) un ejercicio.

Entran en juego también una serie de factores anexos:

- la motivación, como veremos más profundamente en el Capítulo 2, por la cual la distinción ejercicio/problema puede depender del comportamiento, de factores emocionales o emotivos, del rol que tiene la ejercitación en clase, del contrato que se ha venido creando, etc.;
- la mayor o menor cercanía de las situaciones problemáticas propuestas con la realidad. Me

explico mejor. Usualmente los ejercicios de tipo escolar son del todo ficticios. Aquel Juanito que va al mercado con 600 pesos para comprar los huevos y que luego rompe 3, no existe y ningún niño de la clase se identifica con él: la situación es creíble, pero ficticia, nunca vivida. En cambio, un gasto para la excursión dividido entre 16 puede ser verdaderamente una situación problemática vivida en la realidad, a tener en cuenta para solicitar el análisis matemático. Se trata de decir correctamente los términos de la cuestión verbalmente (oral o escrito), hacerse una imagen mental, hacer que cada niño tenga un modelo matemático de la cuestión y, luego, pasar a la solución concreta: cuánto dinero debe pedir cada uno a sus padres para participar en la excursión.

No es necesario que la situación problemática sea experimentada en primera persona, la cosa es más sutil. En una clase de tercer año de primaria en la periferia de Bolonia, durante el segundo cuadrimestre, a instancia de ciertos discursos, se propuso el asunto de evaluar los gastos asumidos por la dirección didáctica en un año por concepto de energía eléctrica y calefacción. La situación problemática podría haberse considerado ficticia al principio, pero luego, mientras se procedió con el estudio de los recibos, la entrevista a un conserje, la visita a la empresa del gas, etc., la situación se enriqueció con la experiencia directa que la transformó de ficticia a real y concreta.

Decía que la motivación juega un rol no secundario: en un grupo interesado, la construcción de la sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, (...), relacionada, en la historia y en las circunstancias, al aumento ideal de la población de las parejas de conejos de cría, sí es ficticia (porque en la realidad ninguno cría conejos en la ciudad y muchos niños nunca han visto un conejo real), pero con tal vínculo emotivo (el contexto se vivió con gran vivacidad) se convirtió en problema: cada uno quería dar su contribución personal que iba más allá de la simple operación aritmética (todo saben que cada número de la sucesión es la suma de los dos precedentes).

Queda aclarar, pero no es trivial, qué es la situación problemática en relación con el problema.

Apropósito de esto, tenemos más de una interpretación; escojo, por ahora, dos:

- la de Boero (1986), según la cual la situación problemática es «el significado del texto» (mientras que el texto es «un sistema de signos» que la codifica);
- la de Borasi (1984), según la cual la situación problemática es «el contexto en el cual el

problema propuesto tiene sentido».

Propongo una definición más amplia, en alternativa:

la situación problemática es el sistema de las competencias reales en las cuales se puede imaginar todo aquello descrito en un texto y su significado (semántica), dentro de la experiencia del niño individual (el sistema es específico para el problema dado).

Con esta definición, la situación problemática recuperaría aspectos semánticos, pragmáticos y experienciales.

El lector debe aceptar el hecho que en esta materia no encontrará definiciones precisas, como en Matemática; aquí se delinean tesis y conceptos en la manera más detallada posible, llevando al examen de la propia idea, no demostraciones o pruebas irrefutablemente unívocas, sino solicitudes traídas desde la experiencia personal de estudiosos o investigadores de la Didáctica de la Matemática.

Llegaré a proponer varios modelos relacionados con la resolución de problemas. Pero es muy temprano; para poder describirlos necesito de otros materiales.

Aquí quiero todavía recordar la importancia que cobra, tanto en la resolución de los ejercicios como (y aún más) en la de los problemas, la formalización del lenguaje común en términos matemáticos. Una vez el texto es bien entendido y se hace una imagen mental (personal), puede ser útil (y, de hecho, en la mayoría de los casos lo es) *"matematizar"* la situación. Muy a menudo, esto implica la traducción del lenguaje común al lenguaje matemático.

Por ejemplo, en el ejercicio de los huevos que compró Juanito, la solución es, formalmente: 600:30–3. En el caso de la conjetura de los números pares, se trata de demostrar que:

$$(\forall x)(x=2n \wedge n>1) \rightarrow [(\exists y)(\exists z)(x=y+z) \wedge (\forall h)(\forall k)\ (\neg\exists m)(m\neq 1 \wedge m\neq y \wedge y=mh) \wedge (\neg\exists p)(p\neq 1 \wedge p\neq z \wedge z=pk)]\ [x, y, n, z, h, k, m, p \in N]$$

La primera formulación aparece en términos aritméticos muy elementales; la segunda en términos de formalización lógica, un poco más compleja.

Pero entonces ¿Qué es un problema? ¿Existe una definición?

No puedo más que recordar (por ahora) la célebre frase de uno de los más conocidos estudiosos de la resolución de problemas matemáticos, George Polya (1945):

> Resolver problemas significa encontrar un camino para salir de una dificultad, un camino para reaccionar ante un obstáculo, para lograr un fin que no sea alcanzable inmediatamente. Resolver problemas es una empresa específica de la inteligencia y la inteligencia es el don específico del género humano: resolver problemas se puede considerar la actividad más característica del género humano.

Propongo también la afirmación de Karl Duncker (1945), quien evidencia exclusivamente el objetivo:

Surge un problema cuando un ser viviente tiene una meta, pero no sabe cómo alcanzarla.

[Una colección de respuestas a la pregunta «¿Qué es un problema?» se encuentra en Ferri (1989)].

Como se ve, no hay definiciones sino precisiones, puntualizaciones, clarificaciones: no hay problema si no hay una situación problemática que cree una pregunta, cuya la respuesta sea, por alguna razón, causa de dificultad.

Nota bibliográfica

Para la redacción de esta sección, además de los textos ya citados, hice uso también de (Antiseri, 1985; Borasi, 1984, 1986a; Duncker, 1969; Polya, 1954; Petter, 1985; Aebli, 1961).

1.2. Resolución de problemas, formación de conceptos y “teoremas en acto”

Con ese título, esta sección requeriría un libro por sí sola; empezaré a tratar esta problemática aquí para después retomarla varias veces más adelante, de manera más o menos explícita y refiriendo textos oportunos.

En una didáctica moderna, no se requiere un comportamiento pasivo por parte del alumno: «Haz esto y esto en una situación de este tipo»; en cambio, se requiere y se favorece un conocimiento activo que se transforme en "saber qué hacer" (lo podemos llamar "eficiencia"). Todos están sustancialmente de acuerdo con el hecho que la solución de problemas y el saber escoger cómo comportarse en situaciones problemáticas son una manera excelente de formar conceptos. Pero, concretamente, es muy difícil establecer lo que esto significa *verdaderamente*.

Debemos a Gérard Vergnaud (1985a) un muy buen intento por explicar este punto y en él me inspiro para lo que sigue.

Es bien sabido que, para explicar el modelo de desarrollo mental de los niños, Jean Piaget recurre a varios esquemas, entre los cuales recuerdo el esquema de *"permanencia del objeto"*. Sus experimentos son famosos; por ejemplo, moviendo de manera evidente de un lugar A a un lugar B un objeto escondido en ambos casos (por ejemplo, A debajo de un tapete y B debajo de una toalla), durante cierto período de tiempo, un niño muy pequeño seguirá buscando el objeto en el punto del cual fue movido. El niño solo entiende lentamente lo que es una especie de principio general de permanencia; tal permanencia, por ejemplo, tendrá que ver, más adelante, con el valor cardinal de un número, cantidad, longitud, amplitud, masa, (...) Al lado de la permanencia de un objeto, se considera la invariabilidad de ciertas relaciones de tipo más abstracto y, por lo tanto, capaces de constituir una conquista más tardía. Por ejemplo, la relación *"ser hijo de"* que es bien comprendida por el niño si la pareja ordenada es (yo; mi papá), y es rechazada a largo plazo si la pareja se vuelve (mi papá; mi abuelo). Tal permanencia de las relaciones (que se llama *"invariante relacional"*) es, por así decirlo, la base de la comprensión de los verdaderos *"teoremas"*, por ejemplo:

Si A es menor que B y B es menor que C, entonces A es menor que C.

Aunque se haya comprendido plenamente que «A es menor que B» y que «B es menor que C», permanece el hecho que la afirmación «A es menor que C» puede ser reconocida haciendo la prueba (comparando, donde sea posible, A y C), o "deduciéndola" de las dos primeras. Sabemos que se trata de la propiedad transitiva de la relación de orden "es menor que": si se verifica de la primera forma (heurística) no es más que entrar en contacto con una invariante relacional; pero si se "deduce" de la segunda forma (lógica), entonces se puede hablar de un teorema en acto, como propone

Vergnaud.

Un buen ejemplo que he oído usar de Vergnaud mismo en una escuela de verano es el de un niño que debe decidir cuántos puestos organizar en la mesa para los invitados; algunos invitados están dentro de la casa (a), otros están en el jardín (b); los puestos en la mesa deben ser entonces a+b. Se trata de un *teorema en acto*: el niño ha aplicado una regla de la cardinalidad:

card (X U Y) = card X + card Y
cuáles que sean los conjuntos X y Y con $X \cap Y = \varnothing$.

Es claro que la toma de conciencia de tales teoremas en acto constituye una formación genuina de conceptos y que la situación más natural para hacer emerger tales teoremas en acto es la resolución de problemas (mejor si son concretos).

Por ende, se trata, entre otras cosas, de una manera activa y deductiva de ver la resolución de problemas.

Nota bibliográfica

Para la redacción de esta sección, he usado (Furth, Wachs, 1977; Petter, 1984; Vergnaud, 1981a, 1985a, 1990a, 1990b).

Para una crítica a la posición descrita por Piaget, ver (Donaldson, McGarrigle, 1974; Freudenthal, 1973; McGarrigle, Grieve, Hughes, 1978).

Para un estudio detallado y moderno sobre la diferencia entre ejercicio y problema y sobre el aprendizaje estratégico en un contexto teórico más amplio (Fandiño Pinilla, 2008).

1.3. *Problem solving* y *problem posing*

En este proceder a manera de espiral, encuentro la necesidad de contraponer dos problemáticas aparentemente opuestas, las del título de la sección.

Ya he hecho notar como uno de los impulsos para aprender es la motivación y la gratificación (placer ‘interno’, es decir satisfacción