

MÚLTIPLES ASPECTOS DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Evaluar e intervenir en forma mirada y específica

Martha Isabel Fandiño Pinilla

δ

Didácticas
MAGISTERIO

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

MÚLTIPLES ASPECTOS DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Evaluar e intervenir en forma mirada y específica

Martha Isabel Fandiño Pinilla

δ

Didácticas
MAGISTERIO

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática

Evaluar e intervenir en forma mirada y específica

Martha Isabel Fandiño Pinilla

Prólogo de *Giorgio Bolondi*

Colección D i d á c t i c a s

Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática

Evaluar e intervenir en forma mirada y específica

Autora:

© Martha Isabel Fandiño

Libro ISBN: 978-958-20-1018-8

Primera edición: 2010.

© COOPERATIVA EDITORIAL MAGISTERIO

www.magisterio.com.co

Dirección General

Alfredo Ayarza Bastidas

Dirección Editorial

José Vicente Joven N.

Composición

V-Joven

A
Bruno,
quien evalúa mis evaluaciones

Contenido

Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática

Prefacio

Premisa

Capítulo 1

El aprendizaje de la matemática como objeto unitario y múltiple

- 1.1. Unicidad y multiplicidad de factores
- 1.2. Diversas componentes en el aprendizaje de la matemática
- 1.3. Saber y saber hacer: unicidad y diferencias
- 1.4. Evaluar: un proceso
- 1.5. Intervenir y evaluar la especificidad de un fracaso

Capítulo 2

El aprendizaje conceptual

- 2.1. Registros de representación semiótica
- 2.2. Construcción del conocimiento
- 2.3. Evaluar el aprendizaje conceptual

Capítulo 3

El aprendizaje algorítmico

- 3.1. Algoritmos
- 3.2. Algoritmos en la historia de la matemática
- 3.3. El peligro de los algoritmos
- 3.4. Evaluar el aprendizaje algorítmico

Capítulo 4

El aprendizaje estratégico

- 4.1. Generalidades
- 4.2. Ejercicios, problemas y zona de desarrollo próximo
- 4.3. Problemas matemáticos en la historia

4.4. Evaluar el aprendizaje estratégico

Capítulo 5

El aprendizaje comunicativo

5.1. Comunicar la matemática

5.2. Lenguajes de la matemática en aula

5.3. Evaluar el aprendizaje comunicativo

Capítulo 6

Aprendizaje y gestión de las representaciones semióticas

6.1. Aún sobre los registros de representación semiótica

6.2. Evaluar la gestión de los registros semióticos

Conclusiones

Bibliografía

La Autora

Martha Isabel Fandiño Pinilla

Prefacio

¿Qué significa “aprender” cuando se habla de matemática? Generalmente tenemos la impresión que nuestros estudiantes tienen una conciencia vaga de aquello que “saben” o de lo que “han entendido” cuando se trata de matemática. *¿Estudiaste para la “evaluación” de matemática?* - piden los padres. *Si, me aprendí todas las fórmulas, y por seguridad las copié en un papelito* - responde el joven. Es claro que esta es una visión limitada y limitante de la matemática.

Después, está la nota de la “evaluación” o de la “recuperación” que pretende medir cuanto los estudiantes supieron hacer, o repetir, en respuesta a la consigna del docente. Por lo general este resultado es, para el estudiante, imprevisible, y se interpreta como el resultado de circunstancias casuales, a causa de las cuales el ejercicio no pudo ser terminado, un proceso se bloqueó, un cálculo no dio el resultado esperado... En matemática, más que en otras disciplinas, es muy difícil para el estudiante auto-evaluarse.

Había estudiado todo, pero no fui capaz de hacer un simple ejercicio.
O, por el contrario:

Para mí es mejor que me den ejercicios, en casa no tengo problemas para solucionarlos, pero por favor no me pida definiciones (o, peor aún, ¡demostraciones!).

Lo sabía perfectamente, tanto que la mitad de la clase hizo la tarea gracias a mí, pero no fui capaz de explicar.

Estas son frases típicas, que todos hemos sentido repetir a nuestros estudiantes. Todo esto no debe asombrarnos. El aprendizaje, en matemática, es el resultado de procesos complejos, de múltiples aspectos, que requieren un trabajo articulado en el cual se entrelazan las interacciones con el docente y con los compañeros; momentos de reflexión y de reelaboración completamente personal, construcciones metódicas y saltos en lo desconocido, memoria y fantasía...

¿Cuál es el resultado de estos procesos? De todo este trabajo surge un producto mucho más articulado en donde los diversos aspectos

desafían al docente quien debe estimular, facilitar y evaluar el aprendizaje de sus estudiantes.

Este libro analiza, estableciendo relaciones y evidenciando las especificidades, los diversos aspectos del aprendizaje de la matemática, individuando (por comodidad de clasificación, dado que se trata de un hecho unitario) cinco principales. Existe una faceta del aprendizaje que tiene que ver con los conceptos, otra que involucra directamente los algoritmos y los procesos; una cosa es el aprendizaje estratégico y otra la capacidad de comunicar; podemos por último centrar la atención en la capacidad de dominio de los diversos registros semióticos de representación.

Todo esto no es sólo teoría, no se trata de consideraciones generales o abstractas: este tipo de análisis es crucial para el docente, en un primer momento, cuando organiza la propia actividad de enseñanza, y, en un segundo momento, cuando debe *evaluar* el aprendizaje de los estudiantes. De hecho, es necesario recordar que es precisamente lo que viene evaluado (o que se percibe como evaluado) lo que condiciona el trabajo de los estudiantes y de consecuencia condiciona y dirige el aprendizaje. Si nuestra evaluación gira sólo al rededor de la verificación de algunas habilidades, es obvio que el trabajo de los jóvenes se dirigirá en dicho sentido haciendo que el aprendizaje que se deriva sea incompleto. Debemos, por el contrario, favorecer un “verdadero” aprendizaje: rico, estable y coherente; este libro fue escrito para ayudar al docente en esta empresa.

El libro también es rico de ejemplos de situaciones de aula y de referencias (también históricas) que el docente podrá utilizar para enriquecer su propia paleta de trabajo. Un consejo que nos atrevemos a dar es el siguiente: tratar de usar las categorías introducidas por la Autora para leer las *propias* situaciones de aula y para interpretar el comportamiento de sus estudiantes. Este libro puede ser para todos nosotros la ocasión para constatar, guiados por la experiencia de Martha Isabel Fandiño Pinilla, cómo la investigación en didáctica de la matemática puede realmente ayudarnos a mejorar nuestra enseñanza.

Giorgio Bolondi

Premisa

Cuando un estudiante no tiene éxito en matemática es demasiado superficial decir “No alcanzó los logros propuestos”; en realidad, ¿en qué no alcanzó el resultado esperado? ¿No entendió los conceptos? ¿Los entiende pero no sabe usarlos para resolver un problema? ¿No sabe efectuar los cálculos? o ¿Sabe efectuarlos pero no sabe la finalidad de estos? ¿Construyó el concepto pero no sabe comunicarlo? ¿Resuelve un problema pero no puede explicar el proceso que siguió para su resolución? ¿No sabe gestionar los cambios de representación semiótica que la matemática exige?

¿Cómo se puede intervenir y *recuperar*, cuando no se sabe determinar con precisión la causa del error? Un mismo error puede tener causas muy diferentes.

Este libro pretende ser una ayuda concreta, teórica y práctica, en la solución de este tipo de problemática, sin estar condicionados por el nivel escolar.

Pero, ¿Qué tipo de ayuda?

Examinando lo que sucede en aula durante la clase de matemática, mi experiencia que me permitió atravesar todos los niveles escolares, de maestra de la escuela primaria a docente universitaria, me llevó a hacerme las preguntas precedentes, pidiéndome: ¿Cómo ayudar a resolver el problema de la evaluación en matemática, una evaluación específica, que ayude en verdad a todos, permitiendo intervenir sobre las causas del fracaso?

Decir de un estudiante: «Bruno no responde en matemática como yo espero que me responda», es decir: «Bruno no sabe», es demasiado banal. Y ahora, ¿cómo puedo remediar las causas que han llevado a Bruno a no responder correctamente?

Mi experiencia y la de mis colaboradores en la investigación me dicen que la respuesta no correcta de los estudiantes puede tener como causa el fracaso en la adquisición de conceptos, en la incapacidad de gestión de los algoritmos, en la falta de una buena estrategia en la resolución de un problema (un estudiante pudo haber elaborado el

concepto, saber llevar a término un algoritmo, pero empantanarse frente a la resolución de un problema; todas situaciones por demás generalizadas), una no adecuada comunicación (es el caso del estudiante que sabe pero que no logra comunicar aquello que conoce) o una gestión no apropiada de los registros semióticos (tal vez el aspecto de mayor fracaso, especialmente en la escuela media y superior). Pueden ser dos o tal vez tres de estas las causas del fracaso en matemática, pero difícilmente se puede afirmar que sean todas las cinco contemporáneamente...

Es esta la razón por la cual dividimos el aprendizaje de la matemática en estas cinco componentes, estudiándolas una por una como si fueran separadas y dando para cada una sugerencias para una evaluación específica.

Es obvio que el aprendizaje de la matemática es único, lo repetiremos más de una vez; por tanto, esta división en componentes es solamente académica, concreta, sólo un instrumento para buscar remediar a las causas de los errores; es un instrumento para evaluar de forma específica.

Mi experiencia y la validación de mis colaboradores demuestran la funcionalidad de este método y su comodidad; lo he presentado en varias ocasiones de formación docente, tanto en servicio como inicial, revelándose excelente.

Una nota más antes de proceder.

No explicaremos la terminología técnica de la didáctica de la matemática de la cual, a partir de este momento, haremos referencia, dándola por conocida. En caso contrario, reenviamos a D'Amore (1999a). Si nos detenemos a explicar todos los términos de los cuales nos serviremos, de seguro, se superaría la masa crítica que transforma un libro ágil y útil en una enciclopedia de tener fija en biblioteca y de consultar de tanto en tanto.

Por último, como de costumbre, los agradecimientos de rito.

Este libro fue posible gracias a la concreta experiencia adquirida en años de trabajo en las aulas por aquellos colegas docentes de matemática, en particular de la escuela primaria, pero no sólo, que probaron las técnicas. A todos ellos mis agradecimientos, aunque aquí es imposible recordarlos todos.

Otro agradecimiento va a todos aquellos que me han enseñado a confrontar la experiencia con la investigación.

Capítulo 1

El aprendizaje de la matemática como objeto unitario y múltiple

1.1. Unicidad y multiplicidad de factores

El aprendizaje de la matemática, tal vez, el más estudiado entre los aprendizajes disciplinares, se presenta como un factor múltiple, rico de miles de aspectos: salta a la vista de todos los docentes el hecho que un aprendizaje concluso con éxito en matemática es de considerarse una óptima combinación de aprendizaje específicos y diferentes. En matemática, de hecho, no basta haber *construido* un concepto, sino que es necesario saberlo *usar* para efectuar cálculos o dar respuesta a ejercicios; combinarlo con otros o con estrategias oportunas para *resolver* problemas; es necesario saber *explicar* a sí mismo y a los otros el concepto construido o la estrategia seguida; se requiere un uso sapiente de las transformaciones semióticas que permiten *pasar* de una representación a otra.

Incluso estas primeras palabras, confirmadas por la práctica sea en la didáctica como en el proceso de evaluación, muestran tanto la absoluta complejidad como la especificidad del tema.

Para evitar equívocos, lo hemos dicho y volveremos a decirlo, estas “componentes” del aprendizaje no son ni independientes, ni separables, ni con intersección vacía: el resultado positivo en el aprendizaje se logra sólo gracias a una serie de concausas, a un conjunto holístico de componentes.

Sin embargo, en este libro, gracias a la práctica concreta que se encuentra a la base de la acción didáctica de los docentes, y respaldada por la experiencia ya sea como docente, como investigadora y como formadora (inicial y en servicio) de docentes, propondré un análisis detallado y específico de estos aprendizajes, como si fueran independientes, conciente de que no lo son del todo.

¿Cuál es el objetivo? Sucede, en más de una ocasión, que un estudiante manifiesta no haber logrado el aprendizaje en matemática, en forma confusa y no muy bien delineada. Es más, el *mismo* error, de dos estudiantes diversos, no dice cuál fue la *causa* que indujo dicho error, cuál fue el malestar cognitivo, qué no funcionó en el proceso de enseñanza - aprendizaje. Lo que parece ser “el mismo error”, puede tener causas diversas; un docente, no debe intervenir sobre el error, si desea poner remedio a una situación negativa, debe intervenir sobre la *causa* que lo generó.

Si el alumno no alcanza el éxito en una prueba de matemática, sería oportuno entender a cual de las precedentes componentes se debe adscribir el fracaso; ¿el estudiante no entendió el concepto que habría debido usar?, ¿no entendió el proceso algorítmico que se auspiciaba de él? Etcétera.

Por tanto, consideramos que un análisis detallado de las componentes del aprendizaje en matemática pueda ser de gran ayuda para encontrar las causas del error y remediar en forma específica.

Pero no nos limitaremos a esto únicamente. ¿Cómo se puede evaluar en matemática? ¿Tiene sentido hacerlo en forma burda y no específica? ¿Qué significa: «Bruno no entiende la matemática»? ¿Ha fracasado en matemática, no tiene conocimiento matemático? Imposible que Bruno sea absolutamente... privo de *todo* aspecto del aprendizaje matemático.

Si entendió el concepto y no lo sabe usar, inútil insistir en el aprendizaje del concepto: si no lo entendió, pero de cualquier forma logra manejar las fórmulas, en la primera ocasión, diferente de aquella rutinaria, cederá; se vuelve entonces necesario ayudarlo en la construcción del concepto; y así sucesivamente.

Por tanto, para cada uno de los cinco capítulos de este libro, del 2 al 6, no sólo se presentarán cada una de las componentes del aprendizaje de la matemática, sino que se propondrán, además, algunas actividades centradas en esta componente y en su evaluación de forma específica, separándola de la evaluación de las otras componentes.

No obstante los límites de esta división, consideramos que dicha propuesta podrá ayudar a los docentes en su acción cotidiana de

formación de futuros ciudadanos en matemática.

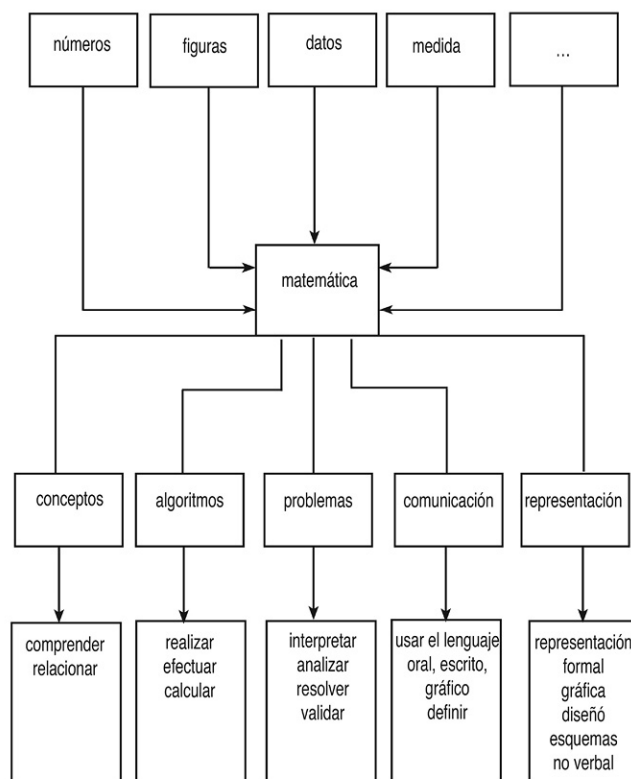
1.2. Diversas componentes en el aprendizaje de la matemática

El aprendizaje de la matemática comprende como mínimo 5 tipologías de aprendizajes diferentes, aunque no libre de superposiciones:

- aprendizaje conceptual (noética);
- aprendizaje algorítmico (calcular, operar, efectuar, solucionar,...)
- aprendizaje de estrategias (resolver, conjeturar, deducir, inducir,...)
- aprendizaje comunicativo (definir, argumentar, demostrar, validar, enunciar,...)
- aprendizaje y gestión de las representaciones semióticas (tratar, convertir, traducir, representar, interpretar,...)

Esta división no debe ser tomada literalmente, dado que, como ya lo hemos dicho, estas componentes se entrelazan reforzándose la una con la otra; sin embargo, dicha división ofrece una indudable comodidad de análisis y de lectura interpretativa de los errores, es decir, de aquellas manifestaciones de malestar cognitivo a las cuales sería bueno remediar positivamente, de forma eficaz. No es ni menos garantizado que su unión logre abarcar todas las componentes del aprendizaje matemático y que, por lo tanto, un análisis mucho más profundo no evidencie otras componente necesarias.

Sólo como ejemplo; junto a docentes de la escuela primaria hicimos una lectura específica de cada una de las componentes de la matemática de dicho nivel escolar, dado que se usaba identificar, hace algunos años, la matemática con el conjunto de componentes disciplinarios como números, figuras, medidas, datos y pensamiento racional (transversal), entonces cada una de dichas componentes disciplinarias puede ser analizada a través de las cinco componentes enunciadas líneas arriba y de proporcionar útiles indicaciones sobre como actuar didácticamente y como remediar a situaciones de fracaso en el aprendizaje.



A continuación entraremos en detalle en cada una de estas componentes, una por capítulo, del capítulo 2 al 6. En este capítulo 1, pero, necesitamos aún de algunas consideraciones preliminares.

1.3. Saber y saber hacer: unicidad y diferencias

Iniciamos haciendo una distinción terminológica, muy discutida, sobre la cual es necesario aún reflexionar.

Saber. Hoy todos concordamos, por lo menos genéricamente, en el carácter “constructivo” del aprendizaje: aprender un concepto matemático, aprender a hacer uso de un algoritmo, a comportarse en modo estratégico, a comunicar *la* matemática y *con la* matemática,... son todos comportamientos a través de los cuales se *construye* un objeto matemático. El primer interprete de la construcción de un aprendizaje es quien lo construye; por tanto, una de las primeras acciones didácticas consiste en enseñar, en promover, en reflexionar sobre las propias estrategias personales, para percibirlas como propias, para evaluarlas. Quien está aprendiendo es el autor principal de su

(propia) construcción de aprendizaje.

Saber hacer. Pero, consideramos que el saber por sí sólo, extrapolado de su contexto de uso, no llega a ser considerado saber, y esto vale no sólo para la matemática. Parece absolutamente necesario saber usar en contextos oportunos el concepto construido. El *saber hacer* sin el *saber* no es un saber, dado que carece del componente fundamental del saber, que es aplicativo y constructivo. Así, viceversa, el *saber* sin el *saber hacer* es vacío y estéril.

Para mayor claridad recurrimos a un ejemplo.

Aún admitiendo que existan sutiles diferencias entre un objeto como “recta” y uno como “demostración” y uno como “operación de división”, consideramos que en la fase de aprendizaje no haya, o no requiera, demasiadas distinciones; creemos que la operatividad (el llamado “saber hacer”) exija tanto del uso de conceptos, como de estrategias (el “saber resolver”,...) como de actividades algorítmicas (el “saber calcular”, el “saber operar”,...) etc.

Por tanto, el “saber” se mezcla con el “saber hacer” y sólo una sabia mezcla de estos tiene el derecho de ser llamado: aprendizaje consciente, *saber*.

Una antigua distinción que separaba el “saber” del “saber hacer” tiene el sabor de cosa superada, al menos en el campo específico del aprendizaje matemático en el cual el concepto no es nunca el concepto únicamente sino que incluye el uso que de este se hace a cualquier nivel.

A partir de este momento no se harán más distinciones entre “*saber*” y “*saber hacer*” pues estos dos aspectos se engloban en el *saber* mismo sin hacer diferencias.

1.4. Evaluar: un proceso

Una de las funciones que caracterizan con mayor fuerza la acción del docente en el aula es la constante “evaluación”; para decirlo brevemente, este proceso consta de por lo menos tres componentes distintas pero, aún una vez más, estrechamente relacionadas entre ellas (Fandiño Pinilla, 2002): evaluación

- de la propia acción didáctica
- del segmento curricular elegido y
- del proceso de aprendizaje de sus propios estudiantes.

Con relación con este último aspecto, el término “evaluación” se entiende aquí como el conjunto de las acciones mediante las cuales se reconocen las características del aprendizaje de los estudiantes y se determinan los aspectos en los cuales se debe centrar la ayuda que permite garantizar mejor este aprendizaje.

Obviamente dichas “acciones” conllevan un juicio sobre la eficacia de la propia acción didáctica y sobre el segmento curricular sobre el cual se está construyendo el aprendizaje.

En este marco de acción, el docente debe prestar atención a los instrumentos a través de los cuales mide el juicio de cada uno de los estudiantes, en relación con el aprendizaje de la matemática. No se puede y no se debe pensar en un único instrumento para esta evaluación; la investigación ha evidenciado la *necesidad* de hacer uso de varios y diversificados instrumentos.

Entrando con profundidad, analizamos adjetivos que, generalmente, se asocian al sustantivo “evaluación”.

Una distinción pedagógica que tuvo fortuna es aquella que concierne a la distinción entre evaluación “formativa”, “sumativa” y “evaluativa”; y que internacionalmente están definidas así (DES, 1987):

- la “evaluación formativa” toma en examen el desempeño de un estudiante en relación con sus objetivos cognitivos, en modo de favorecerla sobre la base de los resultados; se incluye en esta, por lo general, la “evaluación diagnóstica” en la cual se identifican las dificultades del estudiante, sea en lo relacionado con el aprendizaje, sea por lo que respecta la falta de comprensión;
- la “evaluación sumativa” mide y sintetiza las realizaciones del estudiante de forma sistemática; esta se reduce generalmente a un adjetivo, un número, una letra, y está destinada no sólo al

estudiante y al docente, sino también al externo, a la familia, a la institución escolar;

- la “evaluación evaluativa” (que en español parece una repetición, pero que en inglés es llamada “evaluative assessment”) comprende una evaluación en relación con el trabajo del docente, sobre la escuela, sobre el currículo o sobre una parte de este,..., históricamente esta última tiene como mínimo las siguientes cuatro funciones (Cardinet, 1983):
 - efectuar un balance sobre aquello que el estudiante está en grado de realizar en un determinado momento del proceso de enseñanza y aprendizaje;
 - guiar la sucesiva fase del aprendizaje sobre la base del balance precedente (sea en relación con los contenidos, sea en relación con las metodologías);
 - descubrir las causas de las dificultades del estudiante;
 - estimular el éxito del estudiante, con el objetivo de encontrar la forma de favorecer el aprendizaje.

Una terna con significados deferentes del término “evaluación” aparece también en Frabboni (1999) quien distingue entre “predictiva”, “formativa” y “sumativa”; pero, a estas tres acepciones, que se refieren al estudiante, él agrega explícitamente una «evaluación de la escuela como sistema».

Respecto a estas tendencias “clásicas” de interpretar la idea misma de evaluación, el momento actual exige, cada vez con mayor fuerza, tener presente la didáctica de la matemática en la formación docente dado que ya son muchos los jóvenes docentes que entran en el mundo de la educación y docentes en servicio que han frecuentado cursos específicos de esta disciplina.

La disciplina “didáctica de la matemática” tiene por lo menos tres decenios de historia, un gran número de investigadores activos en el mundo, un lenguaje compartido, revista propias (tanto de investigación, como de divulgación, como “mixtas”), seminarios de investigación y de divulgación propios, congresos,..., lo cual hace que su difusión real sea cada vez más amplia.