

Günter M. Gramlich

Lineare Algebra

Aufgaben und Lösungen

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} &= 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

HANSER



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Günter M. Gramlich

Lineare Algebra

Aufgaben und Lösungen

HANSER

Autor:

Günter M. Gramlich, Technische Hochschule Ulm



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2022 Carl Hanser Verlag München;

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: Frauke Schafft

Satz: Günther M. Gramlich

Titelbild: © Günter M. Gramlich

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Druck und Binden: Friedrich Pustet GmbH & Co. KG, Regensburg

Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-47302-7

E-Book-ISBN: 978-3-446-47308-9

Vorwort

Dieses Buch möchte Ihnen helfen, sich anhand von gelösten Aufgaben mit der Linearen Algebra näher vertraut zu machen. Sie finden im Folgenden sowohl Aufgaben als auch deren Lösungen. Diese Aufgaben und Lösungen habe ich meinen Studierenden in den zurückliegenden Semestern und vergangenen Jahren zur Verfügung gestellt.

Die Aufgaben sind Rechenaufgaben, Beweisaufgaben, Verständnisaufgaben, Computeraufgaben und Konstruktionsaufgaben. Ob eine Aufgabe schwierig oder leicht ist, hängt auch von Ihren Vorkenntnissen und bisherigen Umgang mit Mathematik ab. Wesentlich ist, dass Sie sich mit Aufgaben beschäftigen, um zu verstehen, was Lineare Algebra ausmacht, um sie gewinnbringend anwenden zu können.

Lösungen sind dabei als Musterlösungen zu verstehen. Das soll heißen, Sie können die Aufgaben so lösen, wie ich es vorgemacht habe, oder mit anderen Methoden, die vielleicht sogar einfacher oder eleganter sind. In diesem Sinne ist eine angegebene Lösung eine Musterlösung. Lösungen sind also Lösungsvorschläge.

In der Lehre der Mathematik gibt es Unterschiede zwischen verschiedenen Hochschulen, Fachhochschulen, verschiedenen Universitäten und zwischen verschiedenen Studiengängen. Selbst an derselben Hochschule und in demselben Fach setzt der eine Dozent vielleicht einen anderen Schwerpunkt als der andere Dozent. Das ist zulässig und gewollt. Daher empfehle ich Ihnen, (zunächst) solche Aufgaben zu bearbeiten, deren Thema Sie aus der eigenen Vorlesung kennen oder kennen sollten.

Dieses Buch ist nicht als Lehrbuch konzipiert, um neue Inhalte zu lehren, sondern als Begleittext zu Vorlesungen zur Linearen Algebra. Es soll Ihnen Muster zur Verfügung stellen, um Aufgaben zur Lineare Algebra erfolgreich bearbeiten zu können. Deshalb wird vorausgesetzt, dass grundsätzliche Kenntnisse aus der Linearen Algebra vorhanden sind.

Das vorliegende Aufgabenbuch ist wie das von mir verfasste Lehrbuch zur Linearen Algebra [8] strukturiert und dementsprechend gegliedert. Eine Tabelle über die von mir verwendeten mathematischen Symbole finden Sie am Ende des Buches. Um unnötiges Blättern zu vermeiden, habe ich die Lösung jeder Aufgabe direkt im Anschluss an die Aufgabenformulierung aufgeschrieben und somit keine Unterteilung in einen Aufgaben- und Lösungsteil vorgenommen. Trotzdem ist es längerfristig betrachtet sinnvoller, die Aufgaben zuerst selbst zu bearbeiten und erst danach die Lösungen durchzugehen.

Weitere Hinweise, Tipps und Bemerkungen:

- Versuchen Sie sich an Aufgaben zuerst selbst.

-
- Holen Sie sich erst dann Hinweise, wenn Sie nach intensiver Beschäftigung mit einer Aufgabe nicht weitergekommen sind.
 - Formulieren Sie Ihre Lösungen so, dass jemand anderes Ihre Gedankengänge verstehen und nachvollziehen kann.
 - Lesen Sie die Aufgabenstellung genau.
 - Ist Ihr Ergebnis plausibel?
 - Was sind in den Aufgaben die Voraussetzungen? Welche Begriffe kommen vor?
 - Seien Sie nicht demotiviert, wenn Sie eine Aufgabe nicht gleich lösen können. Man lernt auch beim Versuchen.
 - Bearbeiten Sie möglichst viele Aufgaben. Übung macht den Meister.
 - Wie haben wir Beispiele und Aufgaben in der Vorlesung und im Buch gelöst?
 - Gibt es andere Lösungswege, eventuelle elegantere oder schnellere?
 - Wird eine Voraussetzung nicht benutzt, so ist das Ergebnis selten richtig.
 - Geben Sie an, woher (aus welchen Mengen) die Variablen sind. So haben Sie immer Kontrolle über Ihre Elemente.

In den folgenden Büchern finden Sie weitere gelöste Aufgaben zur Linearen Algebra: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 16, 18, 19, 20]. Lehrbücher zur Linearen Algebra habe ich in [8] angegeben, in diesen finden sich ebenfalls Aufgaben.

Das vorliegende Buch habe ich vollständig in $\text{\LaTeX}$ mit der Hauptklasse `scrbook` des KOMA-Script-Pakets erstellt, das Literaturverzeichnis mit `biblatex`, und alle Bilder mit `PSTricks`. Ohne diese schönen Tools wäre dies alles viel schwieriger oder gar unmöglich gewesen.

Danke an das Team vom CARL HANSER Verlag Frau SILAKOVA-HERZBERG und Frau KUBIAK für Hinweise zur Gestaltung des Buches.

Für jede Anregung, nützlichen Hinweis oder Verbesserungsvorschlag bin ich dankbar. Sie können mich per Post oder über E-Mail Guenter.Gramlich@thu.de erreichen.

Ich wünsche Ihnen viel Freude und Erfolg mit diesem Buch und mit der Beschäftigung der Linearen Algebra.

Ulm, im Herbst 2021

Günter M. Gramlich

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle geordnete Tupel	9
2 Reelle Matrizen	13
3 Reelle lineare Gleichungssysteme	33
4 Reelle Vektorräume	55
5 Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$	107
6 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit Skalarprodukt	141
7 Spezielle lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$	179
8 Reelle Determinanten	189
9 Reelle Eigenwerte und Eigenvektoren	193
Mathematische Symbole	221
Literaturverzeichnis	223

1 Reelle geordnete Tupel

1.1 Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an. Es ist $n \in \mathbb{N}$. Dann besteht $\mathbb{R}^n$ aus

☐ n reellen Zahlen.

☐ n -Tupeln natürlicher Zahlen.

☐ n -Tupeln reeller Zahlen.

☐ Keine Aussage ist wahr.

Lösung:

	×		
--	---	--	--

 (spaltenweise)

1.2 Es ist $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Begründen Sie, weshalb $(x_1, \dots, x_n) \neq \{x_1, \dots, x_n\}$ ist.

Lösung: Das n -Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ ist etwas anderes als die Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$, da es bei einem n -Tupel zum Beispiel auf die Reihenfolge der Elemente ankommt und bei einer Menge nicht. So ist zum Beispiel $(1, 2, 3) \neq (2, 1, 3)$, aber $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$.

1.3 Gegeben ist $(4, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie a, b aus $\mathbb{R}$, so dass

$$(4, 2, 3) = (a, 2, b)$$

ist.

Lösung: Zwei (reelle) Zahlenpaare sind genau dann gleich, wenn ihre entsprechenden Koordinaten gleich sind. Also ist $a = 4$ und $b = 3$.

1.4 Berechnen Sie $v + w$, $u + v + w$ und $2u + 2v + w$ für die reellen Tupel $u = (1, 2, 3)$, $v = (-3, 1, -2)$ und $w = (2, -3, -1)$ aus $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Es ist $v + w = (-1, -2, -3)$, $u + v + w = (0, 0, 0)$ und $2u + 2v + w = (-2, 3, 1)$.

1.5 Gegeben sind die reellen Tripel $a = (5, 4, -3)$, $b = (1, 1, 0)$ und $c = (1, 0, -3)$ aus $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die reellen Werte für r und s so, dass gilt $a + rb + sc = o_3$.

Lösung: Durch Lösen des überbestimmten linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

erhält man die (eindeutige) Lösung $r = -4$, $s = -1$.

1.6 Es ist $v + w = (3, 1)$ und $v - w = (1, 3)$. Bestimmen Sie v und w .

Lösung: Es ist $v = (2, 2)$ und $w = (1, -1)$.

1.7 Finden Sie die Koordinaten von $3v + w$, $v - 3w$ und $rv + sw$ für $v = (2, 1)$ und $w = (1, 2)$. r und s sind reelle Zahlen.

Lösung: Es ergibt sich $3v + w = (7, 5)$, $v - 3w = (-1, -5)$ und $rv + sw = (2r + s, r + 2s)$.

1.8 Es sind v, w aus $\mathbb{R}^4$. Begründen Sie, warum die Gleichung $v + 2w + 3 = (1, -2, 4, 1)$ sinnlos ist.

Lösung: Ein reelles Tupel aus $\mathbb{R}^4$ und die reelle Zahl 3 kann man nicht addieren.

1.9 Es ist $a = (1, 2)$ und $b = (3, -4, 0)$. Ist es möglich $a + b$ zu berechnen? Falls ja, dann tun Sie es, falls nein, dann begründen Sie warum nicht.

Lösung: Es ist nicht möglich $a + b$ zu berechnen, da die Addition zweier Tupel nur dann definiert ist, wenn die Anzahl der Koordinaten gleich ist.

1.10 Visualisieren Sie das reelle Paar $(3, 2) \in \mathbb{R}^2$ als Punkt und als Pfeil (gerichtete Strecke).

Lösung: Siehe Bild 1.1.

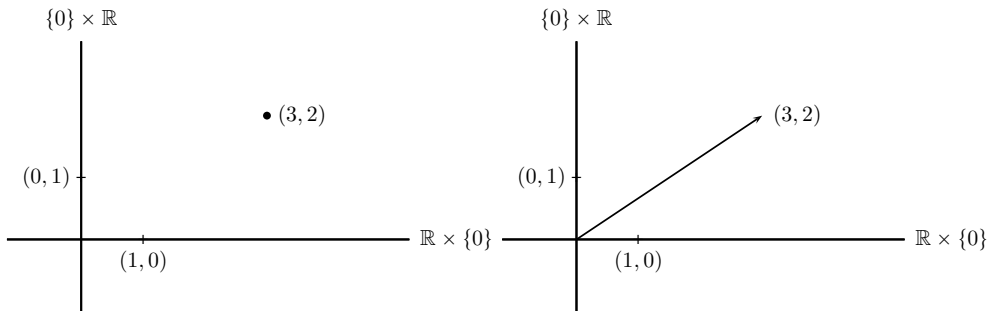


Bild 1.1: Das reelle Paar $(3, 2)$ visualisiert.

1.11 Es ist $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie für die Elemente aus $\mathbb{R}^n$ eine geometrische Interpretation.

Lösung: Der Fall $n = 1$. $\mathbb{R}^1$ entspricht geometrisch der Zahlengerade und jedem Element aus $\mathbb{R}^1$, also jeder reellen Zahl, entspricht ein Punkt auf dieser Geraden. Der Fall $n = 2$. Seit R. DESCARTES¹ ist es üblich, nach Wahl eines Koordinatensystems, die Punkte der Ebene durch Zahlenpaare, also Elemente aus $\mathbb{R}^2$, darzustellen. Umgekehrt gibt die Ebene eine Veranschaulichung der Zahlenpaare und damit der Menge $\mathbb{R}^2$. Jedem Element aus $\mathbb{R}^2$ entspricht ein Punkt der Ebene; die Menge $\mathbb{R}^2$ wird mit der Ebene identifiziert. Der Fall $n = 3$. Ebenso wie Punkte der Ebene mit Zahlenpaare identifiziert werden können, können nach Wahl eines Koordinatensystems die Punkte des Anschauungsraumes mit Zahlentripel aus $\mathbb{R}^3$ identifiziert werden. Der Fall $n = 4$. Zu

¹R. DESCARTES (1596-1650) war ein französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler.

Beginn des 20. Jahrhunderts schlug A. EINSTEIN² in seiner speziellen Relativitätstheorie vor, den $\mathbb{R}^4$ als geometrisches Modell für den uns umgebenden Raum zu verwenden, wobei die Zeit als vierte Koordinate interpretiert wird. Erst wenige Jahre vorher war es in der Mathematik üblich geworden, geometrische Betrachtungen auch in mehr als drei Dimensionen durchzuführen.

Es ist auch üblich, die Elemente von $\mathbb{R}^n$ als Pfeile (gerichtete Strecken) darzustellen.

1.12 Beschreiben Sie $\text{Lin}((1, 0, 1), (1, 0, 2))$. Welcher geometrischen Figur entspricht diese Menge?

Lösung: Es ist $\text{Lin}((1, 0, 1), (1, 0, 2)) = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$. Geometrisch entspricht dieser Menge die x, z -Ebene im x, y, z -Raum.

1.13 Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an. Der Menge $\text{Lin}((1, 1), (2, 2))$ entspricht geometrisch

- | | |
|---|--|
| ☐ eine Strecke. | ☐ eine Ellipse. |
| ☐ eine Gerade. | ☐ eine Ebene. |
| ☐ eine Halbgerade. | ☐ einem Parallelogramm. |
| ☐ ein Kreis. | ☐ Keine Aussage ist wahr. |

Lösung:

	×						
--	---	--	--	--	--	--	--

 (spaltenweise)

1.14 Gegeben sind p und $u \neq o_2 = (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$. Welches geometrische Objekt wird durch die Menge

$$S = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v = p + tu, t \in [0, 1]\}$$

beschrieben? Geben Sie ein Beispiel.

Lösung: Die Menge S beschreibt eine Strecke in der Ebene. Genauer: Die Strecke zwischen den beiden Punkten p und $p + u$.

Ist zum Beispiel $p = (0, 1)$ und $u = (2, 0)$, so ist S die Strecke zwischen den Punkten $(0, 1)$ und $(2, 1)$.

1.15 Gegeben sind p und $u \neq o_2 = (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$. Welches geometrische Objekt wird durch die Menge

$$H = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v = p + tu, t \in [0, \infty[\}$$

beschrieben? Geben Sie ein Beispiel.

²A. EINSTEIN (1879-1955) war ein deutscher Physiker mit Schweizer und US-amerikanischer Staatsbürgerschaft.

Lösung: Die Menge H beschreibt eine Halbgerade in der Ebene. Genauer: Die Halbgerade beginnend im Punkt p und durch den Punkt $p + u$ gehend.

Ist zum Beispiel $p = (0, 0)$ und $u = (1, 0)$, so ist H die positive x -Achse.

1.16 Gegeben sind p und $u \neq o_2 = (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$. Welches geometrische Objekt wird durch die Menge

$$G = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v = p + tu, t \in \mathbb{R}\}$$

beschrieben? Geben Sie ein Beispiel.

Lösung: Die Menge G beschreibt eine Gerade in der Ebene. Genauer: Die Gerade durch die Punkte p und $p + u$.

Ist zum Beispiel $p = (0, 0)$ und $u = (0, 1)$, so ist G die y -Achse.

2 Reelle Matrizen

2.1 Gegeben sind die Matrizen $A = ((1, 2, 3)) \in (\mathbb{R}^3)^1$ und $B = ((-1), (2)) \in (\mathbb{R}^1)^2$. Schreiben Sie die beiden Matrizen in rechteckiger Form. Um welche speziellen Matrizen handelt es sich?

Lösung: Es ist A die Spaltenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$$

und B die Zeilenmatrix $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$. Die Matrix A hat eine Spalten und drei Zeilen. Zum Beispiel ist (2) die zweite Zeile von A . Die Ordnung der Matrix A ist $(3, 1)$. Die Matrix A hat drei Elemente. Die Matrix B hat eine Zeile und zwei Spalten. Zum Beispiel ist (-1) die erste Spalte von B . Die Ordnung der Matrix B ist $(1, 2)$. Die Matrix B hat zwei Elemente.

2.2 Gegeben ist $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Finden Sie x, y aus $\mathbb{R}$, so dass

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ y \end{bmatrix}$$

ist.

Lösung: Zwei (reelle) Matrizen sind genau dann gleich, wenn ihre entsprechenden Elemente gleich sind. Also ist $x = 4$ und $y = 3$.

2.3 Eine Matrix $D = [d_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ ist eine Diagonalmatrix, wenn gilt $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

- ☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.
- ☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.
- ☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.
- ☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.

- ☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.
- ☐ Keine angegebene Aussage ist wahr.

Lösung:

×			×	×	
---	--	--	---	---	--

2.4 Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

- ☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.
- ☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.
- ☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.
- ☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.
- ☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.
- ☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.
- ☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.
- ☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.

Lösung:

		×				×	×
--	--	---	--	--	--	---	---

2.5 Welche der Matrizen ist symmetrisch?

- ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Lösung:

	×	
--	---	--

2.6 Zeigen Sie, dass die beiden Matrizen $A^T A$ und AA^T symmetrisch sind, wenn A eine beliebige reelle Matrix ist.

Lösung: Es gilt mit den Rechenregeln für transponierte Matrizen $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ und $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$, daher sind die beiden Matrizen symmetrisch.

2.7 Beweisen Sie die Rechenregel $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ für den Fall $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Lösung: Ist

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{so ist} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Somit ist einerseits

$$(A^{-1})^T = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Andererseits ist zunächst

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{und damit} \quad (A^T)^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Damit gilt die Gleichheit.

2.8 Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times r}$ und $B \in \mathbb{R}^{r \times n}$, so gilt $(AB)^T = B^T A^T$. Beweisen Sie dies.

Lösung: Erste Methode. Es ist $AB = [c_{ij}]$. Dann gilt $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{ir}b_{rj}$. Diese Zahl ist das Element der j -ten Zeile und i -ten Spalte der Matrix $(AB)^T = [c_{ij}]^T$. Die Elemente $b_{1j}, \dots, b_{rj}$ der j -ten Spalte von B sind die Elemente der j -ten Zeile von B^T . Die Elemente $a_{i1}, \dots, a_{ir}$ der i -ten Zeile von A sind die Elemente der i -ten Spalte von A^T . Das Element der j -ten Zeile und i -ten Spalte von $B^T A^T$ ist $b_{1j}a_{i1} + \dots + b_{rj}a_{ir}$; das ist $a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{ir}b_{rj}$. Somit ist $(AB)^T = B^T A^T$.

Zweite Methode. Es ist einerseits

$$A = \begin{bmatrix} - & z_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & z_m^T & - \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times r}, \quad B = \begin{bmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_n \\ | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times n}$$

und damit

$$AB = \begin{bmatrix} z_1^T b_1 & \dots & z_1^T b_n \\ \vdots & & \vdots \\ z_m^T b_1 & \dots & z_m^T b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{und} \quad (AB)^T = \begin{bmatrix} z_1^T b_1 & \dots & z_m^T b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^T b_n & \dots & z_m^T b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Es ist andererseits

$$A^T = \begin{bmatrix} | & & | \\ z_1 & \dots & z_m \\ | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times m}, \quad B^T = \begin{bmatrix} - & b_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & b_n^T & - \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r}$$

und damit

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} b_1^T z_1 & \cdots & b_1^T z_m \\ \vdots & & \vdots \\ b_n^T z_1 & \cdots & b_n^T z_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Nun ist aber $z_i^T b_j = b_j^T z_i$ für alle $i = 1 : m$ und alle $j = 1 : n$. Damit ist alles bewiesen.

2.9 Es ist $\text{eins} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ die Spaltenmatrix, die aus lauter Einsen besteht. Es ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Berechnen Sie $A \cdot \text{eins}$.

Lösung: Es ist

$$A \cdot \text{eins} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn} \end{bmatrix}.$$

In der Spaltenmatrix $A \cdot \text{eins} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ stehen die Zeilensummen von A .

2.10 Es ist $e_j \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ die Spaltenmatrix, die in der j -ten Zeile eine Eins sonst lauter Nullen hat. Es ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Berechnen Sie $A \cdot e_j$.

Lösung: Es ist für $j = 1, \dots, n$

$$A \cdot e_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{j-1,j} \\ a_{jj} \\ a_{j+1,j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Die Spaltenmatrix $A \cdot e_j$ enthält die j -ten Spaltenelemente der Matrix A .

2.11 Die folgenden Matrizen haben jeweils eine Inverse. Berechnen Sie diese.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Lösung: Es ist

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(0)(0)-(1)(1)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

$$(b) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(3)(2)-(1)(7)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(1)(1)-(0)(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eine Bestätigung in MATLAB¹:

```

1  >> inv([0 1;1 0])
2  ans =
3  0     1
4  1     0
5  >> inv([3 1;7 2])
6  ans =
7  -2.0000    1.0000
8  7.0000   -3.0000
9  >> inv([1 0;3 1])
10 ans =
11 1     0
12 -3    1

```

2.12 Geben Sie eine Matrix aus $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ an, die obere und untere Dreiecksmatrix zugleich ist.

Lösung: Zum Beispiel

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.13 Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (a) Eine Nullmatrix ist eine Diagonalmatrix.
- (b) Eine Einheitsmatrix ist symmetrisch.
- (c) Eine quadratische Matrix ist immer symmetrisch.
- (d) Eine symmetrische Matrix ist immer quadratisch.

Lösung: (a),(b) und (d) sind richtig.

2.14 Welche Bedingungen müssen zwei Matrizen erfüllen, damit sie entweder addiert oder multipliziert werden können?

Lösung: Beide Matrizen müssen die gleiche Anzahl von Zeilen und die gleiche Anzahl von Spalten haben, damit sie addiert werden können.

Die Anzahl der Spalten der ersten Matrix muss gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix sein, damit die multipliziert werden können.

¹MATLAB ® ist eingetragenes Warenzeichen von The MathWork Inc.

2.15 Berechnen Sie A^2 , A^3 und A^n ($n \in \mathbb{N}$) für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Lösung: Es ist

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix}, \quad A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}.$$

2.16 Zeigen Sie, dass E_2 das neutrale Element der Matrizenmultiplikation in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist.

Lösung: Es ist

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

für alle a, b, c und d aus $\mathbb{R}$. Somit ist E_2 das neutrale Element bezüglich der Matrizenmultiplikation.

2.17 Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Es ist

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

2.18 Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

für $a \neq b$ und $a \neq -b$.

Lösung: Die Inverse dieser (symmetrischen) Matrix ist

$$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Falls $a = b$ oder $a = -b$ ist, ist die Matrix nicht invertierbar.

2.19 Welche der folgenden Regeln sind für alle reellen quadratischen und invertierbaren Matrizen gültig, welche nicht?

- (a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (b) $AB = BA$. (c) $A = A^T$. (d) $(AB)^T = A^T B^T$.

Lösung: Nur (a) ist allgemein gültig.

2.20 Gegeben sind drei invertierbare Matrizen A, B, C aus $\mathbb{R}^{n \times n}$. Vereinfachen Sie den Ausdruck $(ABC)^{-1}(B^T A^T)^T C$ soweit wie möglich.

Lösung: Mit den Rechenregeln für Matrizen und speziell mit denen für invertierbare Matrizen gilt:

$$\begin{aligned} (ABC)^{-1}(B^T A^T)^T C &= C^{-1}(AB)^{-1}(A^T)^T (B^T)^T C = C^{-1}B^{-1}A^{-1}ABC \\ &= C^{-1}B^{-1}E_n BC = C^{-1}B^{-1}BC = C^{-1}E_n C \\ &= C^{-1}C = E_n \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist also die Einheitsmatrix der Ordnung n .

2.21 Die *Spur* einer Matrix ist eine einfache Maßzahl. Sie ist nur für quadratische Matrizen definiert. Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so definiert man die *Spur* von A durch

$$\text{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Die Spur einer Matrix ist die Summe ihrer Hauptdiagonalelemente. Da dort beliebige reelle Zahlen stehen können, ist die Spur eine Abbildung von $\mathbb{R}^{n \times n}$ nach $\mathbb{R}$. Die Spur kann auch für komplexe Matrizen erklärt werden und auch für Matrizen über anderen Zahlkörpern.

Bestimmen Sie die Spur der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = E_n \quad \text{und} \quad C = O_n.$$

Lösung: Es ist $\text{Spur}(A) = 1 + 4 = 5$, $\text{Spur}(B) = \text{Spur}(E_n) = 1 + \dots + 1 = n \cdot 1 = n$ und $\text{Spur}(C) = \text{Spur}(O_n) = 0 + \dots + 0 = n \cdot 0 = 0$. Eine Bestätigung in MATLAB:

```
1 >> A=[1 2;3 4];
2 >> trace(A)
3 ans =
4      5
```

2.22 Beweisen Sie folgenden Satz: *Es ist A, B aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\text{Spur}(A + B) = \text{Spur}(A) + \text{Spur}(B)$ und $\text{Spur}(c \cdot A) = c \cdot \text{Spur}(A)$. Wenn wir das bewiesen haben, dann haben wir gezeigt, dass die Spur eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^{n \times n}$ nach $\mathbb{R}$ ist, ja sogar ein lineares Funktional.*

Lösung: Es ist $A = [a_{ij}]$ und $B = [b_{ij}]$ aus $\mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt: $\text{Spur}(A + B) = \text{Spur}([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{Spur}([a_{ij}]) + \text{Spur}([b_{ij}]) = \text{Spur}(A) + \text{Spur}(B)$. Ist nun noch $c \in \mathbb{R}$, so ist $\text{Spur}(cA) = \text{Spur}(c[a_{ij}]) = \sum_{i=1}^n ca_{ii} = c \sum_{i=1}^n a_{ii} = c \text{Spur}(A)$. Somit ist die Spur eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^{n \times n}$ nach $\mathbb{R}$.

2.23 Verifizieren Sie den letzten Satz an einem Beispiel Ihrer Wahl.

Lösung: Ich wähle die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

und $c = 2$. Dann gilt zunächst

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad cA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Somit ist $\text{Spur}(A + B) = 18 = 5 + 13 = \text{Spur}(A) + \text{Spur}(B)$ und $\text{Spur}(cA) = 10 = 2 \cdot 5 = c \cdot \text{Spur}(A)$.

2.24 Beweisen Sie folgenden Satz: *Es ist A und B aus $\mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt $\text{Spur}(A^T) = \text{Spur}(A)$ und $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$.*

Lösung: Es ist $A = [a_{ij}]$ und $B = [b_{ij}]$ aus $\mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt: $\text{Spur}(A^T) = \text{Spur}([a_{ij}]^T) = \text{Spur}([a_{ji}]) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{Spur}(A)$. Ist $C = AB$ und $D = BA$. Dann ist $c_{ii} = a_{i1}b_{1i} + \dots + a_{in}b_{ni}$ und $d_{ii} = b_{i1}a_{1i} + \dots + b_{in}a_{ni}$. In $\sum c_{ii}$ kommt jedes Produkt $a_{ij}b_{ji}$ genau einmal vor, ebenso in $\sum d_{ii}$, also sind die beiden Spuren gleich: $\text{Spur}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij} = \text{Spur}(BA)$.

2.25 Da die Spur einer Matrix einfach zu berechnen ist, sind Beweise welche die Spur verwenden oft besonders elegant. Wir geben eine Kostprobe.

Zeigen Sie mithilfe der Spur: Es gibt keine Matrizen A, B aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit $AB - BA = E_n$. Hierbei ist $n \in \mathbb{N}$ (Die Gleichung $AB - BA = E_n$ spielt unter anderem in der Quantenphysik eine große Rolle und wird als *HEISENBERG-Gleichung*² bezeichnet).

Lösung: Es ist einerseits $\text{Spur}(E_n) = n$ und andererseits $\text{Spur}(AB - BA) = \text{Spur}(AB) - \text{Spur}(BA) = \text{Spur}(AB) - \text{Spur}(AB) = 0$.

2.26 Wir wissen, dass die Matrizenmultiplikation grundsätzlich nicht vertauschbar (kommutativ) ist. Auch wenn die Matrizen quadratisch sind, sind sie im Allgemeinen nicht vertauschbar. Die Kommutativregel gilt auch dann nicht, wenn die Matrizen symmetrisch (und somit auch quadratisch) sind. Geben Sie ein Beispiel dafür an! (In Aufgabe 2.27 werden wir sehen, dass für symmetrische Matrizen A und B die Kommutativregel $AB = BA$ genau dann gilt, wenn die Matrix AB symmetrisch ist.)

Lösung: Ich wähle die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

²W. HEISENBERG (1901-1976) deutscher Physiker.

Beide Matrizen sind symmetrisch, aber $AB \neq BA$, denn es ist

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{aber} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

2.27 Beweisen Sie folgenden Satz: *Es sind A, B aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ und symmetrisch. Dann gilt $AB = BA$ genau dann, wenn AB symmetrisch ist.*

Lösung: Wir haben zwei Richtungen zu beweisen. Zunächst zeigen wir: Ist AB symmetrisch, dann gilt $AB = BA$. Es ist $BA = B^T A^T = (AB)^T = AB$.

Nun zeigen wir umgekehrt: Ist $AB = BA$, so ist AB symmetrisch. Es ist $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$, also ist die Matrix AB symmetrisch. Damit ist der Satz bewiesen.

2.28 Verifizieren Sie den Satz aus Aufgabe 2.27 an zwei Beispielen Ihrer Wahl.

Lösung: Ein Beispiel steht in Aufgabe 2.26. Die Matrix

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

ist nicht symmetrisch und $AB \neq BA$.

Ist nun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

so ist die Matrix

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

symmetrisch und $AB = BA$.

Der Fall, dass die Matrix AB symmetrisch ist und $AB \neq BA$, kann für symmetrische Matrizen A, B nicht auftreten. Auch der Fall, dass AB nicht symmetrisch ist und $AB = BA$ ist, ist für symmetrische Matrizen A, B unmöglich.

2.29 Wir wissen aus der Matrizenrechnung, dass es keine die Kommutativregel für Matrizenprodukte gibt. Geben Sie zwei Matrizen an, die trotzdem kommutativ sind, wenn dies möglich ist. Ist das nicht möglich, dann geben Sie eine Begründung.

Lösung: Hier ist ein Beispiel für kommutative Matrizen. Ist

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$